

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 18 (1882)  
**Heft:** 87

**Artikel:** Sur un mode particulier de représentation des imaginaires  
**Autor:** Amstein, H.  
**Kapitel:** 1  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-259606>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Le travail offert ici au lecteur est divisé en deux parties. La première est consacrée spécialement à l'étude de la ligne droite imaginaire. La deuxième partie traite de quelques propriétés générales des courbes imaginaires, et, à titre d'application destinée à vérifier les théorèmes généraux, on a fait l'étude succincte de trois courbes particulières.

---

## PREMIÈRE PARTIE

### Le point imaginaire.

Soient

$$\xi = \alpha + \beta i$$

$$\eta = \gamma + \delta i, \text{ où } i = \sqrt{-1}$$

les coordonnées de la figure géométrique qui, dans cette étude, sera appelée un *point imaginaire*. Pour représenter ce point dans l'espace, on choisira deux plans parallèles à la distance 1 l'un de l'autre. Dans ces plans, on adoptera deux systèmes de coordonnées rectangulaires  $xy$  et  $XY$  dont les origines  $O$  et  $O'$  se trouvent sur une perpendiculaire aux deux plans et dont les axes  $x$  et  $X$ ,  $y$  et  $Y$  sont respectivement parallèles. En outre, il sera nécessaire d'admettre un troisième système de coordonnées rectangulaires dans l'espace. Tandis que l'origine et les axes  $x$  et  $y$  de ce dernier système coïncident avec l'origine  $O$  et les axes du même nom du plan  $xy$ , son axe  $z$  sera la droite joignant les points  $O$  et  $O'$ .

Le choix de ces trois systèmes de coordonnées, ainsi que de la distance des deux plans parallèles, a été inspiré par le désir de simplifier les formules. En effet, rien n'empêcherait de modifier ces dispositions en ce sens que la distance des deux plans restant arbitraire, les deux systèmes de coordonnées planes et le système de coordonnées dans l'espace fussent déplacés et tournés, les deux premiers dans leur plan respectif et le dernier d'une manière quelconque.

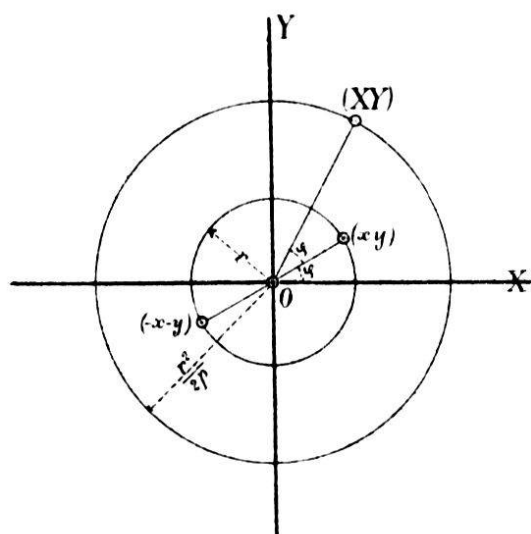
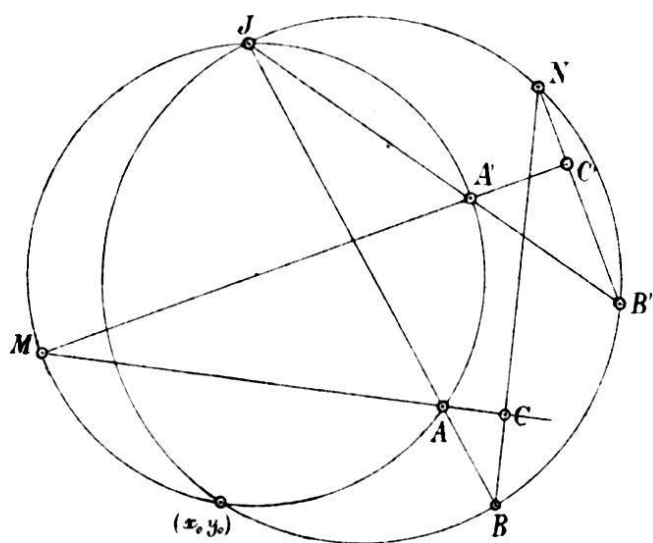
Afin de faciliter le langage, les plans  $xOy$  et  $XOY$  seront appelés : le premier, le *plan inférieur*, et le second, le *plan supérieur*.

