Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Intégrales normales de première espéce
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

D'après Riemann, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}, & A_1^{(2)}, & A_1^{(3)} \\ A_2^{(1)}, & A_2^{(2)}, & A_2^{(3)} \\ A_3^{(1)}, & A_3^{(2)}, & A_3^{(3)}, \end{vmatrix}$$

doit être différent de zéro. Cette condition essentielle est encore remplie, attendu que

$$\begin{vmatrix} 2(1-i)K_1, & 0 & , \quad 4iK_3 \\ -2K_1 \;, & -2(1+i)K_2, & -2(1-i)K_3 \\ 2K_1 \;, & 2(1-i)K_2, & 2(1+i)K_3 \end{vmatrix} = -32(2+i)K_1K_2K_3$$

Intégrales normales de première espèce.

Les intégrales de première espèce u_1, u_2, u_3 sont dites *normales* quand elles possèdent les modules de périodicité suivants :

Le long des coupures	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
modules de périodicité de u_1 :	πi	0	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}
» » u_2 :	0	πi	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}
» » u_3 :	0	0	πi	a_{31}	a_{32}	a_{33}.

Pour les former, il suffit de poser

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1^{(1)} w_1 + \alpha_2^{(1)} w_2 + \alpha_3^{(1)} w_3, \\ u_2 = \alpha_1^{(2)} w_1 + \alpha_2^{(2)} w_2 + \alpha_3^{(2)} w_3, \\ u_3 = \alpha_1^{(3)} w_1 + \alpha_2^{(3)} w_2 + \alpha_3^{(3)} w_3, \end{cases}$$

et de déterminer les 9 constantes $\alpha_k^{(i)}$ à l'aide des conditions

$$\underline{u_1.}$$

Coupure a_1	$\alpha_1^{(1)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_1^{(3)} = \pi i$
» a_2	$\alpha_1^{(1)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_2^{(3)} = 0$
» a_3	$\alpha_1^{(1)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_3^{(3)} = 0$

$$u_2.$$

$$\begin{array}{ll|l|}
\text{Coupure } a_1 & & \alpha_1^{(2)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_1^{(3)} = 0 \\
\text{»} & a_2 & \alpha_1^{(2)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_2^{(3)} = \pi i \\
\text{»} & a_3 & \alpha_1^{(2)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_3^{(3)} = 0
\end{array}$$

$$u_3.$$

$$\begin{array}{ll|l|}
\text{Coupure } a_1 & & \alpha_1^{(3)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_1^{(3)} = 0 \\
\text{»} & a_2 & \alpha_1^{(3)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_2^{(3)} = 0 \\
\text{»} & a_3 & \alpha_1^{(3)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_3^{(3)} = \pi i
\end{array}$$

ce qui est possible, vu que le déterminant

$$D = \Sigma \pm A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)} < 0.$$

De ces équations on tire successivement

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_2^{(2)} & A_2^{(3)} \\ A_3^{(2)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = -\frac{2\pi(2-i)}{20 K_1},$$

$$\alpha_2^{(1)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(3)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(2-i)}{20 K_2},$$

$$\alpha_3^{(1)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(2-i)}{20 K_3};$$

$$\alpha_1^{(2)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(2)} & A_1^{(3)} \\ A_3^{(2)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(1-3i)}{20 K_1},$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(3)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = -\pi i \cdot \frac{1-3i}{20 K_2},$$

$$\alpha_3^{(2)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+i)(1-3i)}{20 K_3};$$

$$\alpha_1^{(3)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(2)} & A_1^{(3)} \\ A_2^{(2)} & A_2^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(3+i)}{20 K_1},$$

$$\alpha_2^{(3)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(3)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(3)} \end{vmatrix} = -\pi \frac{(1-i)(3+i)}{20 K_2},$$

$$\alpha_3^{(3)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+i)(3+i)}{20 K_3}.$$

Par conséquent les intégrales normales sont maintenant

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{\pi(2-i)}{20}\left[-2\frac{w_1}{K_1} + \frac{w_2}{K_2} + \frac{w_3}{K_3}\right] \\ u_2 &= \frac{\pi(1-3i)}{20}\left[\frac{w_1}{K_1} - i\frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2}\frac{w_3}{K_3}\right] \\ u_3 &= \frac{\pi(3+i)}{20}\left[\frac{w_1}{K_1} - (1-i)\frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2}\frac{w_3}{K_3}\right] \end{aligned}\right.$$

Les modules a_{ik}.

