Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Transformation des intégrales w1, w2, w3
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

et pour contrôle

$$(\sqrt{\xi_2})=\binom{100}{111},\ (\sqrt{\xi_3})=\binom{010}{110},\ (\sqrt{\xi_1})=\binom{111}{111},\ (\sqrt{\xi_4})=\binom{110}{101},\ (\sqrt{x_4})=\binom{101}{110},$$

$$(\sqrt{\gamma^{\circ}_3})=\binom{100}{110},\ (\sqrt{\gamma_3})=\binom{011}{101},\ (\sqrt{\gamma''_2})=\binom{001}{011},\ (\sqrt{\gamma'_2})=\binom{101}{011}.$$

On est maintenant en état de dresser le tableau suivant, contenant les 28 fonctions abéliennes avec leurs caractéristiques et leurs zéros (voir p. 142 et 143 ci-après).

Transformation des intégrales w_1, w_2, w_3.

Avant de continuer cette étude, il est bon de soumettre les intégrales de première espèce à un examen un peu plus attentif.

$$w_1 = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}$$

On peut d'abord transformer l'intégrale proposée au moyen de la fonction

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\frac{z}{s}.$$

Il vient successivement

$$z = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\,\frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},\quad s = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},\quad dz = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\,\frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}},$$

$$w_1 = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

La substitution

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\eta$$

donne ensuite

$$w_1 = \int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale de Legendre, on posera en premier lieu

Nos	Notat.	Expression.	Caract.	z_1	s_1	Nappe.	z_2	s_2	Nappe.
1	$\sqrt{x_1}$	$\sqrt{s-1}$	100 100	0	1	I	0	1	I
2	$\sqrt{x_2}$	$\sqrt{z+1}$	111 100	-1	0	I II III IV	-1	0	I II III IV
3	$\sqrt{x_3}$	$\sqrt{z-i}$	001 101	i	0	I II III IV	i	0	I II III IV
4	$\sqrt{g^\circ}$	$\sqrt{s+z-\varepsilon}$	100 101	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	III	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	II
5	$\sqrt{g}$	$\sqrt{s+z+\varepsilon}$	011 110	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	III	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	II
6	$\sqrt{g'}$	$\sqrt{s+iz+\varepsilon'}$	011 001	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	IV	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	III
7	$\sqrt{g''}$	$\sqrt{s+iz-\varepsilon'}$	111 001	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	IV	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	III
8	$\sqrt{\xi_1}$	$\sqrt{s+1}$	111 111	0	-1	III	0	-1	III
9	$\sqrt{\xi_2}$	$\sqrt{z-1}$	100 111	1	0	I II III IV	1	0	I II III IV
10	$\sqrt{\xi_3}$	$\sqrt{z+i}$	010 110	$-i$	0	I II III IV	$-i$	0	I II III IV
11	$\sqrt{\gamma^\circ_1}$	$\sqrt{s-z+\varepsilon}$	001 111	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	I	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	IV
12	$\sqrt{\gamma_1}$	$\sqrt{s-z-\varepsilon}$	110 100	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	I	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	IV
13	$\sqrt{\gamma'_1}$	$\sqrt{s-iz-\varepsilon'}$	110 011	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	II	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	I
14	$\sqrt{\gamma''_1}$	$\sqrt{s-iz+\varepsilon'}$	010 011	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	II	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	I

15	$\sqrt{\gamma^{\circ}_2}$	$\sqrt{s-z+\varepsilon'}$	010 111	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	IV	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	I
16	$\sqrt{\gamma_2}$	$\sqrt{s-z-\varepsilon'}$	101 100	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	IV	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	I
17	$\sqrt{\gamma'_2}$	$\sqrt{s+iz+\varepsilon}$	101 011	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	III	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	IV
18	$\sqrt{\gamma''_2}$	$\sqrt{s+iz-\varepsilon}$	001 011	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	III	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	IV
19	$\sqrt{\gamma^{\circ}_3}$	$\sqrt{s+z-\varepsilon'}$	100 110	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	II	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	III
20	$\sqrt{\gamma_3}$	$\sqrt{s+z+\varepsilon'}$	011 101	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	II	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	III
21	$\sqrt{\gamma'_3}$	$\sqrt{s-iz-\varepsilon}$	011 010	$e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$-e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	I	$e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$-e^{\frac{11}{12}\pi i}$	II
22	$\sqrt{\gamma''_3}$	$\sqrt{s-iz+\varepsilon}$	111 010	$-e^{\frac{5}{12}\pi i}$	$e^{-\frac{5}{12}\pi i}$	I	$-e^{-\frac{11}{12}\pi i}$	$e^{\frac{11}{12}\pi i}$	II
23	$\sqrt{\xi_4}$	$\sqrt{s-i}$	110 101	0	i	II	0	i	II
24	$\sqrt{\xi_5}$	$\sqrt{s+\varepsilon' z}$	110 010	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=-\varepsilon'$		II	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=-\varepsilon'$		II
25	$\sqrt{\xi_6}$	$\sqrt{s-\varepsilon z}$	010 010	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=\varepsilon$		I	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=\varepsilon$		I
26	$\sqrt{x_4}$	$\sqrt{s+i}$	101 110	0	$-i$	IV	0	$-i$	IV
27	$\sqrt{x_5}$	$\sqrt{s-\varepsilon' z}$	101 001	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=\varepsilon'$		IV	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=\varepsilon'$		IV
28	$\sqrt{x_6}$	$\sqrt{s+\varepsilon z}$	001 001	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=-\varepsilon$		III	∞ de sorte que $\frac{s}{z}=-\varepsilon$		III

