Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Fonctions abéliennes correspondant à un système complet de caractéristiques impaires
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

$$z_1 = e^{\frac{5}{12}\pi i}, \quad s_1 = e^{-\frac{11}{12}\pi i},$$

$$z_2 = e^{-\frac{11}{12}\pi i}, \quad s_2 = e^{\frac{5}{12}\pi i},$$

Reste à savoir dans quelles nappes de la surface T′ ces points se trouvent. A cet effet, on remarque aisément, à l'aide des fig. 2 et 3, que si $z_1 = e^{\frac{5}{12}\pi i}$ était pris dans la 1re nappe, la valeur correspondante de s serait $s = e^{\frac{7}{12}\pi i}$. Or,

$$s_1 = is = e^{\frac{6}{12}\pi i} e^{\frac{7}{12}\pi i} = e^{\frac{13}{12}\pi i} = e^{-\frac{11}{12}\pi i}.$$

Il s'ensuit que le point z_1 est situé dans la 2e nappe. D'une manière analogue, on reconnaît que le point z_2 se trouve dans la 3e nappe.

Plus loin, lorsque cette étude sera un peu plus avancée, tout ce qui concerne les 28 fonctions abéliennes sera réuni dans un tableau. Incidemment, on peut constater dès à présent que leurs 56 zéros se répartissent également sur les quatre nappes de la surface T′.

Fonctions abéliennes correspondant à un système complet de caractéristiques impaires.

La théorie des caractéristiques, traitée complètement dans l'ouvrage de M. Weber (p. 17 à 33), est supposée connue. A chaque tangente double on peut adjoindre une des 28 caractéristiques impaires. Une caractéristique paire quelconque (p) est accompagnée de 8 systèmes complets de 7 caractéristiques impaires. Les tangentes doubles répondant à un tel système se distinguent par la propriété que jamais les six points de contact de trois d'entre elles ne sont situés sur une conique. Dans la théorie générale, on a la facilité d'attribuer à ces tangentes un système complet quelconque de caractéristiques impaires. Il n'en est plus de même lorsque l'équation de la courbe du 4e degré et ses 28 tangentes doubles sont connues et que l'on a fait choix de la surface T′. Dans ce cas, la difficulté essentielle consiste précisément à trouver 7 tangentes doubles et leurs caractéristiques satisfaisant à la condition indiquée. Ce problème résolu, les caractéristiques des 21 autres tangentes doubles sont données par la théorie générale. Voici de quelle manière on peut arriver à la solution désirée. (Comp. Riemann, p. 460 et suiv.)

D'après Riemann et Weber (p. 82), il est possible de mettre l'équation de la courbe du 4e degré sous la forme

$$f^2 - x_1\xi_1 x_2\xi_2 = 0,$$

$f = 0$ désignant l'équation d'une conique, et $x_1 = 0$, $\xi_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\xi_2 = 0$, exprimées en fonction des coordonnées z et s, celles de quatre tangentes doubles à la courbe proposée, telles que leurs points de contact se trouvent sur la conique $f = 0$. Or,

$$s - 1 = 0, \quad s + 1 = 0, \quad z - 1 = 0, \quad z + 1 = 0$$

représentent évidemment quatre tangentes doubles dont les points de contact sont situés sur la circonférence

$$s^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Par conséquent, l'équation $s^4 + z^4 - 1 = 0$ peut prendre la forme

$$(s^2 + z^2 - 1)^2 - 2(s^2 - 1)(z^2 - 1) = 0.$$

Il existe six couples de tangentes doubles pour lesquels la somme des caractéristiques est la même et qui, de ce fait, constituent un groupe. Si l'on considère, par exemple,

$$s - 1 = 0, \ s + 1 = 0; \quad z - 1 = 0, \ z + 1 = 0$$

comme deux couples d'un groupe, il est intéressant de chercher les quatre autres couples du même groupe. A cet effet, il est aisé de voir que l'équation