Ceci établi, le point imaginaire

$$\xi = \alpha + \beta i$$

$$\eta = \gamma + \delta i$$

*Fig. 1.*



*Fig. 2.*

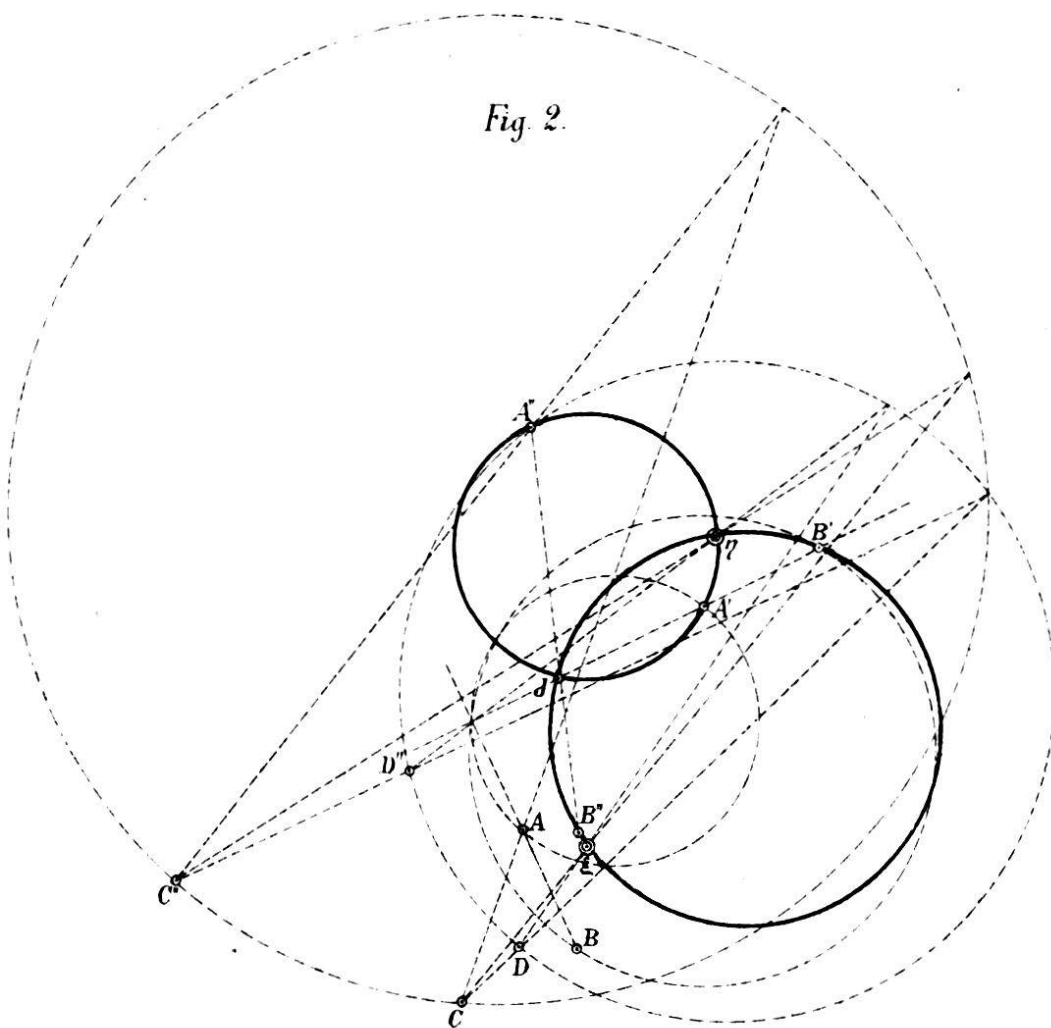


Fig. 4.

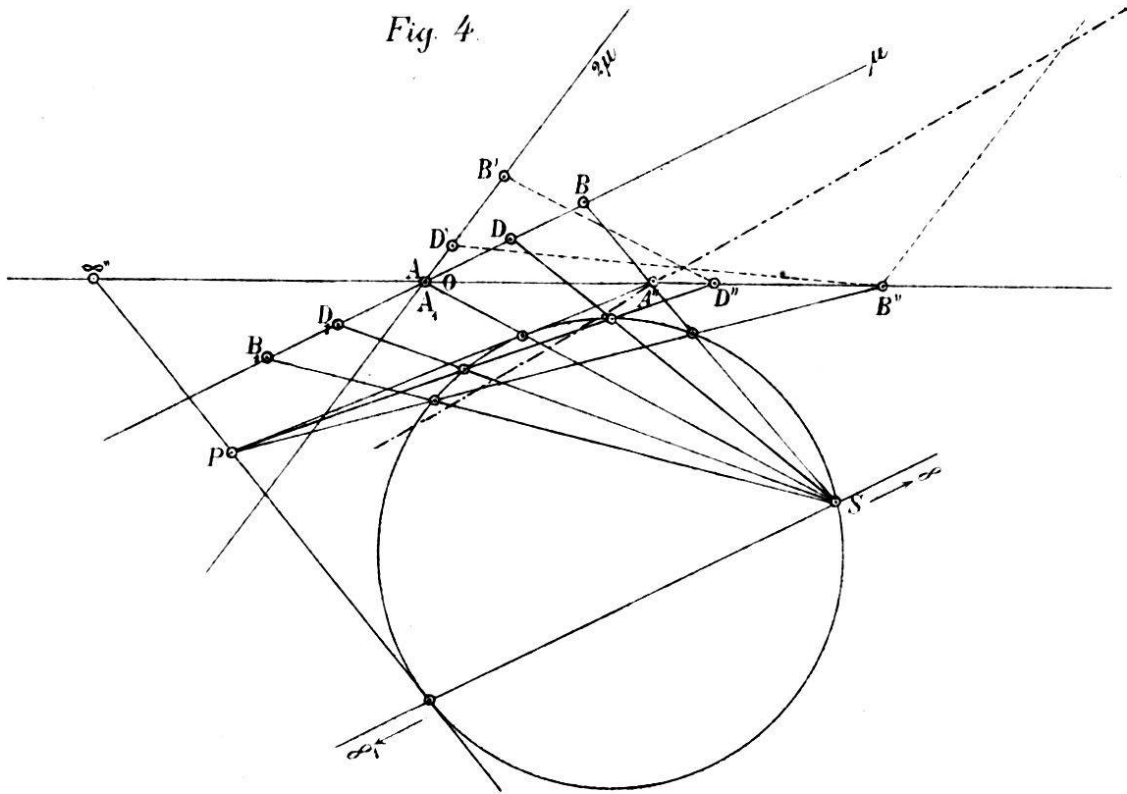


Fig. 7.

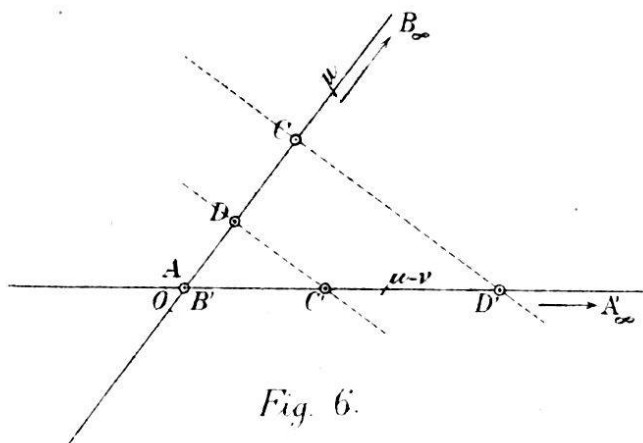
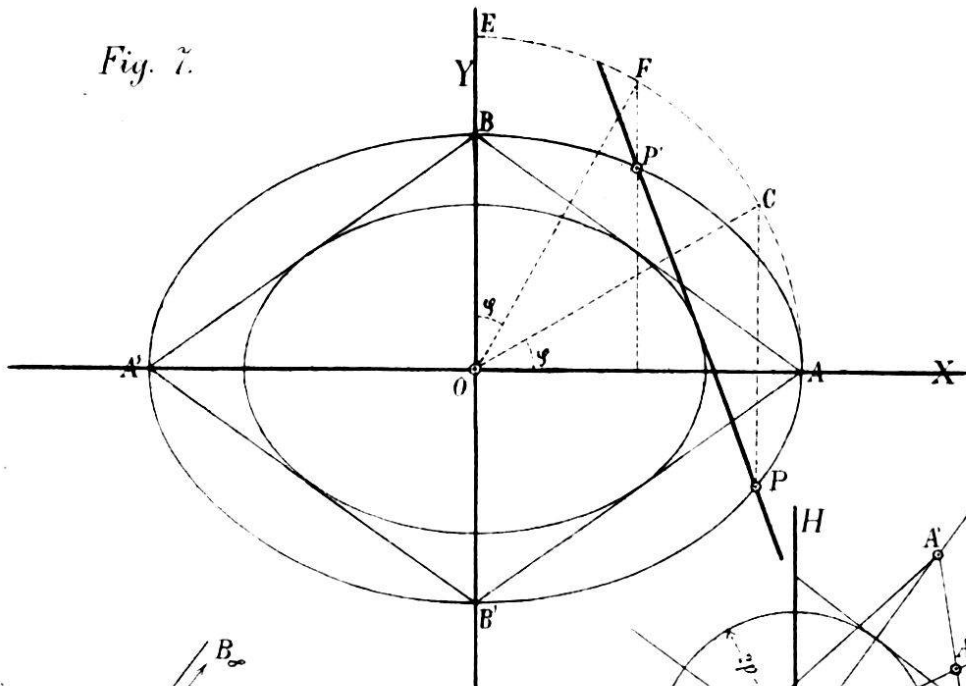


Fig. 6.

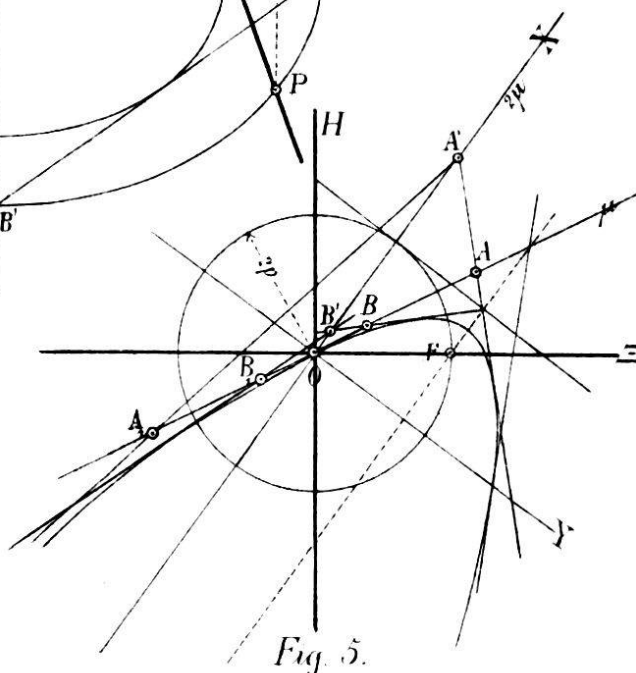


Fig. 5.



pourra être représenté géométriquement par la droite dans l'espace qui joint le point

$$x = \alpha, \quad y = \beta$$

du plan inférieur au point

$$X = \gamma, \quad Y = \delta$$

du plan supérieur.

Ainsi le point imaginaire est toujours représenté par une droite réelle qui, dans le système de coordonnées dans l'espace, a les équations

$$z = \frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{y - \beta}{\delta - \beta}.$$

La discussion de ces équations montre que ce mode de représentation ne souffre aucune exception.

### La droite imaginaire.

La relation linéaire la plus générale entre les variables imaginaires  $\xi$  et  $\eta$  est de la forme

$$(1) \quad (A + Bi) \xi + (C + Di) \eta + (E + Fi) = 0.$$

La représentation géométrique de cette équation sera appelée une *ligne droite imaginaire*. Pour que le point imaginaire  $\xi = \alpha + \beta i$ ,  $\eta = \gamma + \delta i$  appartienne à cette droite, il faut que l'on ait

$$(A + Bi) (\alpha + \beta i) + (C + Di) (\gamma + \delta i) + (E + Fi) = 0,$$

condition qui, moyennant la séparation des parties réelles et imaginaires, se décompose en ces deux autres :

$$A\alpha - B\beta + C\gamma - D\delta + E = 0$$

$$B\alpha + A\beta + D\gamma + C\delta + F = 0.$$

Si l'on y considère  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  comme les paramètres de la droite

$$z = \frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{y - \beta}{\delta - \beta}$$

ou

$$(1 - z) \alpha + z\gamma - x = 0$$

$$(1 - z) \beta + z\delta - y = 0$$

ces deux équations représentent ce qu'on appelle en géométrie une *congruence linéaire*. Or, on sait que toute droite faisant

partie d'une telle congruence rencontre deux droites fixes, appelées les *directrices*. Par conséquent, les droites passant par un point de l'une des directrices sont situées dans le plan déterminé par ce point et l'autre directrice. En désignant par  $x, y, z$  les coordonnées de ce point, on a les quatre équations

$$\begin{aligned} A\alpha - B\beta + C\gamma - D\delta + E &= 0 \\ B\alpha + A\beta + D\gamma + C\delta + F &= 0 \\ (1-z)\alpha + z\gamma - x &= 0 \\ (1-z)\beta + z\delta - y &= 0 \end{aligned}$$

qui peuvent servir à déterminer les quatre paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . On en tire par exemple

$$\alpha = \left| \begin{array}{cccc} -E & -B & C & -D \\ -F & A & D & C \\ x & 0 & z & 0 \\ y & (1-z) & 0 & z \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} A & -B & C & -D \\ B & A & D & C \\ (1-z) & 0 & z & 0 \\ 0 & (1-z) & 0 & z \end{array} \right|$$

Les valeurs de  $\beta, \gamma, \delta$  sont exprimées d'une manière analogue par des fractions de deux déterminants à 16 éléments. Dans ces quatre quotients les dénominateurs sont les mêmes, tandis que les numérateurs diffèrent les uns des autres.

Or, puisqu'une congruence contient une infinité de droites, les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  doivent rester indéterminées. Il s'ensuit que les cinq déterminants en question s'annulent séparément.

Considérons en premier lieu, le dénominateur commun développé et égalé à zéro donne

$$z^2[(A+C)^2 + (B+D)^2] - 2z[C(A+C) + D(B+D)] + C^2 + D^2 = 0$$

ou, si l'on pose pour abréger,

$$A + C = p, \quad B + D = q$$

$$(2) \quad z^2(p^2 + q^2) - 2z(Cp + Dq) + C^2 + D^2 = 0$$

Les racines de cette équation sont

$$\begin{aligned} z &= \frac{Cp + Dq \pm \sqrt{(Cp + Dq)^2 - (p^2 + q^2)(C^2 + D^2)}}{p^2 + q^2} \\ &= \frac{Cp + Dq \pm i(Dp - Cq)}{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

L'on voit qu'elles sont en général imaginaires. Par conséquent les directrices de la congruence dont il s'agit ici, c'est-à-dire celles de la droite imaginaire le sont aussi. S'il est permis de s'exprimer ainsi, on peut dire dès à présent que ces droites, bien qu'elles soient imaginaires, se trouvent dans deux plans parallèles au plan  $xy$ .

Il est utile de signaler les cas où les racines de l'équation (2) deviennent réelles et égales. Ceci arrive lorsque

$$Dp - Cq = 0 \quad \text{ou} \quad AD - BC = 0$$

c'est-à-dire lorsque

1° $A = B = 0$	4° $B = D = 0$
2° $C = D = 0$	5° $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$
3° $A = C = 0$	6° $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

On peut observer que ces six cas se réalisent et correspondent à des racines égales de l'équation (2) chaque fois que le coefficient angulaire de la droite imaginaire (1), à savoir

$$\operatorname{tg} \tau = - \frac{A + Bi}{C + Di}$$

est réel. En effet, les valeurs que prend  $\operatorname{tg} \tau$  dans les six cas, sont respectivement

$$0, \infty, \quad -\frac{B}{D}, \quad -\frac{A}{C}, \quad -\frac{A}{C}, \quad -\frac{B}{D}$$

et les valeurs correspondantes de  $z$  deviennent

$$1, 0, \quad \frac{D}{B + D}, \quad \frac{C}{A + C}, \quad \frac{C}{A + C}, \quad \frac{D}{B + D}.$$

Quant au numérateur de  $\alpha$ , il donne lieu, lorsqu'on le développe et qu'on l'égale à zéro, à l'équation

$$(3) \quad z^2 (Ep + Fq) + xz (Dq + Cp) + yz (Cq - Dp) - \\ - x (C^2 + D^2) - z (FD + EC) = 0$$

qui représente un paraboloïde hyperbolique dont un des plans directeurs est le plan  $z = 0$ . Par conséquent, cette surface con-

tient une infinité de génératrices parallèles au plan  $xy$ . Parmi celles-ci doivent se trouver les deux directrices de la congruence. Afin de les déterminer, il suffit de remplacer dans l'équation (3)  $z$  successivement par les racines  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation (2). On pourra même se contenter de faire une seule fois le calcul nécessaire, vu que les quantités  $z_1$  et  $z_2$  sont conjuguées. De cette manière, l'équation (3) donne

$$z_1^2 (Ep + Fq) + xz_1 (Dq + Cp) + yz_1 (Cq - Dp) - \\ - x (C^2 + D^2) - z_1 (FD + EC) = 0$$

où

$$z_1 = \frac{Cp + Dq + i (Dp - Cq)}{p^2 + q^2}.$$

C'est l'équation de la projection sur le plan  $xy$  de l'une des directrices. Elle peut se mettre sous la forme

$$y = \frac{C^2 + D^2 - z_1 (Cp + Dq)}{z_1 (Cq - Dp)} x + \frac{CE + DF - z_1 (Ep + Fq)}{Cq - Dp}.$$

