

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Transformation des intégrales w1, w2, w3
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-261785>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

et pour contrôle

$$\begin{aligned} (\sqrt{\xi_2}) &= \begin{pmatrix} 100 \\ 111 \end{pmatrix}, (\sqrt{\xi_5}) = \begin{pmatrix} 010 \\ 110 \end{pmatrix}, (\sqrt{\xi_4}) = \begin{pmatrix} 111 \\ 111 \end{pmatrix}, (\sqrt{\xi_4}) = \begin{pmatrix} 110 \\ 101 \end{pmatrix}, (\sqrt{x_4}) = \begin{pmatrix} 101 \\ 110 \end{pmatrix}, \\ (\sqrt{\gamma^{\circ}_3}) &= \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}, (\sqrt{\gamma_5}) = \begin{pmatrix} 011 \\ 101 \end{pmatrix}, (\sqrt{\gamma''_2}) = \begin{pmatrix} 001 \\ 011 \end{pmatrix}, (\sqrt{\gamma'_2}) = \begin{pmatrix} 101 \\ 011 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On est maintenant en état de dresser le tableau suivant, contenant les 28 fonctions abéliennes avec leurs caractéristiques et leurs zéros (voir p. 142 et 143 ci-après).

Transformation des intégrales w_1 , w_2 , w_3 .

Avant de continuer cette étude, il est bon de soumettre les intégrales de première espèce à un examen un peu plus attentif.

$$w_1 = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^5}}$$

On peut d'abord transformer l'intégrale proposée au moyen de la fonction

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i} \frac{z}{s}.$$

Il vient successivement

$$\begin{aligned} z &= e^{-\frac{1}{4}\pi i} \frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}, \quad s = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}, \quad dz = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}}, \\ w_1 &= e^{-\frac{1}{4}\pi i} \int \frac{d\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}. \end{aligned}$$

La substitution

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i} \eta$$

donne ensuite

$$w_1 = \int \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}}.$$

Pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale de Legendre, on posera en premier lieu

N ^o s	Notat.	Expression.	Caract.	\tilde{z}_1	\tilde{s}_1	Nappe.	\tilde{z}_2	\tilde{s}_2	Nappe.
1	$\sqrt{x_1}$	$\sqrt{s-1}$	$\frac{100}{100}$	0	1	I	0	1	I
2	$\sqrt{x_2}$	$\sqrt{s+1}$	$\frac{111}{100}$	-1	0	II	-1	0	II
3	$\sqrt{x_3}$	$\sqrt{s-i}$	$\frac{001}{101}$	i	0	III	i	0	III
4	$\sqrt{g^o}$	$\sqrt{s+z-\varepsilon}$	$\frac{100}{101}$	$-\frac{5}{12}\pi i$	$-\frac{11}{12}\pi i$	IV	$-\frac{11}{12}\pi i$	$-\frac{5}{12}\pi i$	IV
5	\sqrt{g}	$\sqrt{s+z+\varepsilon}$	$\frac{011}{140}$	e	$-\frac{5}{12}\pi i$	e	$\frac{11}{12}\pi i$	e	IV
6	$\sqrt{g'}$	$\sqrt{s+i\bar{z}+\varepsilon'}$	$\frac{011}{001}$	$-\frac{5}{12}\pi i$	e	$\frac{5}{12}\pi i$	$-\frac{11}{12}\pi i$	e	III
7	$\sqrt{g''}$	$\sqrt{s+i\bar{z}-\varepsilon'}$	$\frac{111}{001}$	$-\frac{5}{12}\pi i$	e	$-\frac{5}{12}\pi i$	$-\frac{11}{12}\pi i$	e	III
8	$\sqrt{\xi_1}$	$\sqrt{s+1}$	$\frac{111}{111}$	0	-1	III	0	-1	III
9	$\sqrt{\xi_2}$	$\sqrt{s-1}$	$\frac{100}{111}$	1	0	II	1	0	IV
10	$\sqrt{\xi_3}$	$\sqrt{s+i}$	$\frac{010}{110}$	$-i$	0	II	$-i$	0	IV
11	$\sqrt{\gamma^o_1}$	$\sqrt{s-z+\varepsilon}$	$\frac{001}{111}$	$-e$	$-\frac{5}{12}\pi i$	e	$\frac{11}{12}\pi i$	e	IV
12	$\sqrt{\gamma_1}$	$\sqrt{s-z-\varepsilon}$	$\frac{140}{100}$	e	$-\frac{5}{12}\pi i$	$-e$	$\frac{11}{12}\pi i$	$-e$	IV
13	$\sqrt{\gamma'_1}$	$\sqrt{s-i\bar{z}-\varepsilon'}$	$\frac{140}{011}$	$-e$	$-\frac{5}{12}\pi i$	$-e$	$\frac{11}{12}\pi i$	$-e$	I
14	$\sqrt{\gamma''_1}$	$\sqrt{s-i\bar{z}+\varepsilon'}$	$\frac{010}{011}$	e	$-\frac{5}{12}\pi i$	e	$\frac{11}{12}\pi i$	e	I

