

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Intégrales normales de première espèce
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-261785>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

D'après Riemann, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}, & A_1^{(2)}, & A_1^{(3)} \\ A_2^{(1)}, & A_2^{(2)}, & A_2^{(3)} \\ A_3^{(1)}, & A_3^{(2)}, & A_3^{(3)} \end{vmatrix}$$

doit être différent de zéro. Cette condition essentielle est encore remplie, attendu que

$$\begin{vmatrix} 2(1-i)K_1, & 0, & 4iK_3 \\ -2K_1, & -2(1+i)K_2, & -2(1-i)K_3 \\ 2K_1, & 2(1-i)K_2, & 2(1+i)K_3 \end{vmatrix} = -32(2+i)K_1K_2K_3$$

Intégrales normales de première espèce.

Les intégrales de première espèce u_1, u_2, u_3 sont dites *normales* quand elles possèdent les modules de périodicité suivants :

Le long des coupures			a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
modules de périodicité de u_1 :			πi	0	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}
»	»	u_2 :	0	πi	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}
»	»	u_3 :	0	0	πi	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Pour les former, il suffit de poser

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1^{(1)} w_1 + \alpha_2^{(1)} w_2 + \alpha_3^{(1)} w_3, \\ u_2 = \alpha_1^{(2)} w_1 + \alpha_2^{(2)} w_2 + \alpha_3^{(2)} w_3, \\ u_3 = \alpha_1^{(3)} w_1 + \alpha_2^{(3)} w_2 + \alpha_3^{(3)} w_3, \end{cases}$$

et de déterminer les 9 constantes $\alpha_k^{(i)}$ à l'aide des conditions

$$\begin{array}{l|l} \text{Coupure } a_1 & \alpha_1^{(1)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_1^{(3)} = \pi i \\ \text{» } a_2 & \alpha_1^{(1)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_2^{(3)} = 0 \\ \text{» } a_3 & \alpha_1^{(1)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_3^{(3)} = 0 \end{array}$$

$u_2.$

$$\begin{array}{l|l} \text{Coupure } a_1 & \alpha_1^{(2)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_1^{(3)} = 0 \\ \text{» } a_2 & \alpha_1^{(2)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_2^{(3)} = \pi i \\ \text{» } a_3 & \alpha_1^{(2)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_3^{(3)} = 0 \end{array}$$

 $u_3.$

$$\begin{array}{l|l} \text{Coupure } a_1 & \alpha_1^{(3)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_1^{(3)} = 0 \\ \text{» } a_2 & \alpha_1^{(3)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_2^{(3)} = 0 \\ \text{» } a_3 & \alpha_1^{(3)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_3^{(3)} = \pi i \end{array}$$

ce qui est possible, vu que le déterminant

$$D = \Sigma \pm A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)} < 0.$$

De ces équations on tire successivement

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= \frac{\pi i}{D} \left| \frac{A_2^{(2)} A_2^{(3)}}{A_3^{(2)} A_3^{(3)}} \right| = -\frac{2\pi(2-i)}{20K_1}, \\ \alpha_2^{(1)} &= -\frac{\pi i}{D} \left| \frac{A_2^{(1)} A_2^{(3)}}{A_3^{(1)} A_3^{(3)}} \right| = \frac{\pi(2-i)}{20K_2}, \\ \alpha_3^{(1)} &= \frac{\pi i}{D} \left| \frac{A_2^{(1)} A_2^{(2)}}{A_3^{(1)} A_3^{(2)}} \right| = \frac{\pi(2-i)}{20K_3}; \\ \alpha_1^{(2)} &= -\frac{\pi i}{D} \left| \frac{A_1^{(2)} A_1^{(3)}}{A_3^{(2)} A_3^{(3)}} \right| = \frac{\pi(1-3i)}{20K_1}, \\ \alpha_2^{(2)} &= \frac{\pi i}{D} \left| \frac{A_1^{(1)} A_1^{(3)}}{A_3^{(1)} A_3^{(3)}} \right| = -\pi i \frac{1-3i}{20K_2}, \\ \alpha_3^{(2)} &= -\frac{\pi i}{D} \left| \frac{A_1^{(1)} A_1^{(2)}}{A_3^{(1)} A_3^{(2)}} \right| = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+i)(1-3i)}{20K_3}; \\ \alpha_1^{(3)} &= \frac{\pi i}{D} \left| \frac{A_1^{(2)} A_1^{(3)}}{A_2^{(2)} A_2^{(3)}} \right| = \frac{\pi(3+i)}{20K_1}, \\ \alpha_2^{(3)} &= -\frac{\pi i}{D} \left| \frac{A_1^{(1)} A_1^{(3)}}{A_2^{(1)} A_2^{(3)}} \right| = -\pi \frac{(1-i)(3+i)}{20K_2}, \\ \alpha_3^{(3)} &= \frac{\pi i}{D} \left| \frac{A_1^{(1)} A_1^{(2)}}{A_2^{(1)} A_2^{(2)}} \right| = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+i)(3+i)}{20K_3}. \end{aligned}$$