En introduisant la valeur de  $z_1$  dans le coefficient angulaire de cette droite, il devient

$$\frac{C^2 + D^2 - z_1 (Cp + Dq)}{z_1 (Cq - Dp)} = i,$$

de même le terme indépendant

$$\frac{CE + DF - z_1 (Ep + Fq)}{Cq - Dp} = \frac{Eq - Fp + i (Ep + Fq)}{p^2 + q^2}.$$

Ainsi les équations des deux directrices sont

$$(4) \begin{cases} z = \frac{Cp + Dq + i (Dp - Cq)}{p^2 + q^2}, y = ix + \frac{Eq - Fp + i (Ep + Fq)}{p^2 + q^2} \\ z = \frac{Cp + Dq - i (Dp - Cq)}{p^2 + q^2}, y = -ix + \frac{Eq - Fp - i (Ep + Fq)}{p^2 + q^2} \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que les équations provenant des numérateurs de  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  conduisent aux mêmes droites. Au surplus, il serait aisé d'indiquer une infinité de surfaces sur lesquelles ces droites doivent se trouver.

Il reste à examiner un des cas limites, où l'équation (2) possède une racine réelle double. Soit par exemple

$$A = mC, \quad B = mD,$$

où  $m$  signifie une constante réelle; alors les équations des directrices deviennent

$$\begin{cases} z = \frac{1}{1+m}, y = ix + \frac{DE - CF + i(CE + DF)}{(1+m)(C^2 + D^2)} \\ z = \frac{1}{1+m}, y = -ix + \frac{DE - CF - i(CE + DF)}{(1+m)(C^2 + D^2)} \end{cases}$$

Ces deux droites se trouvent dans le même plan, par conséquent elles se coupent en un point réel dont les coordonnées sont

$$(5) \quad x = -\frac{CE + DF}{C^2 + D^2} \cdot \frac{1}{1+m}, \quad y = \frac{DE - CF}{C^2 + D^2} \cdot \frac{1}{1+m}, \quad z = \frac{1}{1+m}.$$

Or, comme toutes les droites de la congruence doivent rencontrer les deux directrices, elles passent nécessairement par ce point et forment ce qu'on appelle *une gerbe*.

Pour  $m = -1$ , le centre de la gerbe se trouve à l'infini, et les droites sont parallèles. D'ailleurs, il est facile de constater que dans l'hypothèse  $A = mC$ ,  $B = mD$ , le paraboloid hyperbolique (3) dégénère en deux plans, à savoir

$$z = \frac{1}{1+m} \quad \text{et} \quad z = -\frac{C^2 + D^2}{CE + DF} x.$$

*Exemple.* Soit l'équation de la droite imaginaire

$$(a) \quad e^{\mu i} \xi - \eta = 0,$$

où  $\mu$  signifie une constante réelle. Alors

$$A = \cos \mu, \quad B = \sin \mu, \quad C = -1, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0$$

$$p = \cos \mu - 1, \quad q = \sin \mu.$$

Dans ce cas, les équations des directrices de la congruence sont

$$(b) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{2} (1 + i \cotg \frac{1}{2} \mu), y = ix \\ z = \frac{1}{2} (1 - i \cotg \frac{1}{2} \mu), y = -ix. \end{cases}$$

Si l'on restreint la variabilité du point  $(\alpha + \beta i)$  du plan inférieur en lui faisant parcourir une courbe quelconque, le point

$(\gamma + \delta i)$  du plan supérieur parcourra aussi une courbe, et les droites joignant deux points correspondants formeront une surface réglée.

1° En posant par exemple

$$\begin{aligned}\alpha &= a + r \cos \varphi \\ \beta &= b + r \sin \varphi,\end{aligned}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $r$  sont des constantes données, et  $\varphi$  désigne une variable, le point  $(\alpha + \beta i)$  parcourt une circonférence dont le centre est  $(a, b)$  et le rayon  $r$ . Comme

$$\gamma = \alpha \cos \mu - \beta \sin \mu = a \cos \mu - b \sin \mu + r \cos (\varphi + \mu)$$

$$\delta = \alpha \sin \mu + \beta \cos \mu = a \sin \mu + b \cos \mu + r \sin (\varphi + \mu)$$

le point  $(\gamma + \delta i)$  décrit une circonférence du même rayon autour du centre  $(a \cos \mu - b \sin \mu, a \sin \mu + b \cos \mu)$ . La droite dans l'espace déterminée par deux points correspondants a pour équations

$$(c) \quad \frac{x' - r \cos \varphi}{k - 2r \sin (\varphi + \frac{1}{2}\mu) \sin \frac{1}{2}\mu} = \frac{y' - r \sin \varphi}{l + 2r \cos (\varphi + \frac{1}{2}\mu) \sin \frac{1}{2}\mu} = z,$$

où l'on a écrit pour abréger

$$\begin{array}{l|l} x - a = x' & a \cos \mu - b \sin \mu - a = k \\ y - b = y' & a \sin \mu + b \cos \mu - b = l. \end{array}$$

