et pour contrôle

$$(\sqrt{\xi_2})=\binom{100}{111},\ (\sqrt{\xi_3})=\binom{010}{110},\ (\sqrt{\xi_1})=\binom{111}{111},\ (\sqrt{\xi_4})=\binom{110}{101},\ (\sqrt{x_4})=\binom{101}{110},$$

$$(\sqrt{\gamma^\circ{}_3})=\binom{100}{110},\ (\sqrt{\gamma_3})=\binom{011}{101},\ (\sqrt{\gamma''{}_2})=\binom{001}{011},\ (\sqrt{\gamma'{}_2})=\binom{101}{011}.$$

On est maintenant en état de dresser le tableau suivant, contenant les 28 fonctions abéliennes avec leurs caractéristiques et leurs zéros (voir p. 142 et 143 ci-après).

### Transformation des intégrales $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$.

Avant de continuer cette étude, il est bon de soumettre les intégrales de première espèce à un examen un peu plus attentif.

$$w_1 = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}$$

On peut d'abord transformer l'intégrale proposée au moyen de la fonction

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\frac{z}{s}.$$

Il vient successivement

$$z = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},\quad s = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},\quad dz = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}},$$

$$w_1 = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

La substitution

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\eta$$

donne ensuite

$$w_1 = \int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale de Legendre, on posera en premier lieu

| Nos | Notat. | Expression. | Caract. | $z_1$ | $s_1$ | Nappe. | $z_2$ | $s_2$ | Nappe. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\sqrt{x_1}$ | $\sqrt{s-1}$ | 100<br>100 | $0$ | $1$ | I | $0$ | $1$ | I |
| 2 | $\sqrt{x_2}$ | $\sqrt{z+1}$ | 111<br>100 | $-1$ | $0$ | I II<br>III IV | $-1$ | $0$ | I II<br>III IV |
| 3 | $\sqrt{x_3}$ | $\sqrt{z-i}$ | 001<br>101 | $i$ | $0$ | I II<br>III IV | $i$ | $0$ | I II<br>III IV |
| 4 | $\sqrt{g^\circ}$ | $\sqrt{s+z-\varepsilon}$ | 100<br>101 | $-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | $-e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | III | $-e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | $-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | II |
| 5 | $\sqrt{g}$ | $\sqrt{s+z+\varepsilon}$ | 011<br>110 | $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | $e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | III | $e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | II |
| 6 | $\sqrt{g'}$ | $\sqrt{s+iz+\varepsilon'}$ | 011<br>001 | $-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | $e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | IV | $-e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | $e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | III |
| 7 | $\sqrt{g''}$ | $\sqrt{s+iz-\varepsilon'}$ | 111<br>001 | $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | $-e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | IV | $e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | $-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | III |
| 8 | $\sqrt{\xi_1}$ | $\sqrt{s+1}$ | 111<br>111 | $0$ | $-1$ | III | $0$ | $-1$ | III |
| 9 | $\sqrt{\xi_2}$ | $\sqrt{z-1}$ | 100<br>111 | $1$ | $0$ | I II<br>III IV | $1$ | $0$ | I II<br>III IV |
| 10 | $\sqrt{\xi_3}$ | $\sqrt{z+i}$ | 010<br>110 | $-i$ | $0$ | I II<br>III IV | $-i$ | $0$ | I II<br>III IV |
| 11 | $\sqrt{\gamma^\circ_1}$ | $\sqrt{s-z+\varepsilon}$ | 001<br>111 | $-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | $e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | I | $-e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | IV |
| 12 | $\sqrt{\gamma_1}$ | $\sqrt{s-z-\varepsilon}$ | 110<br>100 | $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | $-e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | I | $e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | $-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | IV |
| 13 | $\sqrt{\gamma'_1}$ | $\sqrt{s-iz-\varepsilon'}$ | 110<br>011 | $-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | $-e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | II | $-e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | $-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | I |
| 14 | $\sqrt{\gamma''_1}$ | $\sqrt{s-iz+\varepsilon'}$ | 010<br>011 | $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | $e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | II | $e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | $e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | I |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | $\sqrt{\gamma^{\circ}_2}$ | $\sqrt{s-z+\varepsilon'}$ | 010<br>111 | $-e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | $e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | IV | $-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | $e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | I |
| 16 | $\sqrt{\gamma_2}$ | $\sqrt{s-z-\varepsilon'}$ | 101<br>100 | $e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | $-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | IV | $e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | $-e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | I |
| 17 | $\sqrt{\gamma'_2}$ | $\sqrt{s+iz+\varepsilon}$ | 101<br>011 | $e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | III | $e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | $e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | IV |
| 18 | $\sqrt{\gamma''_2}$ | $\sqrt{s+iz-\varepsilon}$ | 001<br>011 | $-e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | $-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | III | $-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | $-e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | IV |
| 19 | $\sqrt{\gamma^{\circ}_3}$ | $\sqrt{s+z-\varepsilon'}$ | 100<br>110 | $-e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | $-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | II | $-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | $-e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | III |
| 20 | $\sqrt{\gamma_3}$ | $\sqrt{s+z+\varepsilon'}$ | 011<br>101 | $e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | $e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | II | $e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | $e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | III |
| 21 | $\sqrt{\gamma'_3}$ | $\sqrt{s-iz-\varepsilon}$ | 011<br>010 | $e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | $-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | I | $e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | $-e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | II |
| 22 | $\sqrt{\gamma''_3}$ | $\sqrt{s-iz+\varepsilon}$ | 111<br>010 | $-e^{\frac{5}{12}\pi i}$ | $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ | I | $-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ | $e^{\frac{11}{12}\pi i}$ | II |
| 23 | $\sqrt{\xi_4}$ | $\sqrt{s-i}$ | 110<br>101 | 0 | $i$ | II | 0 | $i$ | II |
| 24 | $\sqrt{\xi_5}$ | $\sqrt{s+\varepsilon' z}$ | 110<br>010 | $\infty$ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon'$ | | II | $\infty$ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon'$ | | II |
| 25 | $\sqrt{\xi_6}$ | $\sqrt{s-\varepsilon z}$ | 010<br>010 | $\infty$ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon$ | | I | $\infty$ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon$ | | I |
| 26 | $\sqrt{x_4}$ | $\sqrt{s+i}$ | 101<br>110 | 0 | $-i$ | IV | 0 | $-i$ | IV |
| 27 | $\sqrt{x_5}$ | $\sqrt{s-\varepsilon' z}$ | 101<br>001 | $\infty$ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon'$ | | IV | $\infty$ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon'$ | | IV |
| 28 | $\sqrt{x_6}$ | $\sqrt{s+\varepsilon z}$ | 001<br>001 | $\infty$ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon$ | | III | $\infty$ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon$ | | III |

