Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 24 (1888)

Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier

Autor: Amstein, H.

Kapitel: Détermination des caractéristiques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

Détermination des caractéristiques.

Il s'agit seulement des sept caractéristiques $(\sqrt{x_1})$, $(\sqrt{x_2})$, $(\sqrt{x_3})$, $(\sqrt{g^\circ})$, $(\sqrt{g})$, $(\sqrt{g'})$, $(\sqrt{g''})$ qui forment un système complet. M. Weber, à la p. 79 de son ouvrage dit : « Lorsqu'une fonction abélienne $\sqrt{x}$ s'annule dans les mêmes points que $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)$, on appellera (ω) la caractéristique de cette fonction abélienne et on la désignera par $(\sqrt{x})$. » A ce propos, une observation importante se présente tout naturellement. De même que l'égalité de deux quotients n'entraîne pas nécessairement l'égalité des dividendes d'une part et des diviseurs d'autre part, de même l'équation

$$C\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{\vartheta_{(\omega_1)}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}{\vartheta_{(\omega_2)}\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} du_h\right)}$$

ne permet pas de conclure que la fonction $\sqrt{x_1}$ affecte exactement le système de facteurs indiqué par la caractéristique $(\sqrt{x_1})$. En effet, lorsque la variable ζ, soit le point (z, s) franchit les six coupures, les deux membres de cette équation prennent bien le même système de facteurs, mais il se peut que, dans le quotient, un certain nombre de facteurs (-1) se soient détruits. Ainsi donc, si l'on veut déterminer, par exemple, la caractéristique $(\sqrt{x_1})$, en observant combien de fois la fonction $\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}$ change de signe, lorsque ζ traverse les coupures, la combinaison de nombres, ainsi obtenue, ne donne pas directement $(\sqrt{x_1})$, mais $(\sqrt{x_1}) + (q)$, où (q) signifie une caractéristique encore inconnue, qui d'ailleurs conserve toujours la même valeur.

Il est à peine besoin de rappeler ici qu'une racine carrée change de signe toutes les fois que la variable, en parcourant une courbe fermée quelconque, contourne un des points pour lesquels la quantité sous le radical s'annule, pourvu que le zéro soit du 1er ordre ou d'une manière plus générale, d'un ordre impair. Or, franchir la coupure a_ν revient à décrire la coupure complète b_ν ; l'effet produit est évidemment le même.

Pour la fonction $\sqrt{x_2} = \sqrt{z+1}$ cette détermination est très simple, attendu que dans ce cas la surface de Riemann T′ fournit tous les éléments nécessaires. En effet, il suffit d'observer combien de fois chacune des coupures contourne le point $z = -1$. Un coup d'œil, jeté sur les fig. 8^a..... 8^f, montre que

la coupure	a_1	fait 2 contours,	la coupure	b_1	fait 0 contour
»	a_2	» 1 contour,	»	b_2	» 0 »
»	a_3	» 0 »	»	b_3	» 1 »

En réduisant encore ces nombres à 0 et 1 (mod. 2), on a ainsi

$$(\sqrt{x_2}) + (q) = \binom{001}{010}.$$

D'une manière analogue le point $z = i$ donne

$$(\sqrt{x_3}) + (q) = \binom{111}{011}.$$

Pour faciliter le contrôle ultérieur on peut ajouter

$$(\sqrt{\xi_2}) + (q) = \binom{010}{001}, \quad \text{fonction } \sqrt{z-1}, \quad \text{point } z = 1,$$

$$(\sqrt{\xi_3}) + (q) = \binom{100}{000}, \quad \text{»} \quad \sqrt{z+i}, \quad \text{»} \quad z = -i,$$

Afin d'obtenir la caractéristique de $\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}$, il est utile de représenter les six coupures au moyen de la fonction $s = \sqrt[4]{1-z^4}$. D'après ce qui précède, cette représentation n'offre aucune difficulté. Cependant, il n'est peut-être pas superflu de rappeler que, pour la fonction s, le point $z = 0$ est un point singulier *(Windungspunkt)*, en ce sens qu'à un circuit de z autour de ce point correspondent quatre circuits de s autour du point $s = 1$. En d'autres termes, dans le voisinage de ce point, les angles de l'image sont 4 fois aussi grands que les angles correspondants de l'original. On le reconnaît aisément à l'aide du développement