Afin d'obtenir l'équation de la surface réglée formée par l'ensemble de ces droites, il suffit d'éliminer  $\varphi$  entre les équations (c), ce qui donne

$$(x' - kz)^2 + (y' - lz)^2 = r^2 [1 + 4z(z - 1) \sin^2 \frac{1}{2}\mu].$$

Pour  $\pi > \mu > 0$ , c'est l'équation d'un hyperboloïde à une nappe. Le centre de cette surface a les coordonnées  $x' = \frac{1}{2}k$ ,  $y' = \frac{1}{2}l$ ,  $z = \frac{1}{2}$  et l'une des séries de ses sections circulaires est parallèle au plan  $xy$ . *Toutes les génératrices de cet hyperboloïde rencontrent les droites (b) et l'on voit qu'il existe une infinité d'hyperboloïdes qui jouissent de la même propriété.*

Pour  $\mu = \pi$ , la surface

$$(x' + 2az)^2 + (y' + 2bz)^2 = r^2 (1 - 2z)^2$$

devient un cône dont le sommet a les coordonnées

$$x' = -a, \quad y' = -b, \quad z = \frac{1}{2}$$

ou bien 
$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2}.$$

On pouvait s'attendre à ce résultat, puisque dans cette hypothèse le coefficient angulaire de la droite imaginaire  $(a) e^{2i}$  est réel et égal à  $-1$ .

Pour  $\mu = 0$  enfin, la surface est un cylindre circulaire droit

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

En effet, dans ce cas, la quantité  $\frac{A}{C}$ , désignée précédemment par  $m$ , prend la valeur  $-1$ .

2° Un autre cas d'un certain intérêt est celui où le point  $(\alpha + \beta i)$  parcourt, par exemple, l'axe des  $x$ . A cet effet on posera

$$\alpha = \alpha, \quad \beta = 0$$

d'où il suit

$$\gamma = \alpha \cos \mu, \quad \delta = \alpha \sin \mu.$$

Le point  $(\gamma + \delta i)$  du plan supérieur parcourt donc, lui aussi, une ligne droite, à savoir

$$Y = X \operatorname{tg} \mu.$$

Dans ce cas, la droite de jonction de deux points correspondants a pour équations

$$\frac{x - \alpha}{\alpha (\cos \mu - 1)} = \frac{y}{\alpha \sin \mu} = z$$

lesquelles, moyennant l'élimination de la variable  $\alpha$ , fournissent cette autre équation

$$2z \sin \frac{1}{2} \mu (x \cos \frac{1}{2} \mu + y \sin \frac{1}{2} \mu) - y = 0.$$

Pour  $\pi > \mu > 0$ , cette dernière équation représente un paraboloïde hyperbolique dont les génératrices coupent toujours les



deux directrices de la congruence ( $\alpha$ ). C'est cette propriété seule qu'il importe de faire ressortir ici.

Pour  $\mu = 0$  et  $\mu = \pi$ , la surface se réduit au plan  $y = 0$  engendré par des droites parallèles à l'axe des  $z$  ou par des droites se rencontrant au point  $x=y=0$ ,  $z=\frac{1}{2}$ , suivant qu'on suppose  $\mu = 0$  ou  $\mu = \pi$ .

Lorsque la variable imaginaire  $\eta = \gamma + \delta i$  est une fonction analytique de la variable imaginaire  $\xi = \alpha + \beta i$

$$\eta = f(\xi)$$

et qu'on appelle *original* un tracé quelconque dans le plan inférieur, *image* la figure correspondante du plan supérieur, on sait qu'en général les éléments infiniment petits de l'image sont semblables aux éléments infiniment petits correspondants de l'original. De plus, le rapport des dimensions linéaires de l'image à celles de l'original en un point considéré est donné par la valeur absolue de la dérivée  $\frac{d\eta}{d\xi} = f'(\xi)$ , et la déviation de la dérivée mesure l'angle que fait l'élément linéaire considéré de l'image avec l'élément correspondant de l'original. Le cas particulier, à l'étude duquel est destinée la première partie de ce travail, à savoir le cas où  $f(\xi)$  est une fonction linéaire de  $\xi$ , est caractérisé par le fait qu'il existe entre l'image et l'original une similitude parfaite. Si donc le point inférieur parcourt par exemple un faisceau de rayons, le point supérieur parcourra un faisceau de rayons directement égal au premier, mais placé différemment; à une circonférence correspondra une autre circonférence, etc.

En projetant le plan supérieur orthogonalement sur le plan inférieur, on établit une correspondance déterminée entre les différents points d'un même plan. Par ce procédé, les deux faisceaux de rayons directement égaux deviennent projectifs, et leur *produit*, c'est-à-dire le lieu géométrique du point d'intersection de deux rayons correspondants est, on le sait, une circonférence passant par les centres des deux faisceaux. Il ne sera pas inutile de démontrer ce théorème par le calcul.

Soit la relation linéaire entre  $\xi$  et  $\eta$  mise sous la forme

$$(1) \quad \eta = (a + bi)\xi + h + ki$$



On en tire, en posant

$$\eta = X + Yi, \quad \xi = x + yi$$

$$X + Yi = (a + bi)(x + yi) + h + ki$$

d'où il suit, par la séparation des parties réelles et imaginaires

$$(2) \quad \begin{cases} X = ax - by + h \\ Y = bx + ay + k. \end{cases}$$

En remplaçant encore les constantes  $a$  et  $b$  par deux autres  $l$  et  $\nu$ , de sorte que

$$\begin{array}{l|l} a = l \cos \nu & \cos \nu = \frac{a}{l} \\ b = l \sin \nu & \sin \nu = \frac{b}{l} \\ l = +\sqrt{a^2 + b^2} & \operatorname{tg} \nu = \frac{b}{a}, \end{array}$$

il vient

$$\frac{d\eta}{d\xi} = a + bi = l (\cos \nu + i \sin \nu) = l e^{i\nu}.$$

Par conséquent le rapport de l'élément linéaire de l'image au point  $\eta$  à l'élément linéaire de l'original au point  $\xi$  est constant et égal à  $l$  et  $d\eta$  fait avec  $d\xi$  l'angle constant  $\nu$ ; c'est ce qui constitue la similitude parfaite entre l'image et l'original.