$$\eta = \frac{y-1}{y+1}, \qquad d\eta = \frac{2dy}{(y+1)^2},$$

d'où il suit

$$w_1 = \sqrt{2}\int\frac{dy}{\sqrt{y^4+6y^2+1}} = \sqrt{2}\int\frac{dy}{\sqrt{[y^2+(\sqrt{2}+1)^2][y^2+(\sqrt{2}-1)^2]}}$$

puis

$$y = (\sqrt{2}+1)\operatorname{cotg}\varphi,\ dy = -(\sqrt{2}+1)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi},$$

ce qui conduit à la forme

$$w_1 = -\sqrt{2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2\cos^2\varphi + (\sqrt{2}-1)^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= -\sqrt{2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2}\sin^2\varphi}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+1}\right)^2\sin^2\varphi}}.$$

Afin de transformer cette dernière intégrale en une autre dont le module est plus petit, on peut employer la substitution de Landen, soit la formule

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi) = \frac{1+k_1}{2}F(k_1,\varphi_1),$$

dans laquelle les amplitudes $\varphi$ et $\varphi_1$ sont reliées par l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = k'\operatorname{tg}\varphi,\ \text{où}\ k' = \sqrt{1-k^2}$$

et le nouveau module

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Appliquées au cas actuel, où

$$k = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+1}, \qquad k' = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

ces formules donnent

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } w_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}}.$$

Pour faciliter la détermination des limites, voici encore une fois la série des substitutions employées :

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{z}{s} = e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{z}{\sqrt[4]{1-z^4}},\ \eta = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\zeta,\ y = \frac{1+\eta}{1-\eta},$$

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{y}{\sqrt{2}+1},\ \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = (\sqrt{2}-1)^2 \operatorname{tg}\varphi.$$

Ceci posé, on trouve, par exemple, en désignant par $\infty$ le point à l'infini de l'axe des X positifs et, d'une manière analogue, par $\varepsilon.\infty$ le point à l'infini de la droite $y = x$ du côté des X positifs :

$$\mathrm{K}_1 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = \varepsilon' \int_0^{\varepsilon.\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} = \int_0^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} + \int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Si, dans la dernière intégrale, on remplace $\eta$ par $\frac{1}{\eta}$, on remarque que

$$\int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}},$$

par conséquent

$$\mathrm{K}_1 = 2\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Aux limites 0 et 1 de $\eta$ correspondent les limites 1 et $\infty$ de $y$, $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)$ et 0 de $\varphi$. Reste encore à déterminer celles de $\varphi_1$. A l'aide de l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = (\sqrt{2}-1)^2 \operatorname{tg}\varphi,$$

dont on tire

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1+(\sqrt{2}+1)^2}{1-(\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot\operatorname{tg}\varphi,$$

il vient $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ pour $\operatorname{tg}\varphi = (\sqrt{2}+1)$ et $\varphi_1 = 0$ pour $\varphi = 0$, de sorte que

$$K_1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}}.$$

---

$$w_2 = \int\frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}.$$

---

En introduisant $s$ comme variable d'intégration, on a immédiatement

$$z = \sqrt{1-s^4},\ dz = -\frac{s^3ds}{(1-s^4)^{\frac{3}{4}}}\ \text{et}\ w_2 = -\int\frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}.$$

Puis la substitution

$$s = \cos\varphi,\ ds = -\sin\varphi\, d\varphi$$

donne

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Il s'ensuit, par exemple,

$$K_2 = \int_0^1\frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1.$$

---

$$w_3 = \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

---

Il suffit de poser

$$z = \cos\varphi,\ dz = -\sin\varphi\, d\varphi$$

pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale

$$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

On en tire

$$K_3 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1.$$

Ainsi, on vient de trouver

$$K_2 = K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1.$$

### Valeur numérique de $K_1$.

En vue d'une représentation qui sera faite ultérieurement, il est utile de connaître la valeur numérique de $K_1$. Pour la déterminer, on peut se servir de la méthode de Gauss.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(a, b, \varphi) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

et que l'on soumette cette fonction $n$ fois de suite à la transformation de Landen, il vient

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{2}\,f(a_1, b_1, \varphi_1) = \frac{1}{2^2}\,f(a_2, b_2, \varphi_2) = \dots$$
$$= \frac{1}{2^n}\,f(a_n, b_n, \varphi_n), \text{ où}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}\,, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}\,, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1}\operatorname{tg}\varphi_1,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2+b_2), \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}\,, \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2}\operatorname{tg}\varphi_2,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .