Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Introduction
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

ceux qui ont l'intention d'aborder ces régions de la science. C'est dans cet espoir, qu'encouragé par quelques amis, j'ose soumettre le présent mémoire au public mathématique.

Je me représente un lecteur, en possession de la théorie des fonctions ϑ à trois variables et des caractéristiques à six éléments, et ayant devant lui l'ouvrage de M. Weber; à l'aide de ce travail, il lui sera aisé de suivre pas à pas l'ouvrage original.

Dans un second mémoire, je me propose de reprendre les problèmes fondamentaux de Jacobi et de Riemann, en ramenant ces questions sur le terrain des fonctions elliptiques.

Je saisis enfin cette occasion pour témoigner à mon vénéré maître toute ma gratitude de ce qu'il a bien voulu, à plusieurs reprises, s'intéresser aux efforts de son ancien élève.

Introduction.

L'équation qui sert de base à l'étude qu'on va entreprendre est la suivante :

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0$$

ou

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{z}{x}\right)^4 = 0.$$

Si l'on pose

$$\frac{y}{x} = z\sqrt{i}, \qquad i = \sqrt{-1}$$

et

$$\frac{z}{x} = s\sqrt{i},$$

elle prend la forme

$$(1) \qquad s^4 + z^4 - 1 = 0,$$

d'où

$$(1^a) \qquad s = \sqrt[4]{1 - z^4}.$$

On remarque tout d'abord que les variables s et z entrent d'une manière symétrique dans l'équation (1). Les relations entre s et z seront donc parfaitement connues lorsqu'on aura étudié s en fonction de z.

Si, en premier lieu, on attribue à s et z des valeurs réelles et que l'on rapporte ces variables à un système de coordonnées rectangulaires, en choisissant, par exemple, z comme abscisse et s comme ordonnée d'un point, l'équation (1) représente une courbe du 4^{me} degré, dépourvue de points doubles et qui, de ce fait, appartient au genre 3 (fig. 1, pl. VI). Cette courbe, évidemment symétrique par rapport aux deux axes, possède aux points $z=0$, $s=\pm 1$; $z=\pm 1$, $s=0$ des tangentes qui forment avec elle un contact de l'ordre 3. Ces droites ont quatre points infiniment voisins communs avec la courbe, et peuvent, par conséquent, être considérées comme des tangentes doubles dont les deux points de contact coïncident. Cette particularité, la seule qui mérite d'être signalée ici, se reconnaît aisément, si l'on développe s en série, ordonnée suivant les puissances croissantes de z, par exemple dans le voisinage du point $z=0$, $s=1$, ce qui donne

$$s-1=-\frac{1}{4}z^4\ldots$$

Mais si, d'une manière plus générale, on admet que z et s puissent prendre des valeurs aussi bien imaginaires que réelles, il faudra assigner aux points représentatifs de ces variables deux plans que l'on désignera par (z) et (s). Lorsque z parcourt une courbe quelconque dans son plan, le point représentatif de s, à son tour, parcourra une courbe dans le plan (s). D'après Gauss, on appelle volontiers cette dernière courbe l'*image* dont la première serait l'*original*. Le plan (z) se compose de quatre feuilles ou nappes superposées. Le plan (s), on l'a déjà reconnu, se trouve exactement dans les mêmes conditions. Pour établir les rapports qui existent entre les plans (z) et (s), il est utile d'étudier brièvement la représentation du plan (z) sur le plan (s) par l'intermédiaire de la fonction s. A cet effet, il suffit de considérer les courbes dans le plan (s) qui correspondent à un système de circonférences concentriques dans le plan (z) avec O comme centre commun.

Soit

$$(2)\qquad \begin{cases} z=x+yi=re^{\varphi i}, \\ s=\xi+\eta i=\rho e^{\psi i}. \end{cases}$$

A l'aide de ces formules, l'équation (1^a) peut s'écrire

$$\rho e^{\psi i}=\sqrt[4]{1-r^4e^{4\varphi i}},$$

d'où l'on tire

$$\varrho^4 (\cos 4\psi + i \sin 4\psi) = 1 - r^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi),$$

puis en séparant les parties réelles des parties imaginaires

$$\varrho^4 \cos 4\psi = 1 - r^4 \cos 4\varphi,$$
$$\varrho^4 \sin 4\psi = \quad - r^4 \sin 4\varphi$$

et enfin

$$\left\{\begin{aligned} \varrho &= \sqrt[8]{1 - 2r^4 \cos 4\varphi + r^8}, \\ \cos 4\psi &= \frac{1 - r^4 \cos 4\varphi}{\varrho^4}, \\ \sin 4\psi &= -\frac{r^4 \sin 4\varphi}{\varrho^4} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos\psi, \\ \eta &= \varrho \sin\psi. \end{aligned}\right.$$

Afin d'obtenir, par exemple, l'image de la circonférence dont l'équation en coordonnées polaires est $r = a$, on donnera, dans ces formules, à r la valeur constante a, et on fera varier φ de 0 à 2π. (Voir les fig. 2 et 3, pl. VII. Pour les construire, on s'est servi des valeurs $r = \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\sqrt[4]{15}, 1, \frac{1}{2}\sqrt[4]{17}, \sqrt[4]{2}, \frac{3}{2}$.)