$$s - 1 = -\frac{1}{4} z^4 \ldots$$

Il va de soi qu'il faudra tenir compte des différentes nappes dans lesquelles le point z peut se mouvoir. Les fig. 9^a... 9^f, ainsi établies (les chiffres appliqués sur ces contours se rapportent aux points correspondants du plan (z)), on observera combien de fois chacune de ces courbes contourne le point $s = 1$. De cette manière, on trouve

$$(\sqrt{x_1}) + (q) = \binom{010}{010}.$$

Les mêmes figures donnent encore, pour contrôle

$$(\sqrt{\xi_1}) + (q) = \binom{001}{001}, \quad \text{fonction } \sqrt{s+1}, \quad \text{point } s = -1,$$

$$(\sqrt{\xi_4}) + (q) = \binom{000}{011}, \quad \text{»} \quad \sqrt{s-i}, \quad \text{»} \quad s = i,$$

$$(\sqrt{x_4}) + (q) = \binom{011}{000}, \quad \text{»} \quad \sqrt{s+i}, \quad \text{»} \quad s = -i.$$

La représentation des six coupures sur un plan (u), à l'aide de la fonction $u = s + z$, conduira facilement à la caractéristique de $\sqrt{g^0} = \sqrt{s+z-\varepsilon}$, car cette fonction ne peut évidemment s'annuler que pour $s + z = \varepsilon$.

Si l'on écrit

$$u = z + m\sqrt[4]{1 - z^4},$$

m prendra les valeurs ± 1, $\pm i$, suivant la nappe et le bord sur lequel le point z se meut. A cet égard, les fig. 2 et 3 fournissent tous les renseignements nécessaires. Pour plus de facilité on pourra se servir du petit tableau suivant :

Bord		$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
Chemin parcouru par z		01	01	$0i$	$0i$	$0-1$	$0-1$	$0-i$	$0-i$
Facteur de s dans la nappe	I	1	i	i	-1	-1	$-i$	$-i$	1
	II	i	-1	-1	$-i$	$-i$	1	1	i
	III	-1	$-i$	$-i$	1	1	i	i	-1
	IV	$-i$	1	1	i	i	-1	-1	$-i$

Par exemple, lorsque z longe le bord négatif de l'axe $0i$ dans la 4^{me} nappe, la racine $\sqrt[4]{1 - z^4}$ affecte le facteur i. Il est à remarquer, en outre, que pour la fonction u les points $z = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, $z = \pm i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ sont des points singuliers tels que, dans le voisinage des points correspondants $u = \pm 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, $u = \pm 2i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, les angles de l'image sont le double de ceux de l'original, car on a les développements

$$u - 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = -6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z - \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \ldots \text{ si } s \text{ prend le facteur } 1,$$

$$u - 2i\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = 6i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z - i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \ldots \text{ si } s \quad » \quad » \quad i,$$

$$u + 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z + \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \ldots \text{ si } s \quad » \quad » \quad -1,$$

$$u + 2i\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = -6i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z + i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \ldots \text{ si } s \quad » \quad » \quad -i.$$

Dans les fig. 10^a... 10^f, construites d'après ces indications, les points marqués $\pm n$, $\pm ni$ répondent aux points singuliers $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, $\pm i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ de l'original. Maintenant on voit immédiatement que

$$(\sqrt{g^\circ}) + (q) = \binom{010}{011}, \quad \text{fonction } \sqrt{s + z - \varepsilon}, \quad \text{point } u = \varepsilon,$$

$$(\sqrt{g}) + (q) = \binom{101}{000}, \quad » \quad \sqrt{s + z + \varepsilon}, \quad » \quad u = -\varepsilon,$$

et pour contrôle

$$(\sqrt{\gamma^\circ_3}) + (q) = \binom{010}{000}, \quad \text{fonction } \sqrt{s + z - \varepsilon'}, \quad \text{point } u = \varepsilon',$$

$$(\sqrt{\gamma_3}) + (q) = \binom{101}{011}, \quad » \quad \sqrt{s + z + \varepsilon'}, \quad » \quad u = -\varepsilon'.$$