Par conséquent les intégrales normales sont maintenant

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{\pi(2-i)}{20} \left[-2 \frac{w_1}{K_1} + \frac{w_2}{K_2} + \frac{w_3}{K_3} \right] \\ u_2 &= \frac{\pi(1-3i)}{20} \left[\frac{w_1}{K_1} - i \frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2} \frac{w_3}{K_3} \right] \\ u_3 &= \frac{\pi(3+i)}{20} \left[\frac{w_1}{K_1} - (1-i) \frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2} \frac{w_3}{K_3} \right] \end{aligned} \right.$$

Les modules a_{ik} .

Leur valeur est donnée par les équations

$$\left\{ \begin{aligned} a_{1h} &= \frac{\pi(2-i)}{20} \left[-2 \frac{B_h^{(1)}}{K_1} + \frac{B_h^{(2)}}{K_2} + \frac{B_h^{(3)}}{K_3} \right], \\ a_{2h} &= \frac{\pi(1-3i)}{20} \left[\frac{B_h^{(1)}}{K_1} - i \frac{B_h^{(2)}}{K_2} + \frac{1+i}{2} \frac{B_h^{(3)}}{K_3} \right], \\ a_{3h} &= \frac{\pi(3+i)}{20} \left[\frac{B_h^{(1)}}{K_1} - (1-i) \frac{B_h^{(2)}}{K_2} + \frac{1+i}{2} \frac{B_h^{(3)}}{K_3} \right], \quad h=1,2,3. \end{aligned} \right.$$

En effectuant ces calculs on trouve

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{2}{5}\pi(2-i), & a_{12} &= -\frac{1}{5}\pi i(3+i), & a_{13} &= \frac{1}{5}\pi(3+i), \\ a_{21} &= -\frac{1}{5}\pi i(3+i), & a_{22} &= -\frac{2}{5}\pi(2-i), & a_{23} &= -\frac{1}{5}\pi(2-i), \\ a_{31} &= \frac{1}{5}\pi(3+i), & a_{32} &= -\frac{1}{5}\pi(2-i), & a_{33} &= -\frac{2}{5}\pi(3+i). \end{aligned}$$

D'une part on constate que $a_{ik} = a_{ki}$, comme cela doit être d'après un théorème démontré par Riemann. D'autre part, pour que les fonctions \wp qu'on peut former avec ces modules, existent, il est nécessaire que la forme quadratique $\sum_{i=1,2,3} \sum_{k=1,2,3} \alpha_i \alpha_k a'_{ik}$,

où α_i, α_k parcourent tous les nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$ et a'_{ik} signifie la partie réelle du module a_{ik} , puisse être décomposée en une somme de trois carrés négatifs. A cet effet il suffit que l'on ait

$$a'_{41} < 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} a'_{41} & a'_{42} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \mathcal{A} = \begin{vmatrix} a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Or, les valeurs ci-dessus donnent effectivement

$$a'_{41} = -\frac{4}{5}\pi, \quad \delta = +\frac{3}{5}\pi^2, \quad \mathcal{A} = -\frac{2}{5}\pi^3.$$

D'ailleurs on voit aisément qu'on peut écrire directement

$$\sum_i \sum_k \alpha_i \alpha_k a'_{ik} = -\pi \left[\frac{4}{5}(\alpha_1 - \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_3)^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{4}(\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3)^2 + \frac{2}{3}\alpha_3^2 \right].$$

Calcul direct des tangentes doubles à la courbe $s^4 + z^4 - 1 = 0$.

Chaque fonction φ devient infiniment petite du premier ordre en quatre points de la surface T' . Il y en a 28 dont les zéros se confondent deux à deux. Les racines carrées de celles-ci ont été appelées par Riemann *fonctions abéliennes*. Ces 28 fonctions φ , égales à zéro et interprétées géométriquement, représentent évidemment les tangentes doubles à la courbe $s^4 + z^4 - 1 = 0$. Il est du plus haut intérêt pour la suite de les connaître. Le procédé suivant va les fournir avec la plus grande facilité.

En exprimant s et z en fonction d'une troisième variable t à l'aide des formules

$$z = \sqrt{\cos t}, \quad s = \sqrt{\sin t},$$

l'équation

$$(1) \quad s^4 + z^4 - 1 = 0$$

est satisfaite identiquement pour chaque valeur de t . Mais il est avantageux d'introduire des coordonnées tangentielles u, v , moyennant les formules de transformation connues

$$u = -\frac{ds}{zds - sdz}, \quad v = \frac{dz}{zds - sdz}.$$

Il vient

$$u = -(\cos t)^{\frac{3}{2}}, \quad v = -(\sin t)^{\frac{3}{2}}.$$