Si maintenant le point original parcourt un faisceau de rayons dont l'origine est le centre, on a

$$(3) \quad y = x \operatorname{tg} \mu,$$

où  $\mu$  signifie un paramètre variable. On obtiendra l'image en éliminant  $x$  entre les équations

$$\begin{aligned} X &= (a - b \operatorname{tg} \mu) x + h \\ Y &= (b + a \operatorname{tg} \mu) x + k, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(4) \quad Y - k = \operatorname{tg} (\mu + \nu) (X - h)$$

et ceci est bien un faisceau de rayons directement égal au premier. Son centre est le point  $(h, k)$  et ses rayons font l'angle  $\nu$  avec les rayons correspondants de l'original. Pour avoir le pro-

duit des deux faisceaux (3) et (4), on écrit  $x$  et  $y$  à la place de  $X$  et  $Y$ , et on élimine le paramètre  $\mu$  entre ces deux équations. On trouve ainsi la circonférence

$$(5) \left(x - \frac{bh - ak}{2b}\right)^2 + \left(y - \frac{ah + bk}{2b}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{a^2 + b^2}{b^2} (h^2 + k^2) = \frac{h^2 + k^2}{4 \sin^2 \nu}$$

De cette équation on déduit facilement celle répondant au cas plus général où le centre du faisceau original n'est pas l'origine, mais le point  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ . Il suffit, en effet, de remplacer dans (5)

$$\begin{array}{l|l} x \text{ par } x - \alpha & \\ y \text{ » } y - \beta & \text{où } \gamma = a\alpha - b\beta + h \\ h \text{ » } \gamma - \alpha & \delta = b\alpha + a\beta + k. \\ k \text{ » } \delta - \beta & \end{array}$$

Tandis qu'en général à chaque point du plan correspond un autre point du plan, il en est un qui se correspond à lui-même. Ce point remarquable est appelé *le point double du plan*. Ses coordonnées  $x_0, y_0$  se trouvent en posant dans les équations (2)  $X = x = x_0, Y = y = y_0$  et en les résolvant par rapport à  $x_0$  et  $y_0$ . Il vient

$$(a - 1) x_0 - b y_0 + h = 0$$

$$b x_0 + (a - 1) y_0 + k = 0$$

et

$$(6) \quad \begin{cases} x_0 = -\frac{h(a-1) + bk}{(a-1)^2 + b^2} \\ y_0 = -\frac{k(a-1) - bh}{(a-1)^2 + b^2} \end{cases}$$

On voit que dans le cas, en étude, il existe un seul point double. Il s'ensuit qu'une seule des droites faisant partie de la congruence, est perpendiculaire au plan  $xy$ . Nécessairement le point double est situé sur toutes les circonférences engendrées par deux faisceaux correspondants. D'ailleurs il serait aisé de le vérifier par le calcul. Ce fait permet la solution des problèmes fondamentaux sur la ligne droite.

*Premier problème.* D'une ligne droite imaginaire, on donne deux points imaginaires; construire la ligne droite.

Par la projection du plan supérieur sur le plan inférieur, la solution du problème est ramenée à une construction plane. En effet, envisagée de cette manière, la question proposée revient à celle-ci : Dans un plan, étant données les couples de points correspondants  $AA'$ ,  $BB'$ , construire le correspondant  $C'$  d'un troisième point donné quelconque  $C$ .

Les deux droites  $AB$  et  $A'B'$  peuvent être considérées comme deux rayons correspondants de deux faisceaux projectifs aux centres  $A$  et  $A'$ , ou bien  $B$  et  $B'$ . En vertu du théorème démontré plus haut, leur point d'intersection  $J$  appartient aux deux circonférences déterminées, l'une par les trois points  $AA'J$  et l'autre par les trois points  $BB'J$ . Le second point commun à ces deux circonférences est le point double du plan  $(x_0, y_0)$ . Or, le point d'intersection de deux rayons quelconques des faisceaux  $A$  et  $B$  correspond au point de rencontre des rayons correspondants des faisceaux  $A'$  et  $B'$ . Par conséquent, pour avoir  $C'$ , il suffit de mener par  $C$  les rayons  $AC$  et  $BC$  qui rencontrent les circonférences  $AA'J$  et  $BB'J$  respectivement en  $M$  et  $N$ ; le point d'intersection des droites  $A'M$  et  $B'N$  sera le point  $C'$ . (Voir fig. 1, pl. I.)

*Deuxième problème.* D'une droite imaginaire on donne un point et la direction, on demande de construire la droite

Soit  $(\xi_1, \eta_1)$  le point,  $(a + bi)$  le coefficient angulaire donné, de sorte que l'équation de la droite est

$$\eta - \eta_1 = (a + bi)(\xi - \xi_1).$$

Alors on connaît  $l = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\operatorname{tg} \nu = \frac{b}{a}$  et il est facile de

trouver une autre couple de points correspondants. Soit, par exemple,  $A$  le point  $\xi_1$ ,  $A'$  le point  $\eta_1$ , les deux ramenés dans le même plan. A la droite limitée  $AB$ , dont la longueur est 1, correspondra une droite  $A'B'$  de la longueur  $l$ , et faisant l'angle  $\nu$  avec la direction  $AB$ . Les points  $B$  et  $B'$  sont une seconde couple de points correspondants, et par là le problème est ramené au précédent.