En dernier lieu, il s'agit de trouver les caractéristiques des fonctions $\sqrt{g'} = \sqrt{s + iz + \varepsilon'}$ et $\sqrt{g''} = \sqrt{s + iz - \varepsilon'}$. La voie suivie déjà deux fois conduit encore au but, c'est-à-dire qu'on représentera les six coupures sur un plan (v) moyennant la fonction

$$v = s + iz = iz + m\sqrt[4]{1 - z^4}.$$

Au sujet du facteur m, l'observation relative au cas précédent est encore applicable. La fonction v présente les mêmes singularités que la fonction u, avec les modifications qui ressortent des développements

$$v - 2i\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = -6i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z - \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \dots \text{ si } s \text{ prend le facteur } i,$$

$$v + 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = -6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z - i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \dots \text{ si } s \quad » \quad » \quad -1,$$

$$v + 2i\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = 6i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z + \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \dots \text{ si } s \quad » \quad » \quad -i,$$

$$v - 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(z + i\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 \dots \text{ si } s \quad » \quad » \quad 1.$$

Enfin, les fig. $11^a \dots 11^f$ donnent immédiatement

$$(\sqrt{g'}) + (q) = \binom{101}{111}, \quad \text{fonction } \sqrt{s+iz+\varepsilon'}, \quad \text{point } v = -\varepsilon',$$

$$(\sqrt{g''}) + (q) = \binom{001}{111}, \quad » \quad \sqrt{s+iz-\varepsilon'}, \quad » \quad v = \varepsilon',$$

$$(\sqrt{\gamma''_2}) + (q) = \binom{111}{101}, \quad » \quad \sqrt{s+iz-\varepsilon}, \quad » \quad v = \varepsilon,$$

$$(\sqrt{\gamma'_2}) + (q) = \binom{011}{101}, \quad » \quad \sqrt{s+iz+\varepsilon}, \quad » \quad v = -\varepsilon.$$

En résumé, on vient de trouver

$$(\sqrt{x_1}) + (q) = \binom{010}{010}, \ (\sqrt{x_2}) + (q) = \binom{001}{010}, \ (\sqrt{x_3}) + (q) = \binom{111}{011},$$

$$(\sqrt{g^\circ}) + (q) = \binom{010}{011}, \ (\sqrt{g}) + (q) = \binom{101}{000}, \ (\sqrt{g'}) + (q) = \binom{101}{111},$$

$$(\sqrt{g''}) + (q) = \binom{001}{111}$$

et pour contrôle

$$(\sqrt{\xi_2}) + (q) = \binom{010}{001}, \ (\sqrt{\xi_3}) + (q) = \binom{100}{000}, \ (\sqrt{\xi_1}) + (q) = \binom{001}{001},$$

$$(\sqrt{\xi_4}) + (q) = \binom{000}{011}, \ (\sqrt{x_4}) + (q) = \binom{011}{000}, \ (\sqrt{\gamma_3{}^\circ}) + (q) = \binom{010}{000},$$

$$(\sqrt{\gamma_3}) + (q) = \binom{101}{011}, \ (\sqrt{\gamma''_3}) + (q) = \binom{111}{101}, \ (\sqrt{\gamma'_2}) + (q) = \binom{011}{101}.$$

Afin d'obtenir finalement la caractéristique $(\sqrt{x_1})$ et avec elle (q) et toutes les autres, on peut former les 6 groupes

$$(\sqrt{x_1 x_2}), \ (\sqrt{x_1 x_3}), \ \sqrt{x_1 g^\circ}), \ \sqrt{x_1 g}), \ \sqrt{x_1 g'}), \ \sqrt{x_1 g''}).$$

Evidemment, ceux-ci ont une seule caractéristique commune, à savoir $(\sqrt{x_1})$ qui, de ce fait, est parfaitement déterminée. Or, les tables de M. W. (p. 180 et suiv.), donnent

