

# Points de contact des tangentes doubles

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

on a finalement pour les 28 tangentes doubles à la courbe (1) les équations en coordonnées ponctuelles

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l} s + 1 = 0 \\ s - 1 = 0 \\ s - i = 0 \\ s + i = 0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} z + 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \\ z - i = 0 \\ z + i = 0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} s + z + \varepsilon' = 0 \\ s - z - \varepsilon' = 0 \\ s + iz + \varepsilon = 0 \\ s - iz - \varepsilon = 0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} s - z + \varepsilon' = 0 \\ s + z - \varepsilon' = 0 \\ s - iz + \varepsilon = 0 \\ s + iz - \varepsilon = 0 \end{array} \right| \\
 \\
 \left. \begin{array}{l} s - iz + \varepsilon' = 0 \\ s + iz - \varepsilon' = 0 \\ s + z + \varepsilon = 0 \\ s - z - \varepsilon = 0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} s + iz + \varepsilon' = 0 \\ s - iz - \varepsilon' = 0 \\ s - z + \varepsilon = 0 \\ s + z - \varepsilon = 0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} s + \varepsilon z = 0 \\ s - \varepsilon z = 0 \\ s + \varepsilon' z = 0 \\ s - \varepsilon' z = 0 \end{array} \right|
 \end{array}$$

**Points de contact des tangentes doubles.**

Dans la suite, on aura plus d'une fois besoin de connaître les points de contact des tangentes doubles, soit les zéros des fonctions abéliennes. Douze des 28 tangentes doubles dans l'exemple choisi présentent cette particularité que leurs deux points de contact se confondent, en sorte qu'elles forment un contact du 3<sup>e</sup> ordre avec la courbe  $s^4 + z^4 - 1 = 0$ . Ce sont les suivantes :

Tangente.	Point de contact.	Nappe.
$s + 1 = 0$	$z = 0, \quad s = -1$	III
$s - 1 = 0$	$z = 0, \quad s = 1$	I
$s - i = 0$	$z = 0, \quad s = i$	II
$s + i = 0$	$z = 0, \quad s = -i$	IV
$z + 1 = 0$	$z = -1, \quad s = 0$	D <sup>s</sup> toutes les 4.
$z - 1 = 0$	$z = 1, \quad s = 0$	
$z - i = 0$	$z = i, \quad s = 0$	
$z + i = 0$	$z = -i, \quad s = 0$	
$s + \varepsilon z = 0$	A l'infini d <sup>s</sup> la direction $-135^\circ$	III
$s - \varepsilon z = 0$	» » $45^\circ$	I
$s + \varepsilon' z = 0$	» » $+135^\circ$	II
$s - \varepsilon' z = 0$	» » $-45^\circ$	IV

Seuls les quatre derniers cas demandent une petite explication. Soit à déterminer la nappe dans laquelle se trouve le point de contact par exemple de la tangente

$$s + \varepsilon z = 0.$$

D'après cette équation, si  $z$  parcourt l'axe réel de  $+1$  à  $+\infty$ ,  $s$  décrira la droite  $\eta = \xi$  de  $\xi = \eta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  à  $\xi = \eta = -\infty$ . Cette correspondance, on l'a déjà vu, n'a lieu que dans la 3<sup>e</sup> nappe.

En ce qui concerne les 16 autres tangentes doubles, on peut procéder de la manière suivante. Soit, par exemple, à déterminer les points de contact de la tangente

$$s + z + \varepsilon' = 0.$$

De cette équation on tire

$$s = -(z + \varepsilon').$$

Cette valeur de  $s$  introduite dans l'équation  $s^4 + z^4 - 1 = 0$ , il vient

$$(z + \varepsilon')^4 + z^4 - 1 = 0$$

ou bien, en développant et en supprimant le facteur 2,

$$z^4 + 2\varepsilon'z^5 - 3iz^2 - 2\varepsilon z - 1 = 0.$$

Or, si l'on désigne par  $z_1$  et  $z_2$  les racines doubles de cette équation, on doit avoir identiquement

$$\begin{aligned} z^4 + 2\varepsilon'z^5 - 3iz^2 - 2\varepsilon z - 1 &= (z - z_1)^2 (z - z_2)^2 = \\ &= z^4 - 2(z_1 + z_2)z^3 + (z_1^2 + 4z_1z_2 + z_2^2)z^2 - 2z_1z_2(z_1 + z_2)z + z_1^2z_2^2. \end{aligned}$$

La comparaison des coefficients qu'affectent de part et d'autre les mêmes puissances de  $z$ , fournit ensuite les égalités

$$\alpha) \quad z_1 + z_2 = -\varepsilon',$$

$$\beta) \quad z_1^2 + 4z_1z_2 + z_2^2 = -3i,$$

$$\gamma) \quad z_1z_2(z_1 + z_2) = \varepsilon,$$

$$\delta) \quad z_1^2z_2^2 = -1,$$

dont on tire, en divisant  $\gamma$ ) par  $\alpha$ )

$$z_1z_2 = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = -i.$$

Connaissant maintenant la somme et le produit des quantités  $z_1$  et  $z_2$ , on obtient celles-ci en résolvant l'équation quadratique

$$z^2 + \varepsilon' z - i = 0$$

dont les racines sont

$$z_1 = \varepsilon' \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \varepsilon' \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Mais