A une valeur déterminée de z correspondent, en général, quatre valeurs différentes de s. Une fois pour toutes, on conviendra que selon la feuille dans laquelle se trouve le point représentatif de z, la fonction s prendra les valeurs suivantes :

Dans la 1re feuille	$s = \sqrt[4]{1 - z^4}$,	$s = +1$	pour	$z = 0$,
» 2e »	$s = i\sqrt[4]{1 - z^4}$,	$s = +i$	»	$z = 0$,
» 3e »	$s = -\sqrt[4]{1 - z^4}$,	$s = -1$	»	$z = 0$,
» 4e »	$s = -i\sqrt[4]{1 - z^4}$,	$s = -i$	»	$z = 0$.

Ces quatre valeurs se confondent pour $z = \pm 1$, $z = \pm i$. Il s'ensuit que ces quatre points sont des points de ramification pour la fonction s; ils satisfont, en effet, seuls aux deux équations

$$F(s, z) = s^4 + z^4 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 4s^3 = 0.$$

Chacun d'eux compte pour trois points de ramification simples, vu qu'en ces points, non-seulement deux, mais les quatre valeurs correspondantes de s coïncident. Ainsi, la fonction s possède douze points de ramification simples.

Pour transformer le plan (z) en une surface de Riemann, on peut appliquer les *lignes de passage* de différentes manières. Guidé par la représentation susmentionnée, on les conduira dans les quatre nappes, le long des axes coordonnés, de l'origine O jusqu'aux points $z = \pm 1$, $z = \pm i$, en reliant les quatre feuilles de la manière indiquée dans les fig. 4, 5 et 6, pl. VI. Les fig. 4 et 5 représentent des coupes à travers les quatre nappes, la première perpendiculaire à la ligne de passage $O + 1$, la dernière perpendiculaire à la ligne de passage $O + i$. L'œil de l'observateur se trouve au-dessus de la première feuille. Il va sans dire qu'on aurait pu ajouter encore deux figures analogues relatives aux lignes de passage $O - 1$ et $O - i$. Pour bien comprendre la fig. 6, on remarquera que les quatre circonférences devraient être superposées et se trouver chacune dans la nappe que lui assigne le chiffre inscrit dans la figure. Afin d'augmenter encore la clarté, on a mis en regard, le long des lignes de passage, dans les fig. 2 et 3, pl. VII, les chiffres qui indiquent le passage d'une feuille à l'autre. Ainsi, par exemple, le long de la ligne $O + 1$, le point z peut passer du bord positif de la première nappe au bord négatif de la quatrième, du bord positif de la deuxième nappe au bord négatif de la première, etc. Obéissant aux exigences de la représentation, la disposition des chiffres dans le plan (s) diffère de celle adoptée pour le plan (z).

Ceci posé, s pourra être considéré comme une fonction uniforme de z. On s'en convainc aisément à l'aide des fig. 2 et 3. En effet, si z parcourt le 1er quadrant d'une circonférence de rayon < 1, par exemple dans la 1re feuille, en partant du bord négatif de l'axe $O + 1$, le point s décrit un ovale complet. Lorsque z, après avoir franchi la ligne de passage $O + i$, décrit ensuite le second quadrant dans la quatrième nappe, le point s parcourra une seconde fois le même ovale. A la circonférence entière correspond donc quatre fois le même ovale. Dans le cas où z serait parti de la seconde nappe, le point s aurait décrit un autre ovale identique au premier, mais tourné contre celui-ci d'un angle de $+ 90°$. Et ainsi de suite.

Si le point z, tout en restant dans la première nappe, suit le bord positif de l'axe des X de 0 à $+ 1$, le point s longe le bord positif de l'axe des Ξ de $+1$ à 0; mais au-delà du point $+1$, l'image de l'axe des X est la droite $\eta = \xi$ de $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = +\infty$.

Pour une circonférence de rayon > 1, les lignes de passage perdent leur influence. Par conséquent, à une telle circonférence correspond uniformément une courbe fermée dans le plan (s). La circonférence $r = 1$ constitue le cas limite, en ce sens que la courbe correspondante dans le plan (s) peut être considérée indifféremment comme une courbe fermée ou comme l'ensemble de quatre ovales allongés se rencontrant en O.

Incidemment, on reconnaît aussi que la fonction s sert d'intermédiaire à la *représentation conforme* de l'extérieur du cercle des unités sur l'extérieur de la courbe

$$\varrho^4 = 2 \cos 4\psi$$

ou

$$(\xi^2 + \eta^2)^4 = 2\,(\xi^4 - 6\,\xi^2\eta^2 + \eta^4).$$

En vertu des lois qui régissent la représentation conforme, les tangentes principales à cette courbe au point quadruple $\xi = 0$, $\eta = 0$, doivent former avec l'axe positif des Ξ des angles de $\pm 22\frac{1}{2}{}^0$ et $\pm 67\frac{1}{2}{}^0$.

Intégrales de première espèce.

La surface de Riemann, T, qui accompagne la fonction s, se compose, on l'a vu, de quatre nappes superposées. Sa connexion est de l'ordre 7, c'est-à-dire qu'elle peut, moyennant six coupures, être transformée en une surface T' à connexion simple. Dans l'intérieur de cette nouvelle surface T', les intégrales de fonctions rationnelles de s et de z sont des fonctions uniformes de leurs limites supérieures. Le long des deux bords des coupures, elles prennent des valeurs dont la différence est en général finie, mais constante, et que l'on appelle les *modules de périodicité* de ces intégrales. Par là, ne sont pas exclues d'autres lignes à différence constante situées dans l'intérieur même de la surface. (Intégrales de 3^e espèce.)

On conviendra d'appeler positif le bord d'une coupure qui se trouve à gauche lorsqu'on la parcourt dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens des angles croissants. Ceci posé, on peut éta-