Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Détermination des modules de périodicité
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

D'une manière analogue, on peut obtenir les intégrales prises sur le bord positif de 0 à $-i$. En ce qui concerne les intégrales relatives aux bords négatifs, il suffit de tenir compte de la connexion des nappes le long des lignes de passage. Ainsi, par exemple, le long de la ligne de passage $0+1$, le bord négatif de la 1[re] nappe se rattache au bord positif de la 2[e]. On en conclut que

$$\underset{\mathrm{I}}{\int_0^1} dw_1^{(-)} = \underset{\mathrm{II}}{\int_0^1} dw_1^{(+)} = i\mathrm{K}_1\,;$$

de même

$$\underset{\mathrm{II}}{\int_0^1} dw_1^{(-)} = \underset{\mathrm{III}}{\int_0^1} dw_1^{(+)} = -\mathrm{K}_1, \quad \underset{\mathrm{III}}{\int_0^1} dw_1^{(-)} = \underset{\mathrm{IV}}{\int_0^1} dw_1^{(+)} = -i\mathrm{K}_1,$$

$$\underset{\mathrm{IV}}{\int_0^1} dw_1^{(-)} = \underset{\mathrm{I}}{\int_0^1} dw_1^{(+)} = \mathrm{K}_1, \text{ etc.}$$

Au lieu d'employer le procédé indiqué pour la détermination de ces intégrales rectilignes, on pourrait se servir avantageusement de la représentation au moyen des fonctions w_1, w_2, w_3. A cet effet, on remarquera les particularités suivantes : La fonction w_2 transforme les angles à l'origine en angles doubles. Autour des points singuliers ± 1, $\pm i$ les angles de l'original sont réduits au quart par les fonctions w_1 et w_2 et à la moitié par la fonction w_3. En tout autre point, les angles correspondants de l'original et de son image sont égaux.

Pour plus de facilité, les valeurs des intégrales rectilignes relatives aux intervalles de 0 à ± 1 et de 0 à $\pm i$ sont réunies dans le tableau suivant (voir p. 12).

Détermination des modules de périodicité.

Soient $\mathrm{A}_\nu^{(h)}$ et $\mathrm{B}_\nu^{(h)}$ les modules de périodicité de w_h relatifs aux coupures a_ν et b_ν, c'est-à-dire

$$\mathrm{A}_\nu^{(h)} = w_h^{(+)} - w_h^{(-)} \text{ le long de la coupure } a_\nu \text{ et}$$

$$\mathrm{B}_\nu^{(h)} = w_h^{(+)} - w_h^{(-)} \text{ le long de la coupure } b_\nu.$$

w_1

Nappe.	$\int_0^1$		$\int_0^i$		$\int_0^{-1}$		$\int_0^{-i}$	
	Bord pos.	Bord nég.	Bord pos.	Bord nég.	Bord pos.	Bord nég.	Bord pos.	Bord nég.
I	K_1	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$	K_1	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$
II	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$	K_1	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$	K_1
III	$-K_1$	$-iK_1$	K_1	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$	K_1	iK_1
IV	$-iK_1$	K_1	iK_1	$-K_1$	$-iK_1$	K_1	iK_1	$-K_1$

w_2

I	K_2	iK_2	$-iK_2$	K_2	$-K_2$	$-iK_2$	iK_2	$-K_2$
II	iK_2	$-K_2$	K_2	iK_2	$-iK_2$	K_2	$-K_2$	$-iK_2$
III	$-K_2$	$-iK_2$	iK_2	$-K_2$	K_2	iK_2	$-iK_2$	K_2
IV	$-iK_2$	K_2	$-K_2$	$-iK_2$	iK_2	$-K_2$	K_2	iK_2

w_3

I	K_3	$-K_3$	$-iK_3$	iK_3	$-K_3$	K_3	iK_3	$-iK_3$
II	$-K_3$	K_3	iK_3	$-iK_3$	K_3	$-K_3$	$-iK_3$	iK_3
III	K_3	$-K_3$	$-iK_3$	iK_3	$-K_3$	K_3	iK_3	$-iK_3$
IV	$-K_3$	K_3	iK_3	$-iK_3$	K_3	$-K_3$	$-iK_3$	iK_3

La fig. 7, pl. VI, permet de reconnaître immédiatement que l'on a

$$A_\nu^{(h)} = \int_{(-b_\nu)} dw_h \quad \text{et} \quad B_\nu^{(h)} = \int_{(+a_\nu)} dw_h .$$

