Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 23 (1887-1888)
Heft: 96

Artikel: Étude sur la forme d'une surface en un point donné
Autor: Odin, A.-A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261385

science qui a besoin du concours de tous pour compléter cette page importante de l'histoire physique de notre pays. Il serait encore plus méritoire de nous conserver quelques-uns de ces blocs, mais ce vœu paraîtra peut-être trop ambitieux et ne saurait être réalisé partout, j'en conviens. On ne peut demander à tous les propriétaires de se montrer aussi respectueux que M. du Bois, de Champittet, pour des souvenirs d'une époque plus ancienne que l'homme. Il me sera permis cependant d'exprimer ce vœu, dans l'intérêt d'une théorie démontrée et illustrée par nos savants, et dont l'idée première et fondamentale appartient au peuple suisse.

Étude sur la forme d'une surface en un point donné,

par A.-A. ODIN

L'admirable travail de Gauss, intitulé : *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* a ouvert une ère nouvelle à l'étude des relations infinitésimales qui se rapportent à la courbure des surfaces, et sert encore à l'heure présente de base à la presque totalité des nombreux travaux qui paraissent chaque année sur cette matière. Mais si la méthode de Gauss est le seul fondement apte à permettre une étude générale d'une surface quelconque prise dans son ensemble, elle se prête souvent fort mal à l'étude de la forme d'une surface en un point donné de cette surface; nous n'en voulons pour preuve que le calcul que Dietrich a fait insérer dans la *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* t. XXVI, pages 57-59, et qui devient tout à fait superflu si l'on se sert de la méthode de l'indicatrice introduite par Dupin. La méthode de Gauss a en outre l'inconvénient d'être difficile à comprendre. Plusieurs savants ont déjà cherché à simplifier les démonstrations de l'illustre mathématicien allemand et y ont en partie réussi; quelques-uns d'entre eux ont employé des séries, mais aucun n'a, à notre connaissance du moins, utilisé des séries complètes permettant, d'une part, d'étudier la forme d'une surface en un point donné, en poussant le développement jusqu'aux infiniment petits d'un ordre aussi élevé que l'on veut, et, d'autre part, d'employer ces séries à l'étude d'une portion finie de surface. Qu'il nous soit permis de donner ici le résultat succinct de quelques recherches faites à ce sujet.

Pour étudier la forme d'une surface aux environs immédiats d'un point donné, nous l'avons rapportée à un système $Oxyz$ de coordonnées cartésiennes rectangulaires, ayant ce point pour origine. Mais le choix d'un système de coordonnées ne suffit pas, car à la forme d'une surface sont intimément liées toutes les déformations que l'on peut faire subir à cette surface sans déchirure ni duplicature, et il nous a fallu introduire un élément de calcul qui soit inhérent à la surface considérée comme un tissu inextensible et incompressible. A cet effet, nous avons cru devoir choisir la *longueur réduite d'un arc de géodésique* préconisée par Christoffel dans sa *Theorie der geodätischen Dreiecke*. Pour établir une liaison entre la longueur réduite d'un arc de géodésique et l'équation de la surface donnée, nous nous sommes servi des coordonnées géodésiques polaires qui ont déjà été utilisées par plusieurs savants.

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface considérée; comme celle-ci passe par l'origine, on pourra toujours, pour des valeurs suffisamment petites de $x, y, z,$ développer $F(x, y, z)$ en série, et la surface sera représentée par une équation de la forme :

$$0 = \sum_{\lambda+\mu+\nu=1} a_{\lambda,\mu,\nu}\, x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \tag{1}$$

Considérons une ligne géodésique G partant de l'origine; si s désigne sa longueur à partir de l'origine, cette longueur étant toujours regardée comme positive, la géodésique sera représentée par trois équations de la forme :

$$x = \sum_{m=1}^{m=\infty} \alpha_m s^m; \quad y = \sum_{m=1}^{m=\infty} \beta_m s^m; \quad z = \sum_{m=1}^{m=\infty} \gamma_m s^m$$

