Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Points de contact des tangentes doubles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

on a finalement pour les 28 tangentes doubles à la courbe (1) les équations en coordonnées ponctuelles

$s+1=0$	$z+1=0$	$s+z+\varepsilon'=0$	$s-z+\varepsilon'=0$
$s-1=0$	$z-1=0$	$s-z-\varepsilon'=0$	$s+z-\varepsilon'=0$
$s-i=0$	$z-i=0$	$s+iz+\varepsilon=0$	$s-iz+\varepsilon=0$
$s+i=0$	$z+i=0$	$s-iz-\varepsilon=0$	$s+iz-\varepsilon=0$

$s-iz+\varepsilon'=0$	$s+iz+\varepsilon'=0$	$s+\varepsilon z=0$
$s+iz-\varepsilon'=0$	$s-iz-\varepsilon'=0$	$s-\varepsilon z=0$
$s+z+\varepsilon=0$	$s-z+\varepsilon=0$	$s+\varepsilon' z=0$
$s-z-\varepsilon=0$	$s+z-\varepsilon=0$	$s-\varepsilon' z=0$

Points de contact des tangentes doubles.

Dans la suite, on aura plus d'une fois besoin de connaître les points de contact des tangentes doubles, soit les zéros des fonctions abéliennes. Douze des 28 tangentes doubles dans l'exemple choisi présentent cette particularité que leurs deux points de contact se confondent, en sorte qu'elles forment un contact du 3^e^ ordre avec la courbe $s^4+z^4-1=0$. Ce sont les suivantes :

Tangente.	Point de contact.	Nappe.
$s+1=0$	$z=0,\quad s=-1$	III
$s-1=0$	$z=0,\quad s=1$	I
$s-i=0$	$z=0,\quad s=i$	II
$s+i=0$	$z=0,\quad s=-i$	IV
$z+1=0$	$z=-1,\quad s=0$	Ds toutes les 4.
$z-1=0$	$z=1,\quad s=0$	
$z-i=0$	$z=i,\quad s=0$	
$z+i=0$	$z=-i,\quad s=0$	
$s+\varepsilon z=0$	A l'infini ds la direction $-135°$	III
$s-\varepsilon z=0$	» » $45°$	I
$s+\varepsilon' z=0$	» » $+135°$	II
$s-\varepsilon' z=0$	» » $-45°$	IV

Seuls les quatre derniers cas demandent une petite explication. Soit à déterminer la nappe dans laquelle se trouve le point de contact par exemple de la tangente

$$s + \varepsilon z = 0.$$

D'après cette équation, si z parcourt l'axe réel de $+1$ à $+\infty$, s décrira la droite $\eta = \xi$ de $\xi = \eta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ à $\xi = \eta = -\infty$. Cette correspondance, on l'a déjà vu, n'a lieu que dans la 3^e nappe.

En ce qui concerne les 16 autres tangentes doubles, on peut procéder de la manière suivante. Soit, par exemple, à déterminer les points de contact de la tangente

$$s + z + \varepsilon' = 0.$$

De cette équation on tire

$$s = -(z + \varepsilon').$$

Cette valeur de s introduite dans l'équation $s^4 + z^4 - 1 = 0$, il vient

$$(z + \varepsilon')^4 + z^4 - 1 = 0$$

ou bien, en développant et en supprimant le facteur 2,

$$z^4 + 2\varepsilon' z^3 - 3iz^2 - 2\varepsilon z - 1 = 0.$$

Or, si l'on désigne par z_1 et z_2 les racines doubles de cette équation, on doit avoir identiquement

$$z^4 + 2\varepsilon' z^3 - 3iz^2 - 2\varepsilon z - 1 = (z - z_1)^2 (z - z_2)^2 =$$

$$= z^4 - 2(z_1 + z_2) z^3 + (z_1^2 + 4z_1 z_2 + z_2^2) z^2 - 2z_1 z_2 (z_1 + z_2) z + z_1^2 z_2^2.$$

La comparaison des coefficients qu'affectent de part et d'autre les mêmes puissances de z, fournit ensuite les égalités

α) $$z_1 + z_2 = -\varepsilon',$$

β) $$z_1^2 + 4z_1 z_2 + z_2^2 = -3i,$$

γ) $$z_1 z_2 (z_1 + z_2) = \varepsilon,$$

δ) $$z_1^2 z_2^2 = -1,$$

dont on tire, en divisant γ) par α)

$$z_1 z_2 = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = -i.$$

Connaissant maintenant la somme et le produit des quantités z_1 et z_2, on obtient celles-ci en résolvant l'équation quadratique

$$z^2 + \varepsilon' z - i = 0$$

dont les racines sont

$$z_1 = \varepsilon' \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \varepsilon' \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Mais