$$\alpha^2(s^2 - 1) + \alpha(s^2 + z^2 - 1) + \frac{1}{2}(z^2 - 1) = 0,$$

où α signifie un paramètre variable, représente une conique qui touche la courbe du 4e degré en quatre points. Toutes les fois que cette conique dégénère en deux droites, on obtient un couple de tangentes doubles appartenant au même groupe, vu que leurs points de contact, de même que ceux du couple $s + 1 = 0$, $s - 1 = 0$ satisfont à l'équation

$$2\alpha(s^2 - 1) + (s^2 + z^2 - 1) = 0.$$

La condition bien connue qui entraîne la dégénération de la conique

$$a_{11}z^2 + 2a_{12}zs + a_{22}z^2 + 2a_{13}z + 2a_{23}s + a_{33} =$$

$$= \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) z^2 + \alpha(\alpha + 1) s^2 + \left(-\alpha^2 - \alpha - \frac{1}{2}\right) = 0$$

fournit la relation

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha(\alpha+1), & 0 \\ 0, & 0, & -\left(\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\alpha(\alpha + 1)\left(\alpha + \frac{1-i}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1+i}{2}\right) = 0$$

que l'on peut considérer comme une équation du 6^e degré en α dont une racine est $= \infty$. A ses six racines répondent les couples suivants :

α	Couples.	
∞	$s - 1 = 0$	$s + 1 = 0$
0	$z - 1 = 0$	$z + 1 = 0$
-1	$z - i = 0$	$z + i = 0$
$-\frac{1}{2}$	$s - i = 0$	$s + i = 0$
$\frac{-1+i}{2}$	$s - \varepsilon z = 0$	$s + \varepsilon z = 0$
$-\frac{1+i}{2}$	$s - \varepsilon' z = 0$	$s + \varepsilon' z = 0$

Ceci posé, on introduit un système de coordonnées homogènes, en choisissant pour x_1, x_2, x_3 trois tangentes doubles telles que leurs points de contact ne sont pas situés sur une conique. Les tangentes

$$x_1 = A(s - 1), \quad x_2 = B(z + 1), \quad x_3 = C(z - i)$$

remplissent cette condition, et les fonctions qui forment des couples avec les précédentes sont

$$\xi_1 = s+1, \qquad \xi_2 = z-1, \qquad \xi_3 = z+i.$$

Les constantes A, B, C doivent être déterminées de telle sorte que l'équation

$$\sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} = 0,$$

exprimée en fonction de s et de z et rendue rationnelle, produise, à un facteur constant près, l'équation donnée $s^4+z^4-1=0$. On trouve sans difficulté

$$A=1, \qquad B=\frac{1}{2}, \qquad C=-\frac{1}{2}.$$

On posera donc provisoirement

$$\begin{cases} x_1 = s-1, & x_2 = \frac{1}{2}(z+1), & x_3 = -\frac{1}{2}(z-i), \\ \xi_1 = s+1, & \xi_2 = z-1, & \xi_3 = z+i. \end{cases}$$

Or, Riemann (l. c. p. 464) et Weber (p. 91) démontrent qu'entre les six fonctions $x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ il existe quatre équations linéaires et homogènes de la forme

$$(1) \qquad \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \alpha'\xi_1 + \beta'\xi_2 + \gamma'\xi_3 = 0,$$

pourvu que les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ satisfassent aux conditions

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

Une de ces équations est alors nécessairement une conséquence des trois autres. Les quatre expressions $\sqrt{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3}$ sont les fonctions abéliennes désirées, c'est-à-dire celles qui, jointes à $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \sqrt{x_3}$ répondent à un système complet de caractéristiques impaires.

