

Transformation des intégrales w1, w2, w3

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

et pour contrôle

$$(\sqrt{\xi_2}) = \begin{pmatrix} 100 \\ 111 \end{pmatrix}, (\sqrt{\xi_3}) = \begin{pmatrix} 010 \\ 110 \end{pmatrix}, (\sqrt{\xi_4}) = \begin{pmatrix} 111 \\ 111 \end{pmatrix}, (\sqrt{\xi_4}) = \begin{pmatrix} 110 \\ 101 \end{pmatrix}, (\sqrt{x_4}) = \begin{pmatrix} 101 \\ 110 \end{pmatrix},$$

$$(\sqrt{\gamma_5}) = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}, (\sqrt{\gamma_5}) = \begin{pmatrix} 011 \\ 101 \end{pmatrix}, (\sqrt{\gamma_2}) = \begin{pmatrix} 001 \\ 011 \end{pmatrix}, (\sqrt{\gamma_2}) = \begin{pmatrix} 101 \\ 011 \end{pmatrix}.$$

On est maintenant en état de dresser le tableau suivant, contenant les 28 fonctions abéliennes avec leurs caractéristiques et leurs zéros (voir p. 142 et 143 ci-après).

Transformation des intégrales w_1, w_2, w_3 .

Avant de continuer cette étude, il est bon de soumettre les intégrales de première espèce à un examen un peu plus attentif.

$$w_1 = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^5}}$$

On peut d'abord transformer l'intégrale proposée au moyen de la fonction

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i} \frac{z}{s}.$$

Il vient successivement

$$z = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}, \quad s = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}, \quad dz = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}},$$

$$w_1 = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \int \frac{d\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}.$$

La substitution

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i} \eta$$

donne ensuite

$$w_1 = \int \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}}.$$

Pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale de Legendre, on posera en premier lieu

Nos	Notat.	Expression.	Caract.	\mathcal{E}_1	S_1	Nappe.	\mathcal{E}_2	S_2	Nappe.
1	$\overline{Vx_1}$	$\overline{Vs-1}$	$\begin{smallmatrix} 100 \\ 100 \end{smallmatrix}$	0	1	I	0	1	I
2	$\overline{Vx_2}$	$\overline{Vs+1}$	$\begin{smallmatrix} 111 \\ 100 \end{smallmatrix}$	-1	0	$\begin{smallmatrix} I & II \\ III & IV \end{smallmatrix}$	-1	0	$\begin{smallmatrix} I & II \\ III & IV \end{smallmatrix}$
3	$\overline{Vx_3}$	$\overline{Vs-i}$	$\begin{smallmatrix} 001 \\ 101 \end{smallmatrix}$	i	0	$\begin{smallmatrix} I & II \\ III & IV \end{smallmatrix}$	i	0	$\begin{smallmatrix} I & II \\ III & IV \end{smallmatrix}$
4	$\overline{Vg^0}$	$\overline{Vs+z-\varepsilon}$	$\begin{smallmatrix} 100 \\ 101 \end{smallmatrix}$	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	$\frac{11}{12}\pi i$ e	III	$-\frac{11}{12}\pi i$ e	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	II
5	\overline{Vg}	$\overline{Vs+z+\varepsilon}$	$\begin{smallmatrix} 011 \\ 110 \end{smallmatrix}$	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	$\frac{11}{12}\pi i$ e	III	$\frac{11}{12}\pi i$ e	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	II
6	$\overline{Vg'}$	$\overline{Vs+iz+\varepsilon'}$	$\begin{smallmatrix} 011 \\ 001 \end{smallmatrix}$	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	$\frac{5}{12}\pi i$ e	IV	$-\frac{11}{12}\pi i$ e	$-\frac{11}{12}\pi i$ e	III
7	$\overline{Vg''}$	$\overline{Vs+iz-\varepsilon'}$	$\begin{smallmatrix} 111 \\ 001 \end{smallmatrix}$	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	$\frac{5}{12}\pi i$ e	IV	$\frac{11}{12}\pi i$ e	$-\frac{11}{12}\pi i$ e	III
8	$\overline{V\xi_1}$	$\overline{Vs+1}$	$\begin{smallmatrix} 111 \\ 111 \end{smallmatrix}$	0	-1	III	0	-1	III
9	$\overline{V\xi_2}$	$\overline{Vs-1}$	$\begin{smallmatrix} 100 \\ 111 \end{smallmatrix}$	1	0	$\begin{smallmatrix} I & II \\ III & IV \end{smallmatrix}$	1	0	$\begin{smallmatrix} I & II \\ III & IV \end{smallmatrix}$
10	$\overline{V\xi_3}$	$\overline{Vs+i}$	$\begin{smallmatrix} 010 \\ 110 \end{smallmatrix}$	-i	0	$\begin{smallmatrix} I & II \\ III & IV \end{smallmatrix}$	-i	0	$\begin{smallmatrix} I & II \\ III & IV \end{smallmatrix}$
11	$\overline{V\gamma^0_1}$	$\overline{Vs-z+\varepsilon}$	$\begin{smallmatrix} 001 \\ 111 \end{smallmatrix}$	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	$\frac{11}{12}\pi i$ e	I	$-\frac{11}{12}\pi i$ e	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	IV
12	$\overline{V\gamma_1}$	$\overline{Vs-z-\varepsilon}$	$\begin{smallmatrix} 110 \\ 100 \end{smallmatrix}$	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	$\frac{11}{12}\pi i$ e	I	$\frac{11}{12}\pi i$ e	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	IV
13	$\overline{V\gamma'_1}$	$\overline{Vs-iz-\varepsilon'}$	$\begin{smallmatrix} 110 \\ 011 \end{smallmatrix}$	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	$\frac{5}{12}\pi i$ e	II	$-\frac{11}{12}\pi i$ e	$-\frac{11}{12}\pi i$ e	I
14	$\overline{V\gamma''_1}$	$\overline{Vs-iz+\varepsilon'}$	$\begin{smallmatrix} 010 \\ 011 \end{smallmatrix}$	$-\frac{5}{12}\pi i$ e	$\frac{5}{12}\pi i$ e	II	$\frac{11}{12}\pi i$ e	$-\frac{11}{12}\pi i$ e	I

