Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Transformation des intégrales w1, w2, w3
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

et pour contrôle

$$(\sqrt{\xi_2})=\binom{100}{111},\ (\sqrt{\xi_3})=\binom{010}{110},\ (\sqrt{\xi_1})=\binom{111}{111},\ (\sqrt{\xi_4})=\binom{110}{101},\ (\sqrt{x_4})=\binom{101}{110},$$

$$(\sqrt{\gamma^\circ{}_3})=\binom{100}{110},\ (\sqrt{\gamma_3})=\binom{011}{101},\ (\sqrt{\gamma''{}_2})=\binom{001}{011},\ (\sqrt{\gamma'{}_2})=\binom{101}{011}.$$

On est maintenant en état de dresser le tableau suivant, contenant les 28 fonctions abéliennes avec leurs caractéristiques et leurs zéros (voir p. 142 et 143 ci-après).

Transformation des intégrales $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$.

Avant de continuer cette étude, il est bon de soumettre les intégrales de première espèce à un examen un peu plus attentif.

$$w_1 = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}$$

On peut d'abord transformer l'intégrale proposée au moyen de la fonction

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\frac{z}{s}.$$

Il vient successivement

$$z = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},\quad s = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},\quad dz = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}},$$

$$w_1 = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\int\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

La substitution

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\eta$$

donne ensuite

$$w_1 = \int\frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale de Legendre, on posera en premier lieu

Nos	Notat.	Expression.	Caract.	z_1	s_1	Nappe.	z_2	s_2	Nappe.
1	$\sqrt{x_1}$	$\sqrt{s-1}$	100 100	0	1	I	0	1	I
2	$\sqrt{x_2}$	$\sqrt{z+1}$	111 100	-1	0	I II III IV	-1	0	I II III IV
3	$\sqrt{x_3}$	$\sqrt{z-i}$	001 101	i	0	I II III IV	i	0	I II III IV
4	$\sqrt{g^\circ}$	$\sqrt{s+z-\varepsilon}$	100 101	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	III	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	II
5	$\sqrt{g}$	$\sqrt{s+z+\varepsilon}$	011 110	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	III	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	II
6	$\sqrt{g'}$	$\sqrt{s+iz+\varepsilon'}$	011 001	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	IV	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	III
7	$\sqrt{g''}$	$\sqrt{s+iz-\varepsilon'}$	111 001	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	IV	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	III
8	$\sqrt{\xi_1}$	$\sqrt{s+1}$	111 111	0	-1	III	0	-1	III
9	$\sqrt{\xi_2}$	$\sqrt{z-1}$	100 111	1	0	I II III IV	1	0	I II III IV
10	$\sqrt{\xi_3}$	$\sqrt{z+i}$	010 110	$-i$	0	I II III IV	$-i$	0	I II III IV
11	$\sqrt{\gamma^\circ_1}$	$\sqrt{s-z+\varepsilon}$	001 111	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	I	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	IV
12	$\sqrt{\gamma_1}$	$\sqrt{s-z-\varepsilon}$	110 100	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	I	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	IV
13	$\sqrt{\gamma'_1}$	$\sqrt{s-iz-\varepsilon'}$	110 011	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	II	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	I
14	$\sqrt{\gamma''_1}$	$\sqrt{s-iz+\varepsilon'}$	010 011	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	II	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	I

15	$\sqrt{\gamma^{\circ}_2}$	$\sqrt{s-z+\varepsilon'}$	010 111	$-\ e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	IV	$-\ e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	I
16	$\sqrt{\gamma_2}$	$\sqrt{s-z-\varepsilon'}$	101 100	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-\ e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	IV	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-\ e^{\frac{5}{12}\pi i}$	I
17	$\sqrt{\gamma'_2}$	$\sqrt{s+iz+\varepsilon}$	101 011	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	III	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	IV
18	$\sqrt{\gamma''_2}$	$\sqrt{s+iz-\varepsilon}$	001 011	$-\ e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-\ e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	III	$-\ e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-\ e^{\frac{11}{12}\pi i}$	IV
19	$\sqrt{\gamma^{\circ}_3}$	$\sqrt{s+z-\varepsilon'}$	100 110	$-\ e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-\ e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	II	$-\ e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-\ e^{\frac{5}{12}\pi i}$	III
20	$\sqrt{\gamma_3}$	$\sqrt{s+z+\varepsilon'}$	011 101	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	II	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	III
21	$\sqrt{\gamma'_3}$	$\sqrt{s-iz-\varepsilon}$	011 010	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-\ e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	I	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-\ e^{\frac{11}{12}\pi i}$	II
22	$\sqrt{\gamma''_3}$	$\sqrt{s-iz+\varepsilon}$	111 010	$-\ e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	I	$-\ e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	II
23	$\sqrt{\xi_4}$	$\sqrt{s-i}$	110 101	0	i	II	0	i	II
24	$\sqrt{\xi_5}$	$\sqrt{s+\varepsilon' z}$	110 010	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\ \varepsilon'$		II	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\ \varepsilon'$		II
25	$\sqrt{\xi_6}$	$\sqrt{s-\varepsilon z}$	010 010	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon$		I	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon$		I
26	$\sqrt{x_4}$	$\sqrt{s+i}$	101 110	0	$-\ i$	IV	0	$-\ i$	IV
27	$\sqrt{x_5}$	$\sqrt{s-\varepsilon' z}$	101 001	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon'$		IV	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon'$		IV
28	$\sqrt{x_6}$	$\sqrt{s+\varepsilon z}$	001 001	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\ \varepsilon$		III	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\ \varepsilon$		III