Leur valeur est donnée par les équations

$$\left\{\begin{aligned} a_{1h} &= \frac{\pi(2-i)}{20}\left[-2\frac{B_h^{(1)}}{K_1} + \frac{B_h^{(2)}}{K_2} + \frac{B_h^{(3)}}{K_3}\right], \\ a_{2h} &= \frac{\pi(1-3i)}{20}\left[\frac{B_h^{(1)}}{K_1} - i\frac{B_h^{(2)}}{K_2} + \frac{1+i}{2}\frac{B_h^{(3)}}{K_3}\right], \\ a_{3h} &= \frac{\pi(3+i)}{20}\left[\frac{B_h^{(1)}}{K_1} - (1-i)\frac{B_h^{(2)}}{K_2} + \frac{1+i}{2}\frac{B_h^{(3)}}{K_3}\right], \quad h=1,2,3. \end{aligned}\right.$$

En effectuant ces calculs on trouve

$$a_{11} = -\frac{2}{5}\pi(2-i), \quad a_{12} = -\frac{1}{5}\pi i(3+i), \quad a_{13} = \frac{1}{5}\pi(3+i),$$

$$a_{21} = -\frac{1}{5}\pi i(3+i), \quad a_{22} = -\frac{2}{5}\pi(2-i), \quad a_{23} = -\frac{1}{5}\pi(2-i),$$

$$a_{31} = \frac{1}{5}\pi(3+i), \quad a_{32} = -\frac{1}{5}\pi(2-i), \quad a_{33} = -\frac{2}{5}\pi(3+i).$$

D'une part on constate que $a_{ik} = a_{ki}$, comme cela doit être d'après un théorème démontré par Riemann. D'autre part, pour que les fonctions ϑ qu'on peut former avec ces modules, existent, il est nécessaire que la forme quadratique $\sum\limits_{i=1,2,3}\sum\limits_{k=1,2,3} \alpha_i \alpha_k a'_{ik}$, où α_i, α_k parcourent tous les nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$ et a'_{ik} signifie la partie réelle du module a_{ik}, puisse être décomposée en une somme de trois carrés négatifs. A cet effet il suffit que l'on ait

$$a'_{11} < 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} a'_{11}, a'_{12} \\ a'_{21}, a'_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a'_{11}, a'_{12}, a'_{13} \\ a'_{21}, a'_{22}, a'_{23} \\ a'_{31}, a'_{32}, a'_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Or, les valeurs ci-dessus donnent effectivement

$$a'_{11} = -\frac{4}{5}\pi, \qquad \delta = +\frac{3}{5}\pi^2, \qquad \Delta = -\frac{2}{5}\pi^3.$$

D'ailleurs on voit aisément qu'on peut écrire directement

$$\sum_i \sum_k \alpha_i \alpha_k a'_{ik} = -\pi \left[\frac{4}{5}(\alpha_1 - \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_3)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}(\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3)^2 + \frac{2}{3}\alpha_3^2 \right].$$

Calcul direct des tangentes doubles à la courbe $s^4+z^4-1=0$.

Chaque fonction φ devient infiniment petite du premier ordre en quatre points de la surface T'. Il y en a 28 dont les zéros se confondent deux à deux. Les racines carrées de celles-ci ont été appelées par Riemann *fonctions abéliennes*. Ces 28 fonctions φ, égalées à zéro et interprétées géométriquement, représentent évidemment les tangentes doubles à la courbe $s^4 + z^4 - 1 = 0$. Il est du plus haut intérêt pour la suite de les connaître. Le procédé suivant va les fournir avec la plus grande facilité.

En exprimant s et z en fonction d'une troisième variable t à l'aide des formules

$$z = \sqrt{\cos t}, \qquad s = \sqrt{\sin t},$$

l'équation

(1) $$s^4 + z^4 - 1 = 0$$

est satisfaite identiquement pour chaque valeur de t. Mais il est avantageux d'introduire des coordonnées tangentielles u, v, moyennant les formules de transformation connues

$$u = -\frac{ds}{zds - sdz}, \quad v = \frac{dz}{zds - sdz}.$$

Il vient

$$u = -(\cos t)^{\frac{3}{2}}, \quad v = -(\sin t)^{\frac{3}{2}}.$$