En d'autres termes, $A_\nu^{(h)}$ est égal à la valeur que prend $\int dw_h$, lorsque z parcourt le circuit entier b_ν dans le sens négatif, et $B_\nu^{(h)}$ la valeur de w_h qui résulte d'un parcours positif du circuit fermé a_ν. Pour faciliter le calcul de ces modules, on a, dans les fig. 8^a ... 8_f, pl. VIII, dessiné isolément les six coupures a_ν b_ν, en modifiant leur forme de façon qu'elles suivent, d'aussi près que possible, les axes coordonnés, déformation permise en vertu d'un théorème bien connu de Cauchy. Il vient ainsi successivement

$$A_1^{(1)} = \underset{(-b_1)}{\int} dw_1 = \underset{\mathrm{I}}{\int_0^i} dw_1^{(-)} + \underset{\mathrm{I}}{\int_i^0} dw_1^{(+)} + \underset{\mathrm{II}}{\int_0^{-i}} dw_1^{(-)} +$$

$$+ \underset{\mathrm{IV}}{\int_{-i}^0} dw_1^{(+)} = 2(1-i)K_1 \qquad \text{(Fig. } 8^a.)$$

$$A_2^{(1)} = \underset{(-b_2)}{\int} dw_1 = \underset{\mathrm{IV}}{\int_0^i} dw_1^{(+)} + \underset{\mathrm{III}}{\int_i^0} dw_1^{(+)} + \underset{\mathrm{III}}{\int_0^1} dw_1^{(-)} +$$

$$+ \underset{\mathrm{IV}}{\int_1^0} dw_1^{(-)} = -2K_1 \qquad \text{(Fig. } 8^b.)$$

$$A_3^{(1)} = \underset{(-b_3)}{\int} dw_1 = \underset{\mathrm{I}}{\int_0^i} dw_1^{(-)} + \underset{\mathrm{I}}{\int_i^0} dw_1^{(+)} + \underset{\mathrm{II}}{\int_0^{-i}} dw_1^{(-)} +$$

$$+ \underset{\mathrm{I}}{\int_{-i}^0} dw_1^{(+)} + \underset{\mathrm{I}}{\int_0^{-1}} dw_1^{(-)} + \underset{\mathrm{I}}{\int_{-1}^0} dw_1^{(+)} = 2K_1 \quad \text{(Fig.} 8^c.)$$

$$B_1^{(1)} = \underset{(+a_1)}{\int} dw_1 = \underset{\mathrm{I}}{\int_0^1} dw_1^{(+)} + \underset{\mathrm{II}}{\int_1^0} dw_1^{(-)} + \underset{\mathrm{I}}{\int_0^{-1}} dw_1^{(+)} +$$

$$+ \underset{\mathrm{II}}{\int_{-1}^0} dw_1^{(-)} = 4K_1 \qquad \text{(Fig. } 8^d.)$$

$$B_2^{(1)} = \underset{(+a_2)}{\int} dw_1 = \underset{\mathrm{IV}}{\int_0^i} dw_1^{(-)} + \underset{\mathrm{III}}{\int_i^0} dw_1^{(-)} + \underset{\mathrm{III}}{\int_0^{-1}} dw_1^{(+)} +$$

$$+ \underset{\mathrm{IV}}{\int_{-1}^0} dw_1^{(+)} = -2K_1 \qquad \text{(Fig. } 8^e.)$$

$$B_3^{(1)} = \underset{(+a_3)}{\int} dw_1 = \underset{\mathrm{II}}{\int_0^1} dw_1^{(+)} + \underset{\mathrm{II}}{\int_1^0} dw_1^{(-)} + \underset{\mathrm{II}}{\int_0^i} dw_1^{(+)} +$$

$$\underset{\mathrm{II}}{\int_i^0} dw_1^{(-)} + \underset{\mathrm{I}}{\int_0^{-i}} dw_1^{(+)} + \underset{\mathrm{II}}{\int_{-i}^0} dw_1^{(-)} = -2K_1 \text{ (Fig. } 8^f.)$$

Pour obtenir les douze modules relatifs aux intégrales w_2 et w_3, il suffit de remplacer dans les formules précédentes w_1 tour à tour par w_2 et w_3. Le tableau p. 12 fournit ensuite les valeurs désirées.