15	$\sqrt{\gamma^{\circ 2}}$	$\sqrt{s-z+\varepsilon'}$	$\begin{smallmatrix} 010 \\ 111 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	IV	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	I
16	$\sqrt{\gamma^{\circ 2}}$	$\sqrt{s-z-\varepsilon'}$	$\begin{smallmatrix} 101 \\ 100 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	IV	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	I
17	$\sqrt{\gamma'^2}$	$\sqrt{s+iz+\varepsilon}$	$\begin{smallmatrix} 101 \\ 011 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -\frac{5}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	III	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{11}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	IV
18	$\sqrt{\gamma''^2}$	$\sqrt{s+iz-\varepsilon}$	$\begin{smallmatrix} 001 \\ 011 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -\frac{5}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	III	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{11}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	IV
19	$\sqrt{\gamma^{\circ 3}}$	$\sqrt{s+z-\varepsilon'}$	$\begin{smallmatrix} 100 \\ 110 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	II	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	III
20	$\sqrt{\gamma^{\circ 3}}$	$\sqrt{s+z+\varepsilon'}$	$\begin{smallmatrix} 011 \\ 101 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	II	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	III
21	$\sqrt{\gamma'^3}$	$\sqrt{s-iz-\varepsilon}$	$\begin{smallmatrix} 011 \\ 010 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -\frac{5}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	I	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{11}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	II
22	$\sqrt{\gamma''^3}$	$\sqrt{s-iz+\varepsilon}$	$\begin{smallmatrix} 111 \\ 010 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{5}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -\frac{5}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	I	$\begin{smallmatrix} -\frac{11}{12}\pi i \\ -e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \frac{11}{12}\pi i \\ e \end{smallmatrix}$	II
23	$\sqrt{\xi_4}$	$\sqrt{s-i}$	$\begin{smallmatrix} 110 \\ 101 \end{smallmatrix}$	0	i	II	0	i	II
24	$\sqrt{\xi_5}$	$\sqrt{s+\varepsilon'z}$	$\begin{smallmatrix} 110 \\ 010 \end{smallmatrix}$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon'$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon'$	II	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon'$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon'$	II
25	$\sqrt{\xi_6}$	$\sqrt{s-\varepsilon z}$	$\begin{smallmatrix} 010 \\ 010 \end{smallmatrix}$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon$	I	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon$	I
26	$\sqrt{x_4}$	$\sqrt{s+i}$	$\begin{smallmatrix} 101 \\ 110 \end{smallmatrix}$	0	$-i$	IV	0	$-i$	IV
27	$\sqrt{x_5}$	$\sqrt{s-\varepsilon'z}$	$\begin{smallmatrix} 101 \\ 001 \end{smallmatrix}$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon'$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon'$	IV	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon'$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = \varepsilon'$	IV
28	$\sqrt{x_6}$	$\sqrt{s+\varepsilon z}$	$\begin{smallmatrix} 001 \\ 001 \end{smallmatrix}$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon$	III	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon$	∞ de sorte que $\frac{s}{z} = -\varepsilon$	III