$$\eta = \frac{y-1}{y+1}, \qquad d\eta = \frac{2dy}{(y+1)^2},$$

d'où il suit

$$w_1 = \sqrt{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^4+6y^2+1}} = \sqrt{2}\int \frac{dy}{\sqrt{[y^2+(\sqrt{2}+1)^2][y^2+(\sqrt{2}-1)^2]}}$$

puis

$$y = (\sqrt{2}+1)\operatorname{cotg}\varphi,\ dy = -(\sqrt{2}+1)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi},$$

ce qui conduit à la forme

$$w_1 = -\sqrt{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2\cos^2\varphi + (\sqrt{2}-1)^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= -\sqrt{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2}\sin^2\varphi}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+1}\right)^2 \sin^2\varphi}}.$$

Afin de transformer cette dernière intégrale en une autre dont le module est plus petit, on peut employer la substitution de Landen, soit la formule

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi) = \frac{1+k_1}{2}F(k_1,\varphi_1),$$

dans laquelle les amplitudes φ et φ_1 sont reliées par l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = k'\operatorname{tg}\varphi,\ \text{où}\ k' = \sqrt{1-k^2}$$

et le nouveau module

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Appliquées au cas actuel, où

$$k = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+1}, \qquad k' = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

ces formules donnent

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } w_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}}.$$

Pour faciliter la détermination des limites, voici encore une fois la série des substitutions employées :

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{z}{s} = e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{z}{\sqrt[4]{1-z^4}},\ \eta = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\zeta,\ y = \frac{1+\eta}{1-\eta},$$

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{y}{\sqrt{2}+1},\ \operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = (\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}\varphi.$$

Ceci posé, on trouve, par exemple, en désignant par ∞ le point à l'infini de l'axe des X positifs et, d'une manière analogue, par $\varepsilon.\infty$ le point à l'infini de la droite $y=x$ du côté des X positifs :

$$\mathrm{K}_1 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = \varepsilon' \int_0^{\varepsilon.\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} = \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} + \int_1^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Si, dans la dernière intégrale, on remplace η par $\frac{1}{\eta}$, on remarque que

$$\int_1^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}},$$

par conséquent

$$\mathrm{K}_1 = 2\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Aux limites 0 et 1 de η correspondent les limites 1 et ∞ de y, $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)$ et 0 de φ. Reste encore à déterminer celles de φ_1. A l'aide de l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = (\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}\varphi,$$

dont on tire

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1+(\sqrt{2}+1)^2}{1-(\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot\operatorname{tg}\varphi,$$

il vient $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ pour $\operatorname{tg}\varphi = (\sqrt{2}+1)$ et $\varphi_1 = 0$ pour $\varphi = 0$, de sorte que

$$K_1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}}.$$

$$w_2 = \int\frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}.$$

En introduisant s comme variable d'intégration, on a immédiatement

$$z = \sqrt{1-s^4},\ dz = -\frac{s^3ds}{(1-s^4)^{\frac{3}{4}}} \text{ et } w_2 = -\int\frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}.$$

Puis la substitution

$$s = \cos\varphi,\ ds = -\sin\varphi\, d\varphi$$

donne

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Il s'ensuit, par exemple,

$$K_2 = \int_0^1\frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1.$$

$$w_3 = \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Il suffit de poser

$$z = \cos\varphi,\ dz = -\sin\varphi\, d\varphi$$

pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale

$$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

On en tire

$$K_3 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

Ainsi, on vient de trouver

$$K_2 = K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

Valeur numérique de K_1.

En vue d'une représentation qui sera faite ultérieurement, il est utile de connaître la valeur numérique de K_1. Pour la déterminer, on peut se servir de la méthode de Gauss.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(a, b, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

et que l'on soumette cette fonction n fois de suite à la transformation de Landen, il vient

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{2}\, f(a_1, b_1, \varphi_1) = \frac{1}{2^2}\, f(a_2, b_2, \varphi_2) = \dots$$
$$= \frac{1}{2^n}\, f(a_n, b_n, \varphi_n), \text{ où}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b),\quad b_1 = \sqrt{ab},\quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1),\quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},\quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1}\operatorname{tg}\varphi_1,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2+b_2),\quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2},\quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2}\operatorname{tg}\varphi_2,$$

. . . .