Résumé des modules de périodicité.

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{c}{w_1} \\ A_1^{(1)} = 2(1-i)K_1 & B_1^{(1)} = 4K_1 \\ A_2^{(1)} = -2K_1 & B_2^{(1)} = -2K_1 \\ A_3^{(1)} = 2K_1 & B_3^{(1)} = -2K_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{c}{w_2} \\ A_1^{(2)} = 0 & B_1^{(2)} = 0 \\ A_2^{(2)} = -2(1+i)K_2 & B_2^{(2)} = 2(1-i)K_2 \\ A_3^{(2)} = 2(1-i)K_2 & B_3^{(2)} = 2(1+i)K_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{c}{w_3} \\ A_1^{(3)} = 4iK_3 & B_1^{(3)} = 0 \\ A_2^{(3)} = -2(1-i)K_3 & B_2^{(3)} = -2(1+i)K_3 \\ A_3^{(3)} = 2(1+i)K_3 & B_3^{(3)} = -2(1-i)K_3 \end{array}$$

Si l'on pose

$$A_h^{(k)} = \alpha_h^{(k)} + i\,\beta_h^{(k)}, \quad B_h^{(k)} = \gamma_h^{(k)} + i\,\delta_h^{(k)},$$

on sait que pour chacune des trois intégrales on doit avoir $\sum_1^3(\beta_h\gamma_h - \alpha_h\delta_h) < 0$. Or, dans le cas actuel,

$$\begin{array}{l|l|l|l} \alpha_1^{(1)} = 2K_1 & \beta_1^{(1)} = -2K_1 & \gamma_1^{(1)} = 4K_1 & \delta_1^{(1)} = 0 \\ \alpha_2^{(1)} = -2K_1 & \beta_2^{(1)} = 0 & \gamma_2^{(1)} = -2K_1 & \delta_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_3^{(1)} = 2K_1 & \beta_3^{(1)} = 0 & \gamma_3^{(1)} = -2K_1 & \delta_3^{(1)} = 0 \end{array}$$

d'où il suit

$$\Sigma(\beta\gamma - \alpha\delta) = -8K_1^2.$$

Pour w_2 et w_3 on obtient par un calcul analogue

$$\Sigma(\beta\gamma - \alpha\delta) = -16K_2^2, \quad \Sigma(\beta\gamma - \alpha\delta) = -16K_3^2.$$

D'après Riemann, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}, & A_1^{(2)}, & A_1^{(3)} \\ A_2^{(1)}, & A_2^{(2)}, & A_2^{(3)} \\ A_3^{(1)}, & A_3^{(2)}, & A_3^{(3)}, \end{vmatrix}$$

doit être différent de zéro. Cette condition essentielle est encore remplie, attendu que

$$\begin{vmatrix} 2(1-i)K_1, & 0 & , & 4iK_3 \\ -2K_1 & , -2(1+i)K_2, & - & 2(1-i)K_3 \\ 2K_1 & , \quad 2(1-i)K_2, & & 2(1+i)K_3 \end{vmatrix} = -32(2+i)K_1K_2K_3$$

Intégrales normales de première espèce.

Les intégrales de première espèce u_1, u_2, u_3 sont dites *normales* quand elles possèdent les modules de périodicité suivants :

Le long des coupures	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
modules de périodicité de u_1 :	πi	0	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}
» » u_2 :	0	πi	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}
» » u_3 :	0	0	πi	a_{31}	a_{32}	a_{33}.

Pour les former, il suffit de poser

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1^{(1)} w_1 + \alpha_2^{(1)} w_2 + \alpha_3^{(1)} w_3, \\ u_2 = \alpha_1^{(2)} w_1 + \alpha_2^{(2)} w_2 + \alpha_3^{(2)} w_3, \\ u_3 = \alpha_1^{(3)} w_1 + \alpha_2^{(3)} w_2 + \alpha_3^{(3)} w_3, \end{cases}$$

et de déterminer les 9 constantes $\alpha_k^{(i)}$ à l'aide des conditions

$$\underline{u_1.}$$

$$\begin{array}{l|l|} \text{Coupure } a_1 & \alpha_1^{(1)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_1^{(3)} = \pi i \\ \quad » \quad a_2 & \alpha_1^{(1)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_2^{(3)} = 0 \\ \quad » \quad a_3 & \alpha_1^{(1)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_3^{(3)} = 0 \end{array}$$