Pour les déterminer, on partira des trois équations faciles à vérifier

$$\begin{aligned} x_1 + 2(1-i)x_2 + 2(1-i)x_3 - \xi_1 &= 0, \\ 2ix_2 - 2(1-i)x_3 - \xi_2 &= 0, \\ 2(1+i)x_2 + \qquad 2ix_3 - \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

En les multipliant respectivement par l_1, l_2, l_3 et en ajoutant, il vient une nouvelle équation que l'on peut identifier avec (1):

$$l_1 x_1 + 2[l_1(1-i) + l_2 i + l_3(1+i)]x_2 +$$
$$+ 2[l_1(1-i) - l_2(1-i) + l_3 i]x_3 - l_1\xi_1 - l_2\xi_2 - l_3\xi_3 =$$
$$= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \alpha'\xi_1 + \beta'\xi_2 + \gamma'\xi_3 .$$

On en tire

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l|l} \alpha = l_1, & \alpha' = -l_1, \\ \beta = 2[l_1(1-i) + l_2 i + l_3(1+i)], & \beta' = -l_2, \\ \gamma = 2[l_1(1-i) - l_2(1-i) + l_3 i], & \gamma' = -l_3 . \end{array}\right.$$

Les conditions $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$ donnent lieu aux équations

$$-l_1^2 = -2l_2[l_1(1-i) + l_2 i + l_3(1+i)] =$$
$$= -2l_3[l_1(1-i) - l_2(1-i) + l_3 i]$$

qui, à leur tour, servent à déterminer les rapports $l_1 : l_2 : l_3$.

Soit, à cet effet,

$$l_2 = ml_1, \qquad l_3 = nl_1 .$$

Les équations précédentes, après la suppression du facteur commun $-l_1^2$ prennent maintenant la forme

$$(3)\qquad m(1-i) + m^2 i + mn(1+i) = \frac{1}{2},$$

$$(4)\qquad n(1-i) + n^2 i - mn(1-i) = \frac{1}{2}.$$

En les ajoutant il vient

$$(1-i)(m+n) + i(m^2+n^2) + 2i\,mn = 1,$$

ou bien

$$(m+n)^2 - (1+i)(m+n) + i = 0.$$

Il s'ensuit

$$m + n = \frac{1+i}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+i)^2}{4} - i} = \frac{1+i}{2} \pm \sqrt{-\frac{i}{2}} =$$
$$= \frac{1+i}{2} \pm \frac{1-i}{2},$$

soit

$$a)\quad m + n = 1, \qquad b)\quad m + n = i.$$

La substitution de $n = 1 - m$ dans l'équation (3) donne

$$m = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}},$$

tandis que $n = i - m$ fournit

$$m = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

On a ainsi les quatre couples de valeurs

$$\left\{\begin{array}{llll} m_1 = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, & m_2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, & m_3 = \frac{i}{\sqrt{2}}, & m_4 = -\frac{i}{\sqrt{2}}, \\ n_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}, & n_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}, & n_3 = i\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right), & n_4 = i\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \end{array}\right.$$

lesquelles, introduites dans les formules (2), conduisent aux systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha_1 = l_1 & \alpha'_1 = -l_1 \\ \beta_1 = 2l_1\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) & \beta'_1 = -\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) l_1 \\ \gamma_1 = -\frac{2l_1}{\sqrt{2}} & \gamma'_1 = \frac{l_1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\|$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha_2 = l_1 & \alpha'_2 = -l_1 \\ \beta_2 = 2l_1\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) & \beta'_2 = -\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) l_1 \\ \gamma_2 = \frac{2l_1}{\sqrt{2}} & \gamma'_2 = -\frac{l_1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\|$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha_3 = l_1 & \alpha'_3 = -l_1 \\ \beta_3 = -\frac{2il_1}{\sqrt{2}} & \beta'_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}} l_1 \\ \gamma_3 = -2il_1\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) & \gamma'_3 = -i\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) l_1 \end{array}\right\|$$

$$\left\{\begin{aligned}\alpha_4 &= l_1 \\ \beta_4 &= \frac{2il_1}{\sqrt{2}} \\ \gamma_4 &= -2il_1\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}\right. \quad \left|\quad \begin{aligned}\alpha'_4 &= -l_1 \\ \beta'_4 &= \frac{il_1}{\sqrt{2}} \\ \gamma'_4 &= -i\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)l_1\end{aligned}\right. \quad \|$$