Les coefficients α, β, γ ne sont pas indépendants les uns des autres, d'abord parce que G est situé sur la surface donnée et que, par conséquent, les valeurs de x, y, z doivent satisfaire l'équation (1); ensuite parce que G étant une géodésique, sa normale principale doit être constamment normale à la surface, et enfin parce que s n'étant pas une variable quelconque, mais représentant la longueur de l'arc de G, on doit avoir identiquement

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

Ces trois conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients α_m, β_m, γ_m nous ont permis d'établir des expressions symboliques des valeurs de ces coefficients et d'établir la nature de ces valeurs. Le cadre de ce mémoire ne nous permet pas de donner les calculs relatifs à cette étude; nous nous bornerons à en indiquer les principaux résultats.

Si l'on donne la tangente de G à l'origine des coordonnées, la géodésique G sera déterminée et les coefficients α, β, γ seront aussi parfaitement déterminés. Ils dépendent donc essentiellement de la direction de cette tangente; celle-ci pourra être fixée par l'angle φ qu'elle forme avec une direction choisie dans le plan tangent à la surface; nous voyons donc que les α, β, γ doivent être des fonctions bien déterminées de φ; nous préciserons en indiquant le résultat auquel nous ont conduit nos calculs, lequel résultat peut être exprimé comme suit :

Les coefficients α_{m}, β_{m}, γ_{m} *sont des fonctions entières et homogènes du* $\mathrm{m}^{\text{ième}}$ *degré en* $\cos\varphi$ *et* $\sin\varphi$; *les coefficients de ces fonctions sont à leur tour des fonctions rationnelles des* a *dont la somme des indices ne surpasse pas* m, *fonctions qui sont entières par rapport aux* a *dont la somme des indices surpasse* 1, *et même linéaires par rapport aux* a *dont la somme des indices surpasse* $\frac{\mathrm{m}+1}{2}$.

Nous nous sommes ensuite proposé de développer en série la longueur réduite d'un arc de la géodésique G, et cela de la manière la plus simple, c'est-à-dire en nous servant de la définition même telle qu'elle a été donnée par Christoffel. Soit M un point sur G tel que :

$$\mathrm{OM} = s$$

Construisons sur notre surface une nouvelle géodésique G′ qui soit infiniment rapprochée de G, et choisissons sur elle un point

M′ dont la distance à O soit aussi s. Si nous appelons $\delta\sigma$ la distance MM′ et $\delta\varphi$ l'angle formé par G et G′ au point où ces lignes se coupent, nous savons que la longueur réduite S de l'arc OM est définie par la formule :

$$S = \frac{\delta\sigma}{\delta\varphi}$$

Comme l'on a

$$\left(\frac{\delta\sigma}{\delta\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\delta x}{\delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta\varphi}\right)^2$$

que, d'un autre côté, les différentiations exprimées par le signe δ se rapportent exclusivement à la variable φ et que nous connaissons un moyen d'exprimer les divers coefficients du développement de x, y, z en fonction de φ, on conçoit immédiatement la possibilité de former le développement de S en série croissante de s, les coefficients de cette série étant des fonctions de φ. Ces coefficients sont assez laborieux à calculer et se présentent sous une forme très compliquée. On arrive cependant assez facilement à leur reconnaître les propriétés générales exprimées dans le théorème suivant :

Une surface étant représentée par l'équation :

$$0 = \sum_{\lambda+\mu+\nu=1}^{\lambda=\infty,\ \mu=\infty,\ \nu=\infty} a_{\lambda,\mu,\nu}\, x^\lambda y^\mu z^\nu$$

passe par l'origine des coordonnées; la longueur réduite S *d'un arc de géodésique* s *partant de l'origine — où il fait un angle* φ *avec une direction fixe prise dans le plan tangent à la surface — est développable suivant les puissances croissantes de* s; *le premier terme de ce développement est* s *et le terme en* s^2 *est nul ; à partir de* $m = 0$, *le coefficient de* s^{m+3} *est une fonction entière et homogène du* $m^{\text{ième}}$ *degré en* $\cos\varphi$ *et* $\sin\varphi$ *; les coefficients de cette fonction sont formés des* a *dont la somme des indices ne dépasse pas* $m + 2$ *et de telle façon que les* a *dont la somme des indices est plus grande que* $\frac{m}{2} + 2$ *ne s'y rencontrent qu'au premier degré.*