$$\eta = \frac{y-1}{y+1}, \quad d\eta = \frac{2dy}{(y+1)^2},$$

d'où il suit

$$w_1 = \sqrt{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^4 + 6y^2 + 1}} = \sqrt{2} \int \frac{dy}{\sqrt{[y^2 + (\sqrt{2} + 1)^2][y^2 + (\sqrt{2} - 1)^2]}}$$

puis

$$y = (\sqrt{2} + 1) \cotg \varphi, \quad dy = -(\sqrt{2} + 1) \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi},$$

ce qui conduit à la forme

$$\begin{aligned} w_1 &= -\sqrt{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 \cos^2 \varphi + (\sqrt{2} - 1)^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= -\sqrt{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 - 4\sqrt{2} \sin^2 \varphi}} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}\right)^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Afin de transformer cette dernière intégrale en une autre dont le module est plus petit, on peut employer la substitution de Landen, soit la formule

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \varphi) = \frac{1 + k_1}{2} F(k_1, \varphi_1),$$

dans laquelle les amplitudes φ et φ_1 sont reliées par l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = k' \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{où } k' = \sqrt{1 - k^2}$$

et le nouveau module

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}.$$

Appliquées au cas actuel, où

$$k = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}, \quad k' = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

ces formules donnent

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } w_1 = -\frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_1}}.$$

Pour faciliter la détermination des limites, voici encore une fois la série des substitutions employées :

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i} \frac{z}{s} = e^{\frac{1}{4}\pi i} \frac{z}{\sqrt[4]{1-z^4}}, \quad \eta = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \zeta, \quad y = \frac{1+\eta}{1-\eta},$$

$$\cotg \varphi = \frac{y}{\sqrt{2}+1}, \quad \tg(\varphi_1 - \varphi) = (\sqrt{2}-1)^2 \tg \varphi.$$

Ceci posé, on trouve, par exemple, en désignant par ∞ le point à l'infini de l'axe des X positifs et, d'une manière analogue, par $\varepsilon.\infty$ le point à l'infini de la droite $y=x$ du côté des X positifs :

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^5}} = \varepsilon' \int_0^{\varepsilon.\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}} = \int_0^\infty \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}} = \\ &= \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}} + \int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}}. \end{aligned}$$

Si, dans la dernière intégrale, on remplace η par $\frac{1}{\eta}$, on remarque que

$$\int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}},$$

par conséquent

$$K_1 = 2 \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt[4]{1+\eta^4}}.$$

Aux limites 0 et 1 de η correspondent les limites 1 et ∞ de y , $\arctg(\sqrt{2}+1)$ et 0 de φ . Reste encore à déterminer celles de φ_1 . A l'aide de l'équation

$$\tg(\varphi_1 - \varphi) = (\sqrt{2}-1)^2 \tg \varphi,$$

dont on tire

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1 + (\sqrt{2} + 1)^2}{1 - (\sqrt{2} - 1)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

il vient $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ pour $\operatorname{tg} \varphi = (\sqrt{2} + 1)$ et $\varphi_1 = 0$ pour $\varphi = 0$, de sorte que

$$K_1 = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_1}}.$$

$$w_2 = \int \frac{z dz}{\sqrt[4]{(1 - z^4)^5}}.$$

En introduisant s comme variable d'intégration, on a immédiatement

$$z = \sqrt{1 - s^4}, dz = -\frac{s^3 ds}{(1 - s^4)^{\frac{3}{4}}} \text{ et } w_2 = -\int \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}}.$$

Puis la substitution

$$s = \cos \varphi, ds = -\sin \varphi d\varphi$$

donne

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Il s'ensuit, par exemple,

$$K_2 = \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt[4]{(1 - z^4)^5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

$$w_3 = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}.$$

Il suffit de poser

$$z = \cos \varphi, dz = -\sin \varphi d\varphi$$

pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale

$$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

On en tire

$$K_3 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

Ainsi, on vient de trouver

$$K_2 = K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

Valeur numérique de K_1 .

En vue d'une représentation qui sera faite ultérieurement, il est utile de connaître la valeur numérique de K_1 . Pour la déterminer, on peut se servir de la méthode de Gauss.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(a, b, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

et que l'on soumette cette fonction n fois de suite à la transformation de Landen, il vient

$$\begin{aligned} f(a, b, \varphi) &= \frac{1}{2} f(a_1, b_1, \varphi_1) = \frac{1}{2^2} f(a_2, b_2, \varphi_2) = \dots \\ &= \frac{1}{2^n} f(a_n, b_n, \varphi_n), \text{ où} \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg} \varphi_1,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2} \operatorname{tg} \varphi_2,$$

.