Les valeurs de α, β, γ, α', β', γ' étant connues, on a maintenant aussi, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{\alpha_1 x_1+\beta_1 x_2+\gamma_1 x_3}{l_1} = -\frac{\alpha'_1\xi_1+\beta'_1\xi_2+\gamma'_1\xi_3}{l_1} =$$

$$= x_1+(2-\sqrt{2})x_2-\sqrt{2}\,x_3 = s-1+\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z+1)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}(z-i) = s+z-\frac{1+i}{\sqrt{2}} = s+z-\varepsilon$$

et de même

$$\frac{\alpha_2 x_1+\beta_2 x_2+\gamma_2 x_3}{l_1} = -\frac{\alpha'_2\xi_1+\beta'_2\xi_2+\gamma'_2\xi_3}{l_1} = s+z+\varepsilon,$$

$$\frac{\alpha_3 x_1+\beta_3 x_2+\gamma_3 x_3}{l_1} = -\frac{\alpha'_3\xi_1+\beta'_3\xi_2+\gamma'_3\xi_3}{l_1} = s+iz+\varepsilon',$$

$$\frac{\alpha_4 x_1+\beta_4 x_2+\gamma_4 x_3}{l_1} = -\frac{\alpha'_4\xi_1+\beta'_4\xi_2+\gamma'_4\xi_3}{l_1} = s+iz-\varepsilon'.$$

Ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer, les fonctions

$$x_1,\ x_2,\ x_3$$

$$g^\circ = s+z-\varepsilon,\ g = s+z+\varepsilon,\ g' = s+iz+\varepsilon',\ g'' = s+iz-\varepsilon',$$

ou, pour mieux dire, leurs racines carrées forment un système complet. Pour amener l'identité

$$g^\circ = x_1+x_2+x_3 = -(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$$

il est nécessaire de munir les fonctions x_1, x_2, x_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3 de certains facteurs constants; en d'autres termes, on remplacera

$$x_1, \qquad x_2, \qquad x_3, \qquad \xi_1, \qquad \xi_2, \qquad \xi_3,$$

par x_1, $\dfrac{x_2}{2-\sqrt{2}}$, $-\dfrac{x_3}{\sqrt{2}}$, $-\xi_1$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\xi_2$, $\sqrt{2}\,\xi_3$, de sorte que dorénavant

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 = s-1, & x_2 = \left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z+1), & x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z-i), \\ \xi_1 = -(s+1), & \xi_2 = -\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z-1), & \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z+i). \end{array}\right.$$

Ces six expressions, dans leur nouvelle acception, satisfont également à l'équation

$$\sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} = 0.$$

Cela posé, les équations (23) de M. Weber (p. 93) deviennent maintenant

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

$$\frac{\xi_1}{\alpha_1} + \frac{\xi_2}{\alpha_2} + \frac{\xi_3}{\alpha_3} + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \xi_1 + (\sqrt{2}-1)^2\xi_2 - \xi_3 +$$
$$+ x_1 + (\sqrt{2}+1)^2 x_2 - x_3 = 0,$$

$$\frac{\xi_1}{\alpha'_1} + \frac{\xi_2}{\alpha'_2} + \frac{\xi_3}{\alpha'_3} + \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3 = \xi_1 + i(\sqrt{2}-1)\xi_2 -$$
$$- i(\sqrt{2}-1)\xi_3 + x_1 - i(\sqrt{2}+1)x_2 + i(\sqrt{2}+1)x_3 = 0,$$

$$\frac{\xi_1}{\alpha''_1} + \frac{\xi_2}{\alpha''_2} + \frac{\xi_3}{\alpha''_3} + \alpha''_1 x_1 + \alpha''_2 x_2 + \alpha''_3 x_3 = \xi_1 - i(\sqrt{2}-1)\xi_2 -$$
$$- i(\sqrt{2}+1)\xi_3 + x_1 + i(\sqrt{2}+1)x_2 + i(\sqrt{2}-1)x_3 = 0.$$

