Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Calcul direct des tangentes doubles à la courbe s1+z1-1=0
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

$$a'_{11} < 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} a'_{11}, a'_{12} \\ a'_{21}, a'_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a'_{11}, a'_{12}, a'_{13} \\ a'_{21}, a'_{22}, a'_{23} \\ a'_{31}, a'_{32}, a'_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Or, les valeurs ci-dessus donnent effectivement

$$a'_{11} = -\frac{4}{5}\pi, \qquad \delta = +\frac{3}{5}\pi^2, \qquad \Delta = -\frac{2}{5}\pi^3.$$

D'ailleurs on voit aisément qu'on peut écrire directement

$$\sum_i \sum_k \alpha_i \alpha_k a'_{ik} = -\pi \left[\frac{4}{5}(\alpha_1 - \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_3)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}(\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3)^2 + \frac{2}{3}\alpha_3^2\right].$$

Calcul direct des tangentes doubles à la courbe $s^4+z^4-1=0$.

Chaque fonction φ devient infiniment petite du premier ordre en quatre points de la surface T'. Il y en a 28 dont les zéros se confondent deux à deux. Les racines carrées de celles-ci ont été appelées par Riemann *fonctions abéliennes*. Ces 28 fonctions φ, égalées à zéro et interprétées géométriquement, représentent évidemment les tangentes doubles à la courbe $s^4 + z^4 - 1 = 0$. Il est du plus haut intérêt pour la suite de les connaître. Le procédé suivant va les fournir avec la plus grande facilité.

En exprimant s et z en fonction d'une troisième variable t à l'aide des formules

$$z = \sqrt{\cos t}, \qquad s = \sqrt{\sin t},$$

l'équation

$$(1) \qquad s^4 + z^4 - 1 = 0$$

est satisfaite identiquement pour chaque valeur de t. Mais il est avantageux d'introduire des coordonnées tangentielles u, v, moyennant les formules de transformation connues

$$u = -\frac{ds}{zds - sdz}, \quad v = \frac{dz}{zds - sdz}.$$

Il vient

$$u = -(\cos t)^{\frac{3}{2}}, \quad v = -(\sin t)^{\frac{3}{2}}.$$

L'élimination de t entre ces deux équations conduit ensuite à l'équation en coordonnées tangentielles de la courbe (1), soit

$$v^{\frac{4}{3}} + u^{\frac{4}{3}} - 1 = 0$$

qui, rendue rationnelle, prend la forme

$$(u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0.$$

Or, les coordonnées u, v d'une tangente double satisfont simultanément aux trois équations

$$f = (u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 12(u^4 + v^4 - 1)^2u^3 + 4.27u^3v^4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 12(u^4 + v^4 - 1)^2v^3 + 4.27u^4v^3 = 0$$

ou en supprimant dans les deux dernières équations les facteurs $12u^3$, $12v^3$

$$\alpha)\qquad (u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0,$$

$$\beta)\qquad (u^4 + v^4 - 1)^2 + 9v^4 = 0,$$

$$\gamma)\qquad (u^4 + v^4 - 1)^2 + 9u^4 = 0.$$

Les facteurs supprimés correspondent aux huit couples de racines

$$u = 0, \quad v = \sqrt[4]{1} = 1, -1, i, -i,$$

$$v = 0, \quad u = \sqrt[4]{1} = 1, -1, i, -i.$$

Par la comparaison des équations β) et γ) on trouve la relation $v^4 = u^4$ qui, introduite dans α) et β), donne

$$(2u^4 - 1)^3 = -27u^8,$$

$$(2u^4 - 1)^2 = -9u^4,$$

d'où par division

$$2u^4 - 1 = 3u^4$$

ou encore

$$u^4 = -1.$$

Ainsi u peut aussi prendre les valeurs

$$u = e^{\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = e^{-\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = -e^{\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = -e^{-\frac{1}{4}\pi i}.$$

En combinant chacune d'elles avec les quatre valeurs correspondantes de v, on obtient 16 autres couples de racines.