$$\eta = \frac{y-1}{y+1}, \qquad d\eta = \frac{2dy}{(y+1)^2},$$

d'où il suit

$$w_1 = \sqrt{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^4+6y^2+1}} = \sqrt{2}\int \frac{dy}{\sqrt{[y^2+(\sqrt{2}+1)^2][y^2+(\sqrt{2}-1)^2]}}$$

puis

$$y = (\sqrt{2}+1)\operatorname{cotg}\varphi,\ dy = -(\sqrt{2}+1)\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi},$$

ce qui conduit à la forme

$$w_1 = -\sqrt{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2\cos^2\varphi + (\sqrt{2}-1)^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= -\sqrt{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2}\sin^2\varphi}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+1}\right)^2\sin^2\varphi}}.$$

Afin de transformer cette dernière intégrale en une autre dont le module est plus petit, on peut employer la substitution de Landen, soit la formule

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{F}(k,\varphi) = \frac{1+k_1}{2}\mathrm{F}(k_1,\varphi_1),$$

dans laquelle les amplitudes φ et φ_1 sont reliées par l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = k'\operatorname{tg}\varphi,\ \text{où}\ k' = \sqrt{1-k^2}$$

et le nouveau module

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

Appliquées au cas actuel, où

$$k = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}+1}, \qquad k' = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

ces formules donnent

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } w_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}}.$$

Pour faciliter la détermination des limites, voici encore une fois la série des substitutions employées :

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{z}{s} = e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{z}{\sqrt[4]{1-z^4}},\ \eta = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\zeta,\ y = \frac{1+\eta}{1-\eta},$$

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{y}{\sqrt{2}+1},\ \operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = (\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}\varphi.$$

Ceci posé, on trouve, par exemple, en désignant par ∞ le point à l'infini de l'axe des X positifs et, d'une manière analogue, par $\varepsilon.\infty$ le point à l'infini de la droite $y=x$ du côté des X positifs :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = \varepsilon' \int_0^{\varepsilon.\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} = \int_0^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} + \int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Si, dans la dernière intégrale, on remplace η par $\frac{1}{\eta}$, on remarque que

$$\int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}},$$

par conséquent

$$K_1 = 2\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Aux limites 0 et 1 de η correspondent les limites 1 et ∞ de y, arctg $(\sqrt{2}+1)$ et 0 de φ. Reste encore à déterminer celles de φ_1. A l'aide de l'équation

$$\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) = (\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}\varphi,$$

dont on tire

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1+(\sqrt{2}+1)^2}{1-(\sqrt{2}-1)^2\operatorname{tg}^2\varphi}.\operatorname{tg}\varphi,$$

il vient $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ pour $\operatorname{tg}\varphi = (\sqrt{2}+1)$ et $\varphi_1 = 0$ pour $\varphi = 0$, de sorte que

$$K_1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1}}.$$

$$w_2 = \int\frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}.$$

En introduisant s comme variable d'intégration, on a immédiatement

$$z = \sqrt{1-s^4}, dz = -\frac{s^3ds}{(1-s^4)^{\frac{3}{4}}} \text{ et } w_2 = -\int\frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}.$$

Puis la substitution

$$s = \cos\varphi,\ ds = -\sin\varphi\, d\varphi$$

donne

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Il s'ensuit, par exemple,

$$K_2 = \int_0^1\frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1.$$

$$w_3 = \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Il suffit de poser

$$z = \cos\varphi,\ dz = -\sin\varphi\, d\varphi$$

pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale

$$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

On en tire

$$K_3 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1.$$

Ainsi, on vient de trouver

$$K_2 = K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1.$$

Valeur numérique de K_1.

En vue d'une représentation qui sera faite ultérieurement, il est utile de connaître la valeur numérique de K_1. Pour la déterminer, on peut se servir de la méthode de Gauss.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(a, b, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

et que l'on soumette cette fonction n fois de suite à la transformation de Landen, il vient

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{2}\, f(a_1, b_1, \varphi_1) = \frac{1}{2^2}\, f(a_2, b_2, \varphi_2) = \ldots$$
$$= \frac{1}{2^n}\, f(a_n, b_n, \varphi_n), \text{ où}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1}\operatorname{tg}\varphi_1,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2+b_2), \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2}\operatorname{tg}\varphi_2,$$

. . . . . .