On en conclut

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = (\sqrt{2}+1)^2, & \alpha_3 = -1, \\ \alpha'_1 = 1, & \alpha'_2 = -i(\sqrt{2}+1), & \alpha'_3 = i(\sqrt{2}+1), \\ \alpha''_1 = 1, & \alpha''_2 = i(\sqrt{2}+1), & \alpha''_3 = i(\sqrt{2}-1). \end{array}\right.$$

Ces quantités ont été appelées par M. Weber *modules de classe* (p. 103). Les *modules dérivés* α''_1, α''_2, α''_3 dépendent des α et α' et les formules (28), p. 95 de l'ouvrage de M. W., indiquent le moyen de les déterminer. Bien qu'il ne soit pas nécessaire de vérifier ces formules, l'esprit éprouve toujours une certaine satisfaction lorsqu'en appliquant une théorie générale à un cas particulier il arrive à des résultats prévus. C'est à ce point de vue que les quelques lignes suivantes figurent dans le présent mémoire.

Ecrivant, pour abréger,

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3 \end{vmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \alpha_1, & \frac{1}{\alpha_2}, & \frac{1}{\alpha_3} \\ \alpha'_1, & \frac{1}{\alpha'_2}, & \frac{1}{\alpha'_3} \end{vmatrix} = \left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right), \text{ etc.}$$

on trouve successivement

$$\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right) = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right) = -2\sqrt{2}(1+i)(\sqrt{2}+1),$$

$$\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right) = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right) = -2\sqrt{2}(1+i)(\sqrt{2}-1),$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3\right) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2\sqrt{2}(1-i)(\sqrt{2}+1),$$

$$\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right) = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right) = -2\sqrt{2}(1-i)(\sqrt{2}-1).$$

Ensuite

$$\frac{\alpha_2 \alpha'_2 \alpha''_2 \cdot \alpha_2 \alpha'_2 \alpha''_2 \cdot \alpha_3 \alpha'_3 \alpha''_3}{\alpha_3 \alpha'_3 \alpha''_3} =$$

$$= (\alpha_2 \alpha'_2 \alpha''_2)^2 = \frac{\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3\right)}{\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)^2 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^2}{\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)^2 \left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^4 = (\sqrt{2}+1)^8;$$

or,

$$\alpha_2 \alpha'_2 = -i(\sqrt{2}+1)^3, \quad (\alpha_2 \alpha'_2)^2 = -(\sqrt{2}+1)^6,$$

par conséquent,

$$\alpha''^2_2 = -\frac{(\sqrt{2}+1)^8}{(\sqrt{2}+1)^6} = -(\sqrt{2}+1)^2 \text{ et } \alpha''_2 = \pm i(\sqrt{2}+1).$$

De la même manière il vient

$$(\alpha_3\alpha'_3\alpha''_3)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)}{\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)} =$$

$$= \frac{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^2\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)^2}{\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)^2\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)^2} = 1,$$

mais

$$(\alpha_3\alpha'_3)^2 = -(\sqrt{2}+1)^2,$$

par conséquent,

$$\alpha_3''^2 = -(\sqrt{2}-1)^2 \quad \text{et} \quad \alpha_3'' = \pm i(\sqrt{2}-1).$$

Enfin on trouve

$$(\alpha_1\alpha'_1\alpha''_1)^2 = \frac{\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)} = 1$$

et puisque

$$(\alpha_1\alpha'_1)^2 = 1, \quad \text{on a} \quad \alpha''^2_1 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha''_1 = \pm 1.$$