15	$\sqrt{\gamma_2^o}$	$\sqrt{s-z+\varepsilon'}$	$\begin{matrix} 00 \\ 11 \end{matrix}$	$e^{-\frac{41}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{41}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	I
16	$\sqrt{\gamma_2}$	$\sqrt{s-z-\varepsilon'}$	$\begin{matrix} 101 \\ 100 \end{matrix}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	I
17	$\sqrt{\gamma'_2}$	$\sqrt{s+iz+\varepsilon}$	$\begin{matrix} 101 \\ 011 \end{matrix}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	IV
18	$\sqrt{\gamma''_2}$	$\sqrt{s+iz-\varepsilon}$	$\begin{matrix} 001 \\ 011 \end{matrix}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	IV
19	$\sqrt{\gamma^o_3}$	$\sqrt{s+z-\varepsilon'}$	$\begin{matrix} 100 \\ 110 \end{matrix}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	III
20	$\sqrt{\gamma'_3}$	$\sqrt{s+z+\varepsilon'}$	$\begin{matrix} 011 \\ 101 \end{matrix}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	III
21	$\sqrt{\gamma''_3}$	$\sqrt{s-iz-\varepsilon}$	$\begin{matrix} 011 \\ 010 \end{matrix}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	II
22	$\sqrt{\gamma'''_3}$	$\sqrt{s-iz+\varepsilon}$	$\begin{matrix} 111 \\ 010 \end{matrix}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	II
23	$\sqrt{\xi_4}$	$\sqrt{s-i}$	$\begin{matrix} 110 \\ 101 \end{matrix}$	0	i	II	0	II
24	$\sqrt{\xi_5}$	$\sqrt{s+\varepsilon'z}$	$\begin{matrix} 110 \\ 010 \end{matrix}$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon'$	II	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon'$	II	II
25	$\sqrt{\xi_6}$	$\sqrt{s-\varepsilon z}$	$\begin{matrix} 010 \\ 010 \end{matrix}$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon$	I	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon$	I	I
26	$\sqrt{x_4}$	$\sqrt{s+i}$	$\begin{matrix} 101 \\ 110 \end{matrix}$	0	i	IV	0	IV
27	$\sqrt{x_5}$	$\sqrt{s-\varepsilon'z}$	$\begin{matrix} 101 \\ 001 \end{matrix}$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon'$	IV	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon'$	IV	IV
28	$\sqrt{x_6}$	$\sqrt{s+\varepsilon z}$	$\begin{matrix} 001 \\ 001 \end{matrix}$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon$	III	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon$	III	III

$$\eta = \frac{y-1}{y+1}, \quad d\eta = \frac{2dy}{(y+1)^2},$$

d'où il suit

$$w_1 = \sqrt{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^4 + 6y^2 + 1}} = \sqrt{2} \int \frac{dy}{\sqrt{[y^2 + (\sqrt{2}+1)^2][y^2 + (\sqrt{2}-1)^2]}}$$

puis

$$y = (\sqrt{2}+1) \cotg \varphi, \quad dy = -(\sqrt{2}+1) \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi},$$

ce qui conduit à la forme

$$\begin{aligned} w_1 &= -\sqrt{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 \cos^2 \varphi + (\sqrt{2}-1)^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= -\sqrt{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2} \sin^2 \varphi}} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Afin de transformer cette dernière intégrale en une autre dont le module est plus petit, on peut employer la substitution de Landen, soit la formule