Les développements en série dont nous venons de résumer les principales propriétés donnent un moyen élémentaire très simple pour étudier la forme d'une surface en un point donné, surtout lorsqu'il s'agit des changements qu'éprouvent les paraboloïdes osculateurs quand on déforme la surface sans déchirure ni duplicature. Les deux théorèmes que nous avons énoncés peuvent aussi servir à démontrer nombre d'autres théorèmes et à résoudre quantité de questions; nous n'indiquerons que la suivante, que nous croyons n'avoir pas encore été traitée.

Soient deux courbes C_1 C_2 se coupant en un point O et une surface S passant par ce point. On peut se proposer de développer la surface S sur les courbes C_1 et C_2, c'est-à-dire de la déformer sans déchirure ni duplicature, de telle façon qu'elle arrive à contenir, au moins sur une certaine étendue, les courbes C_1 et C_2, le point O restant en place. Pour plus de simplicité, supposons que la normale commune à C_1 et C_2 en O coïncide avec la normale ON de la surface S. Soit OT une tangente quelconque de la surface en O, tangente dont le premier élément est regardé comme faisant partie de la surface. Le point O et la normale ON de la surface étant fixes, on peut encore donner à cette surface une infinité de positions en la faisant tourner autour de ON; elle sera fixée par la tangente OT.

Ceci étant posé, on démontre d'abord que *la possibilité ou l'impossibilité de développer* S *sur les courbes* C_1 *et* C_2 *ne dépend absolument pas de la position de* OT *par rapport à* C_1 *et* C_2, en d'autres termes, que *si le problème est possible pour une position de* OT, *il est possible pour toutes les autres positions.* On prouve ensuite aisément que le problème a en général deux solutions caractérisées par deux systèmes de sections normales principales (un pour chaque solution), *qui sont les mêmes pour toutes les directions de* OT ; ces systèmes peuvent être soit réels et distincts, soit réunis en un seul, soit imaginaires; dans ce dernier cas, le problème est, à proprement parler, impossible.

Pour distinguer les trois cas que nous venons de mentionner, appelons ρ_1 le rayon de courbure en O de la projection de C_1 sur son plan tangent passant par ON, et ρ_1' le rayon de courbure de la projection de cette même courbe sur le plan normal de C_2 passant par O. Nous définirions de même des rayons de courbure ρ_2 et ρ_2'. On vérifie aisément que :

$$\rho_1 \rho_2' = \rho_1' \rho_2$$

Nous pouvons donc poser :

$$\frac{1}{\rho_1\,\rho_2'} = \frac{1}{\rho_1'\,\rho_2} = C$$

Appelons K le produit des réciproques des rayons de courbure principaux de S en O ; ce produit, appelé par Gauss courbure de la surface au point O, ne change pas si l'on déforme la surface.

Revenons à notre problème : il a deux solutions réelles et distinctes pour chaque position de OT si

$$C > K$$

les deux solutions deviennent identiques si

$$C = K$$

et imaginaires dans le cas où

$$C < K$$

La question est de cette manière complètement résolue pour le cas général, mais si le problème est possible, il y a une restriction à faire à notre solution, car, par la méthode employée, nous ne pouvons la démontrer que si la surface S est limitée à un cercle géodésique ayant O pour centre et tel que les séries employées soient encore convergentes si l'on donne à leur argument une valeur égale au rayon de ce cercle.

Yverdon, le 30 novembre 1886.