Ainsi, au signe près, les modules dérivés α''_1, α''_2, α_3'', sont connus. Si, pour une raison ou pour une autre, on a choisi l'un des signes, les deux autres ne sauraient plus être douteux. En effet, soit par exemple $\alpha''_2 = +1$; alors l'égalité

$$\frac{\alpha_3\alpha'_3\alpha''_3}{\alpha_1\alpha'_1\alpha''_1} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)}{\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)} = +1$$

fournit

$$\alpha''_3 = \frac{\alpha_1\alpha'_1\alpha''_1}{\alpha_3\alpha'_3} = i(\sqrt{2}-1)$$

et

$$\frac{\alpha_1\alpha'_1\alpha''_1}{\alpha_2\alpha'_2\alpha''_2} = \frac{\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_3\right)\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3\right)\left(\frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2, \frac{1}{\alpha_3}\right)} = (\sqrt{2}-1)^4$$

donne de même

$$\alpha''_2 = \frac{\alpha_1\alpha'_1\alpha''_1}{\alpha_2\alpha'_2}(\sqrt{2}+1)^4 = i(\sqrt{2}+1).$$

Les 18 autres fonctions abéliennes.

Les 28 fonctions abéliennes ont déjà été trouvées précédemment. On fera connaître plus loin un moyen qui permet de déterminer leurs caractéristiques d'une manière directe; toutefois, dans l'intérêt de la brièveté, il est préférable d'appliquer les formules de M. W. (p. 96 et s.) qui donnent non-seulement la forme de ces fonctions, mais encore les caractéristiques correspondantes. On obtient successivement

$$\gamma_1^\circ = x_1 + \xi_2 + \xi_3 = s - 1 - \left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z-1) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}(z+i) = s - z + \varepsilon,$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha_2} + \frac{\xi_3}{\alpha_3} = s - 1 - \left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z-1) - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}}(z+i) = s - z - \varepsilon,$$

$$\gamma'_1 = \alpha'_1 x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha'_2} + \frac{\xi_3}{\alpha'_3} = s - 1 - \frac{i}{\sqrt{2}}(z-1) - \\ - i\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z+i) = s - iz - \varepsilon',$$

$$\gamma''_1 = \alpha''_1 x_1 + \frac{\xi_2}{\alpha''_2} + \frac{\xi_3}{\alpha''_3} = s - 1 + \frac{i}{\sqrt{2}}(z-1) - \\ - i\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)(z+i) = s - iz + \varepsilon',$$

$$\gamma_2{}^\circ = \xi_1 + x_2 + \xi_3 = -(s - z + \varepsilon')$$
$$\gamma_2 = \frac{\xi_1}{\alpha_1} + \alpha_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha_3} = -(s - z - \varepsilon')$$
$$\gamma'_2 = \frac{\xi_1}{\alpha'_1} + \alpha'_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha'_3} = -(s + iz + \varepsilon)$$
$$\gamma''_2 = \frac{\xi_1}{\alpha''_1} + \alpha''_2 x_2 + \frac{\xi_3}{\alpha''_3} = -(s + iz - \varepsilon)$$

$$\gamma_3{}^\circ = \xi_1 + \xi_2 + x_3 = -(s + z - \varepsilon')$$
$$\gamma_3 = \frac{\xi_1}{\alpha_1} + \frac{\xi_2}{\alpha_2} + \alpha_3 x_3 = -(s + z + \varepsilon')$$
$$\gamma'_3 = \frac{\xi_1}{\alpha'_1} + \frac{\xi_2}{\alpha'_2} + \alpha'_3 x_3 = -(s - iz - \varepsilon)$$
$$\gamma''_3 = \frac{\xi_1}{\alpha''_1} + \frac{\xi_2}{\alpha''_2} + \alpha''_3 x_3 = -(s - iz + \varepsilon).$$