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -e^{-\frac{1}{3}\pi i} = e^{\frac{2}{3}\pi i},$$

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -e^{\frac{1}{3}\pi i} = e^{-\frac{2}{3}\pi i} \quad \text{et} \quad \varepsilon' = e^{-\frac{1}{4}\pi i};$$

on peut donc donner à z_1 et z_2 la forme

$$z_1 = e^{-\frac{1}{4}\pi i} e^{\frac{2}{3}\pi i} = e^{\frac{5}{12}\pi i},$$

$$z_2 = e^{-\frac{1}{4}\pi i} e^{-\frac{2}{3}\pi i} = e^{-\frac{11}{12}\pi i}.$$

Ces valeurs vérifient les quatre équations α), β), γ), δ). Les valeurs correspondantes de s sont

$$s_1 = -(z_1 + \varepsilon') = -\left(e^{\frac{5}{12}\pi i} + e^{-\frac{1}{4}\pi i}\right) = -\left(e^{\frac{5}{12}\pi i} + e^{-\frac{3}{12}\pi i}\right) =$$

$$= -e^{\frac{1}{12}\pi i}\left(e^{\frac{4}{12}\pi i} + e^{-\frac{4}{12}\pi i}\right) = -e^{\frac{1}{12}\pi i}\left(e^{\frac{1}{3}\pi i} + e^{-\frac{1}{3}\pi i}\right) =$$

$$= -e^{\frac{1}{12}\pi} = e^{-\frac{11}{12}\pi i},$$

$$s_2 = -(z_2 + \varepsilon') = -\left(e^{-\frac{11}{12}\pi i} + e^{-\frac{3}{12}\pi i}\right) =$$

$$= -e^{-\frac{7}{12}\pi i}\left(e^{-\frac{1}{3}\pi i} + e^{\frac{1}{3}\pi i}\right) = -e^{-\frac{7}{12}\pi i} = e^{\frac{5}{12}\pi i}.$$

Ainsi les points de contact de la tangente considérée sont donnés par

$$z_1 = e^{\frac{5}{12}\pi i}, \quad s_1 = e^{-\frac{11}{12}\pi i},$$

$$z_2 = e^{-\frac{11}{12}\pi i}, \quad s_2 = e^{\frac{5}{12}\pi i},$$

Reste à savoir dans quelles nappes de la surface T′ ces points se trouvent. A cet effet, on remarque aisément, à l'aide des fig. 2 et 3, que si $z_1 = e^{\frac{5}{12}\pi i}$ était pris dans la 1[re] nappe, la valeur correspondante de s serait $s = e^{\frac{7}{12}\pi i}$. Or,

$$s_1 = is = e^{\frac{6}{12}\pi i} e^{\frac{7}{12}\pi i} = e^{\frac{13}{12}\pi i} = e^{-\frac{11}{12}\pi i}.$$

Il s'ensuit que le point z_1 est situé dans la 2[e] nappe. D'une manière analogue, on reconnaît que le point z_2 se trouve dans la 3[e] nappe.

Plus loin, lorsque cette étude sera un peu plus avancée, tout ce qui concerne les 28 fonctions abéliennes sera réuni dans un tableau. Incidemment, on peut constater dès à présent que leurs 56 zéros se répartissent également sur les quatre nappes de la surface T′.

Fonctions abéliennes correspondant à un système complet de caractéristiques impaires.

La théorie des caractéristiques, traitée complètement dans l'ouvrage de M. Weber (p. 17 à 33), est supposée connue. A chaque tangente double on peut adjoindre une des 28 caractéristiques impaires. Une caractéristique paire quelconque (p) est accompagnée de 8 systèmes complets de 7 caractéristiques impaires. Les tangentes doubles répondant à un tel système se distinguent par la propriété que jamais les six points de contact de trois d'entre elles ne sont situés sur une conique. Dans la théorie générale, on a la facilité d'attribuer à ces tangentes un système complet quelconque de caractéristiques impaires. Il n'en est plus de même lorsque l'équation de la courbe du 4[e] degré et ses 28 tangentes doubles sont connues et que l'on a fait choix de la surface T′. Dans ce cas, la difficulté essentielle consiste précisément à trouver 7 tangentes doubles et leurs caractéristiques satisfaisant à la condition indiquée. Ce problème résolu,