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -e^{-\frac{1}{3}\pi i} = e^{\frac{2}{3}\pi i},$$

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -e^{\frac{1}{3}\pi i} = e^{-\frac{2}{3}\pi i} \quad \text{et} \quad \varepsilon' = e^{-\frac{1}{4}\pi i};$$

on peut donc donner à  $z_1$  et  $z_2$  la forme

$$z_1 = e^{-\frac{1}{4}\pi i} e^{\frac{2}{3}\pi i} = e^{\frac{5}{12}\pi i},$$

$$z_2 = e^{-\frac{1}{4}\pi i} e^{-\frac{2}{3}\pi i} = e^{-\frac{11}{12}\pi i}.$$

Ces valeurs vérifient les quatre équations  $\alpha)$ ,  $\beta)$ ,  $\gamma)$ ,  $\delta)$ . Les valeurs correspondantes de  $s$  sont

$$\begin{aligned} s_1 &= -(z_1 + \varepsilon') = -\left(e^{\frac{5}{12}\pi i} + e^{-\frac{1}{4}\pi i}\right) = -\left(e^{\frac{5}{12}\pi i} + e^{-\frac{3}{12}\pi i}\right) = \\ &= -e^{\frac{1}{12}\pi i} \left(e^{\frac{4}{12}\pi i} + e^{-\frac{4}{12}\pi i}\right) = -e^{\frac{1}{12}\pi i} \left(e^{\frac{1}{3}\pi i} + e^{-\frac{1}{3}\pi i}\right) = \\ &= -e^{\frac{1}{12}\pi i} = e^{-\frac{11}{12}\pi i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 &= -(z_2 + \varepsilon') = -\left(e^{-\frac{11}{12}\pi i} + e^{-\frac{3}{12}\pi i}\right) = \\ &= -e^{-\frac{7}{12}\pi i} \left(e^{-\frac{1}{3}\pi i} + e^{\frac{1}{3}\pi i}\right) = -e^{-\frac{7}{12}\pi i} = e^{\frac{5}{12}\pi i}. \end{aligned}$$

Ainsi les points de contact de la tangente considérée sont donnés par

$$z_1 = e^{\frac{5}{12}\pi i}, \quad s_1 = e^{-\frac{11}{12}\pi i},$$

$$z_2 = e^{-\frac{11}{12}\pi i}, \quad s_2 = e^{\frac{5}{12}\pi i},$$

Reste à savoir dans quelles nappes de la surface  $T'$  ces points se trouvent. A cet effet, on remarque aisément, à l'aide des fig. 2 et 3, que si  $z_1 = e^{\frac{5}{12}\pi i}$  était pris dans la 1<sup>re</sup> nappe, la valeur correspondante de  $s$  serait  $s = e^{\frac{7}{12}\pi i}$ . Or,

$$s_1 = is = e^{\frac{6}{12}\pi i} e^{\frac{7}{12}\pi i} = e^{\frac{13}{12}\pi i} = e^{-\frac{11}{12}\pi i}.$$

Il s'ensuit que le point  $z_1$  est situé dans la 2<sup>e</sup> nappe. D'une manière analogue, on reconnaît que le point  $z_2$  se trouve dans la 3<sup>e</sup> nappe.

Plus loin, lorsque cette étude sera un peu plus avancée, tout ce qui concerne les 28 fonctions abéliennes sera réuni dans un tableau. Incidemment, on peut constater dès à présent que leurs 56 zéros se répartissent également sur les quatre nappes de la surface  $T'$ .

### Fonctions abéliennes correspondant à un système complet de caractéristiques impaires.

La théorie des caractéristiques, traitée complètement dans l'ouvrage de M. Weber (p. 17 à 33), est supposée connue. A chaque tangente double on peut adjoindre une des 28 caractéristiques impaires. Une caractéristique paire quelconque ( $p$ ) est accompagnée de 8 systèmes complets de 7 caractéristiques impaires. Les tangentes doubles répondant à un tel système se distinguent par la propriété que jamais les six points de contact de trois d'entre elles ne sont situés sur une conique. Dans la théorie générale, on a la facilité d'attribuer à ces tangentes un système complet quelconque de caractéristiques impaires. Il n'en est plus de même lorsque l'équation de la courbe du 4<sup>e</sup> degré et ses 28 tangentes doubles sont connues et que l'on a fait choix de la surface  $T'$ . Dans ce cas, la difficulté essentielle consiste précisément à trouver 7 tangentes doubles et leurs caractéristiques satisfaisant à la condition indiquée. Ce problème résolu,