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \varphi) = \frac{1+k}{2} F(k_1, \varphi_1),$$

dans laquelle les amplitudes φ et φ_1 sont reliées par l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = k' \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{où } k' = \sqrt{1 - k^2}$$

et le nouveau module

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Appliquées au cas actuel, où

$$k = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}, \quad k' = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

ces formules donnent

$$k_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } w_4 = -\frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_4}}.$$

Pour faciliter la détermination des limites, voici encore une fois la série des substitutions employées :

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i} \frac{z}{s} = e^{\frac{1}{4}\pi i} \frac{z}{\sqrt[4]{1-z^4}}, \quad \eta = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \zeta, \quad y = \frac{1+\eta}{1-\eta},$$

$$\cotg \varphi = \frac{y}{\sqrt{2}+1}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_4 - \varphi) = (\sqrt{2}-1)^2 \operatorname{tg} \varphi.$$

Ceci posé, on trouve, par exemple, en désignant par ∞ le point à l'infini de l'axe des X positifs et, d'une manière analogue, par $\varepsilon \cdot \infty$ le point à l'infini de la droite $y=x$ du côté des X positifs :

$$K_4 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^5}} = \varepsilon' \int_0^{\varepsilon \cdot \infty} \frac{d\xi}{\sqrt[4]{1-\xi^4}} = \int_0^\infty \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}} + \int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}}.$$

Si, dans la dernière intégrale, on remplace η par $\frac{1}{\eta}$, on remarque que

$$\int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}},$$

par conséquent

$$K_4 = 2 \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}}.$$

Aux limites 0 et 1 de η correspondent les limites 1 et ∞ de y , $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)$ et 0 de φ . Reste encore à déterminer celles de φ_4 . A l'aide de l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_4 - \varphi) = (\sqrt{2}-1)^2 \operatorname{tg} \varphi,$$

dont on tire

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1 + (\sqrt{2} + 1)^2}{1 - (\sqrt{2} - 1)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

il vient $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ pour $\operatorname{tg} \varphi = (\sqrt{2} + 1)$ et $\varphi_1 = 0$ pour $\varphi = 0$, de sorte que

$$K_1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_1}}.$$

$$w_2 = \int \frac{z dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^5}}.$$

En introduisant s comme variable d'intégration, on a immédiatement

$$z = \sqrt{1-s^4}, dz = -\frac{s^3 ds}{(1-s^4)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } w_2 = -\int \frac{ds}{\sqrt[4]{1-s^4}}.$$

Puis la substitution

$$s = \cos \varphi, ds = -\sin \varphi d\varphi$$

donne

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Il s'ensuit, par exemple,

$$K_2 = \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

$$w_5 = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{1-z^4}}.$$

Il suffit de poser

$$z = \cos \varphi, dz = -\sin \varphi d\varphi$$

pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale

$$w_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

On en tire

$$K_5 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{9}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K_4.$$

Ainsi, on vient de trouver

$$K_2 = K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} K_4.$$

Valeur numérique de K₁.

En vue d'une représentation qui sera faite ultérieurement, il est utile de connaître la valeur numérique de K_1 . Pour la déterminer, on peut se servir de la méthode de Gauss.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(a, b, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

et que l'on soumette cette fonction n fois de suite à la transformation de Landen, il vient

$$f(a, b, g) = \frac{1}{2} \quad f(a_1, b_1, g_1) = \frac{1}{2^2} \quad f(a_2, b_2, g_2) = \dots \\ = \frac{1}{2^n} \quad f(a_n, b_n, g_n), \text{ où}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_4 + b_4), \quad b_2 = \sqrt{a_4 b_4}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_4) = \frac{b_4}{a_4} \operatorname{tg} \varphi_4,$$

$$a_3 = \frac{1}{2} (a_2 + b_2), \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2} \operatorname{tg} \varphi_2,$$