Les six dernières fonctions ne peuvent être autre chose que trois des couples qu'on a déjà rencontrés p. 124. En effet

$$\xi_4 = \frac{\xi_1}{\alpha_1(1-\alpha_2\alpha_3)} + \frac{\xi_2}{\alpha_2(1-\alpha_3\alpha_1)} + \frac{\xi_3}{\alpha_3(1-\alpha_1\alpha_2)} =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(s - i),$$

$$x_4 = \frac{x_1}{1-\alpha_2\alpha_3} + \frac{x_2}{1-\alpha_3\alpha_1} + \frac{x_3}{1-\alpha_1\alpha_2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(s + i);$$

$$\xi_5 = \frac{\xi_1}{\alpha'_1(1-\alpha'_2\alpha'_3)} + \frac{\xi_2}{\alpha'_2(1-\alpha'_3\alpha'_1)} + \frac{\xi_3}{\alpha'_3(1-\alpha'_1\alpha'_2)} =$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)(s + \varepsilon' z),$$

$$x_5 = \frac{x_1}{1-\alpha'_2\alpha'_3} + \frac{x_2}{1-\alpha'_3\alpha'_1} + \frac{x_3}{1-\alpha'_1\alpha'_2} =$$
$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)(s - \varepsilon' z);$$

$$\xi_6 = \frac{\xi_1}{\alpha''_1(1-\alpha''_2\alpha''_3)} + \frac{\xi_2}{\alpha''_2(1-\alpha''_3\alpha''_1)} + \frac{\xi_3}{\alpha''_3(1-\alpha''_1\alpha''_2)} =$$
$$= -\frac{1}{2}(s - \varepsilon z),$$

$$x_6 = \frac{x_1}{1-\alpha''_2\alpha''_3} + \frac{x_2}{1-\alpha''_3\alpha''_1} + \frac{x_3}{1-\alpha''_1\alpha''_2} =$$
$$= \frac{1}{2}(s + \varepsilon z).$$

Si l'on désigne par

$$(\sqrt{x_1}) = (\beta_1), (\sqrt{x_2}) = (\beta_2), (\sqrt{x_3}) = (\beta_3), (\sqrt{g^\circ}) = (\beta_4),$$
$$(\sqrt{g}) = (\beta_5), (\sqrt{g'}) = (\beta_6), (\sqrt{g''}) = (\beta_7)$$

les sept caractéristiques impaires formant un système complet, en indiquant de cette façon en même temps la caractéristique et la fonction à laquelle elle appartient, les autres sont (W. p. 100 et 101):

$$\begin{array}{l|l}
(\sqrt{\xi_1}) = (p + \beta_2 + \beta_3) & (\sqrt{\gamma^\circ_1}) = (p + \beta_1 + \beta_4) \\
(\sqrt{\xi_2}) = (p + \beta_3 + \beta_1) & (\sqrt{\gamma_1}) = (p + \beta_1 + \beta_5) \\
(\sqrt{\xi_3}) = (p + \beta_1 + \beta_2) & (\sqrt{\gamma'_1}) = (p + \beta_1 + \beta_6) \\
 & (\sqrt{\gamma''_1}) = (p + \beta_1 + \beta_7)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
(\sqrt{\gamma^\circ_2}) = (p + \beta_2 + \beta_4) & (\sqrt{\gamma^\circ_3}) = (p + \beta_3 + \beta_4) \\
(\sqrt{\gamma_2}) = (p + \beta_2 + \beta_5) & (\sqrt{\gamma_3}) = (p + \beta_3 + \beta_5) \\
(\sqrt{\gamma'_2}) = (p + \beta_2 + \beta_6) & (\sqrt{\gamma'_3}) = (p + \beta_3 + \beta_6) \\
(\sqrt{\gamma''_2}) = (p + \beta_2 + \beta_7) & (\sqrt{\gamma''_3}) = (p + \beta_3 + \beta_7)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
(\sqrt{\xi_4}) = (p + \beta_4 + \beta_5) & (\sqrt{x_4}) = (p + \beta_6 + \beta_7) \\
(\sqrt{\xi_5}) = (p + \beta_4 + \beta_6) & (\sqrt{x_5}) = (p + \beta_7 + \beta_5) \\
(\sqrt{\xi_6}) = (p + \beta_4 + \beta_7) & (\sqrt{x_6}) = (p + \beta_5 + \beta_6)
\end{array}$$

$$(p) = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7).$$