Pour déterminer enfin les quatre derniers couples il suffit de diviser α) par v^{12}, β) et γ) par v^8 :

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4 + 1 - \frac{1}{v^4}\right]^3 + \frac{27}{v^4}\left(\frac{u}{v}\right)^4 = 0,$$

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4 + 1 - \frac{1}{v^4}\right]^2 + \frac{9}{v^4} \qquad = 0,$$

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4 + 1 - \frac{1}{v^4}\right]^2 + \frac{9}{v^4}\left(\frac{u}{v}\right)^4 = 0$$

et l'on voit immédiatement que ces équations admettent les racines

$$v = \infty, \quad \frac{u}{v} = \pm\sqrt{\pm i}.$$

Si l'on pose pour abréger l'écriture

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \varepsilon, \quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \varepsilon',$$

de sorte que

$$\varepsilon\varepsilon' = 1, \ \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -i, \ \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = i, \ \frac{1}{\varepsilon'} = \varepsilon, \ \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon', \ \varepsilon^2 = i, \ \varepsilon'^2 = -i$$

on a maintenant les 28 couples de racines suivants

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
u & 0, & 0, & 0, & 0 & 1, & -1, & i, & -i & \varepsilon, & \varepsilon, & \varepsilon, & \varepsilon & -\varepsilon, & -\varepsilon, & -\varepsilon, & -\varepsilon \\
v & 1, & -1, & i, & -i & 0, & 0, & 0, & 0 & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon' & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon'
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
\varepsilon', & \varepsilon', & \varepsilon', & \varepsilon' & -\varepsilon', & -\varepsilon', & -\varepsilon', & -\varepsilon' \\
\varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon' & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon'
\end{array}$$

$$v = \infty \left| \ \frac{u}{v} = \varepsilon, \quad \frac{u}{v} = -\varepsilon, \quad \frac{u}{v} = \varepsilon', \quad \frac{u}{v} = -\varepsilon' \ \right|$$

En les substituant à tour de rôle dans l'équation

$$uz + vs + 1 = 0,$$

modifiée pour plus d'uniformité en

$$s + \frac{u}{v}z + \frac{1}{v} = 0,$$

on a finalement pour les 28 tangentes doubles à la courbe (1) les équations en coordonnées ponctuelles

$s+1=0$	$z+1=0$	$s+z+\varepsilon'=0$	$s-z+\varepsilon'=0$
$s-1=0$	$z-1=0$	$s-z-\varepsilon'=0$	$s+z-\varepsilon'=0$
$s-i=0$	$z-i=0$	$s+iz+\varepsilon=0$	$s-iz+\varepsilon=0$
$s+i=0$	$z+i=0$	$s-iz-\varepsilon=0$	$s+iz-\varepsilon=0$

$s-iz+\varepsilon'=0$	$s+iz+\varepsilon'=0$	$s+\varepsilon z=0$
$s+iz-\varepsilon'=0$	$s-iz-\varepsilon'=0$	$s-\varepsilon z=0$
$s+z+\varepsilon=0$	$s-z+\varepsilon=0$	$s+\varepsilon' z=0$
$s-z-\varepsilon=0$	$s+z-\varepsilon=0$	$s-\varepsilon' z=0$

Points de contact des tangentes doubles.

Dans la suite, on aura plus d'une fois besoin de connaître les points de contact des tangentes doubles, soit les zéros des fonctions abéliennes. Douze des 28 tangentes doubles dans l'exemple choisi présentent cette particularité que leurs deux points de contact se confondent, en sorte qu'elles forment un contact du 3^e^ ordre avec la courbe $s^4+z^4-1=0$. Ce sont les suivantes :

Tangente.	Point de contact.	Nappe.
$s+1=0$	$z=0,\quad s=-1$	III
$s-1=0$	$z=0,\quad s=1$	I
$s-i=0$	$z=0,\quad s=i$	II
$s+i=0$	$z=0,\quad s=-i$	IV
$z+1=0$	$z=-1,\quad s=0$	D^s^ toutes les 4.
$z-1=0$	$z=1,\quad s=0$	
$z-i=0$	$z=i,\quad s=0$	
$z+i=0$	$z=-i,\quad s=0$	
$s+\varepsilon z=0$	A l'infini d^s^ la direction —135°	III
$s-\varepsilon z=0$	» » 45°	I
$s+\varepsilon' z=0$	» » +135°	II
$s-\varepsilon' z=0$	» » — 45°	IV