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x_1 x_2}) &= \binom{010}{010} + \binom{001}{010} = \binom{011}{000} = \underbrace{\binom{100}{100}}_{1} + \binom{111}{100} = \binom{100}{111} + \underbrace{\binom{111}{111}}_{2} = \underbrace{\binom{010}{011}}_{3} + \\
&+ \binom{001}{011} = \binom{010}{111} + \underbrace{\binom{001}{111}}_{4} = \binom{101}{100} + \underbrace{\binom{110}{100}}_{5} = \binom{101}{011} + \underbrace{\binom{110}{011}}_{6},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x_1 x_3}) &= \binom{010}{010} + \binom{111}{011} = \binom{101}{001} = \underbrace{\binom{100}{100}}_{1} + \binom{001}{101} = \binom{100}{110} + \underbrace{\binom{001}{111}}_{4} = \binom{010}{110} + \\
&+ \underbrace{\binom{111}{111}}_{2} = \underbrace{\binom{010}{011}}_{3} + \binom{111}{010} = \binom{011}{010} + \underbrace{\binom{110}{011}}_{6} = \binom{011}{101} + \underbrace{\binom{110}{100}}_{5},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x_1 g^\circ}) &= \binom{010}{010} + \binom{010}{011} = \binom{000}{001} = \underbrace{\binom{100}{100}}_{1} + \binom{100}{101} = \binom{100}{110} + \binom{100}{111} = \binom{010}{010} + \\
&+ \underbrace{\binom{010}{011}}_{3} = \binom{010}{110} + \binom{010}{111} = \underbrace{\binom{110}{100}}_{5} + \binom{110}{101} = \binom{110}{010} + \underbrace{\binom{110}{011}}_{6},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x_1 g}) &= \binom{010}{010} + \binom{101}{000} = \binom{111}{010} = \underbrace{\binom{100}{100}}_{1} + \binom{011}{110} = \binom{100}{111} + \binom{011}{101} = \binom{010}{110} + \\
&+ \binom{101}{100} = \underbrace{\binom{010}{011}}_{3} + \binom{101}{001} = \binom{001}{001} + \underbrace{\binom{110}{011}}_{6} = \underbrace{\binom{001}{111}}_{4} + \binom{110}{101},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x_1 g'}) &= \binom{010}{010} + \binom{101}{111} = \binom{111}{101} = \underbrace{\binom{100}{100}}_{1} + \binom{011}{001} = \binom{100}{111} + \binom{011}{010} = \binom{010}{110} + \\
&+ \binom{101}{011} = \underbrace{\binom{010}{011}}_{3} + \binom{101}{110} = \binom{001}{001} + \underbrace{\binom{110}{100}}_{5} = \underbrace{\binom{001}{111}}_{4} + \binom{110}{010},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x_1 g''}) &= \binom{010}{010} + \binom{001}{111} = \binom{011}{101} = \underbrace{\binom{100}{100}}_{1} + \binom{111}{001} = \binom{100}{111} + \binom{111}{010} = \binom{010}{010} + \\
&+ \underbrace{\binom{001}{111}}_{4} = \binom{010}{110} + \binom{001}{011} = \binom{101}{001} + \underbrace{\binom{110}{100}}_{5} = \binom{101}{110} + \underbrace{\binom{110}{011}}_{6},
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit $$(\sqrt{x_1}) = \binom{100}{100}$$

et par conséquent $(q) = \binom{110}{110}$, $(p) = \sum_1^7 (\beta_i) = \binom{001}{110}$.

On a ainsi

$$
\begin{gathered}
(\sqrt{x_1}) = \binom{100}{100}, \quad (\sqrt{x_2}) = \binom{111}{100}, \quad (\sqrt{x_3}) = \binom{001}{101}, \quad (\sqrt{g^\circ}) = \binom{100}{101}, \\
(\sqrt{g}) = \binom{011}{110}, \quad (\sqrt{g'}) = \binom{011}{001}, \quad (\sqrt{g''}) = \binom{111}{001}
\end{gathered}
$$

et pour contrôle

$$(\sqrt{\xi_2})=\binom{100}{111},\ (\sqrt{\xi_3})=\binom{010}{110},\ (\sqrt{\xi_1})=\binom{111}{111},\ (\sqrt{\xi_4})=\binom{110}{101},\ (\sqrt{x_4})=\binom{101}{110},$$

$$(\sqrt{\gamma^\circ{}_3})=\binom{100}{110},\ (\sqrt{\gamma_3})=\binom{011}{101},\ (\sqrt{\gamma''{}_2})=\binom{001}{011},\ (\sqrt{\gamma'{}_2})=\binom{101}{011}.$$

On est maintenant en état de dresser le tableau suivant, contenant les 28 fonctions abéliennes avec leurs caractéristiques et leurs zéros (voir p. 142 et 143 ci-après).

Transformation des intégrales $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$.

Avant de continuer cette étude, il est bon de soumettre les intégrales de première espèce à un examen un peu plus attentif.

$$w_1 = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}$$

On peut d'abord transformer l'intégrale proposée au moyen de la fonction

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\frac{z}{s}.$$

Il vient successivement

$$z = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},\quad s = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},\quad dz = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}},$$

$$w_1 = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\int\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

La substitution

$$\zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i}\eta$$

donne ensuite

$$w_1 = \int\frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^4}}.$$

Pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale de Legendre, on posera en premier lieu