*Intersection de deux droites imaginaires.* Soient les deux droites

$$(7) \quad \begin{cases} \eta = (a_1 + b_1 i) \xi + h_1 + k_1 i \\ \eta = (a_2 + b_2 i) \xi + h_2 + k_2 i. \end{cases}$$

De même que deux droites dans un plan se coupent toujours en un point réel, les deux congruences déterminées par ces deux équations possèdent un point imaginaire, c'est-à-dire une droite réelle commune. On peut demander de construire cette droite.

Au faisceau de rayons dans le plan inférieur

$$y - \beta = \operatorname{tg} \mu (x - \alpha),$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes et  $\mu$  désigne un paramètre variable, correspondent dans le plan supérieur les deux faisceaux

$$(8) \quad \begin{cases} Y - y_1 = \frac{b_1 + a_1 \operatorname{tg} \mu}{a_1 - b_1 \operatorname{tg} \mu} (X - x_1) \\ Y - y_2 = \frac{b_2 + a_2 \operatorname{tg} \mu}{a_2 - b_2 \operatorname{tg} \mu} (X - x_2), \end{cases}$$

où l'on a posé pour abréger

$$\begin{array}{l|l} x_1 = a_1 \alpha - b_1 \beta + h_1 & x_2 = a_2 \alpha - b_2 \beta + h_2 \\ y_1 = b_1 \alpha + a_1 \beta + k_1 & y_2 = b_2 \alpha + a_2 \beta + k_2 \end{array}$$

Etant projectifs à un troisième faisceau, ces deux faisceaux sont eux-mêmes projectifs. De plus ils sont directement égaux; leur produit est par conséquent encore une circonférence passant par les deux centres  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ . On vérifie aisément que les coordonnées du centre de cette circonférence ont pour expression

$$\frac{u (y_1 - y_2) + v (x_1 + x_2)}{2v}$$

$$\frac{v (y_1 + y_2) - u (x_1 - x_2)}{2v}$$

et que son rayon  $R$  est

$$R = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2v} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

où

$$\begin{aligned} u &= a_1 a_2 + b_1 b_2 \\ v &= a_1 b_2 - b_1 a_2. \end{aligned}$$

Maintenant, la construction de la droite commune aux deux congruences (7) est facile. Soient  $\xi$ ,  $\eta$  les traces de la droite cherchée dans les deux plans parallèles  $xy$  et  $XY$ , et soit la

première congruence donnée par les couples de points correspondants  $AA'$ ,  $BB'$ , la seconde par les couples  $CC''$ ,  $DD''$ , les points  $A, B, C, D$  se trouvant dans le plan inférieur,  $A', B', C'', D''$  dans le plan supérieur. Afin d'obtenir dans le plan supérieur deux faisceaux projectifs, il s'agirait de construire dans ce plan (qu'on se figure toujours projeté sur le plan inférieur) les points  $E', E'', F', F''$  correspondant à deux points quelconques  $E$  et  $F$  du plan inférieur. La construction est un peu simplifiée, si au lieu des points arbitraires  $E$  et  $F$  on choisit les points déjà donnés  $A$  et  $B$ , et qu'on cherche leurs correspondants  $A''$  et  $B''$ . Or, que l'on considère  $A'$  et  $A''$  ou  $B'$  et  $B''$  comme centres de deux faisceaux projectifs, les droites  $A'B'$  et  $A''B''$  (ou bien  $B'A'$  et  $B''A''$ ) seront deux rayons correspondants. Ils se rencontrent en un point  $J$ . Possédant ce point, on pourra tracer les deux circonférences déterminées, l'une par les trois points  $A'A''J$ , l'autre par les trois points  $B'B''J$ . Ces deux circonférences se coupent en deux points; l'un est  $J$  et l'autre est le point cherché  $\eta$ . Ce point  $\eta$  étant connu, le point  $\xi$  se trouvera alors de la manière indiquée précédemment. (Voir fig. 2, pl. I.)

La solution du problème proposé se simplifie encore dans le cas particulier, où  $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ . En effet, dans cette hypothèse, les rayons correspondants des deux faisceaux (8) sont parallèles. Par conséquent, leur produit se compose de la droite joignant les deux centres  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$

$$(9) \quad y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

et de la droite à l'infini. Dans le cas général, toutes les circonférences telles que  $A'A''J$ ,  $B'B''J$  passaient par le point  $\eta$ ; maintenant, les droites  $A'A''$ ,  $B'B''$ , etc., forment un faisceau ayant pour centre le point cherché  $\eta$ . Deux de ces droites, par exemple  $A'A''$  et  $B'B''$ , suffisent pour déterminer ce dernier. On vérifie sans difficulté que les droites (9) constituent un faisceau. En effet, en remplaçant  $x_1, y_1; x_2, y_2$  par leurs valeurs et en posant  $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} = m$ , il vient

$$y - (b_1\alpha + a_1\beta + k_1) = \frac{(1-m)(b_1\alpha + a_1\beta) + k_1 - k_2}{(1-m)(a_1\alpha - b_1\beta) + h_1 - h_2} [x - (a_1\alpha - b_1\beta + h_1)]$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \alpha \left[ a_1 \left( y - k_1 + \frac{k_1 - k_2}{1 - m} \right) - b_1 \left( x - h_1 + \frac{h_1 - h_2}{1 - m} \right) \right] - \\ & - \beta \left[ b_1 \left( y - k_1 + \frac{k_1 - k_2}{1 - m} \right) + a_1 \left( x - h_1 + \frac{h_1 - h_2}{1 - m} \right) \right] + \\ & + \frac{h_1 - h_2}{1 - m} \left( y - k_1 + \frac{k_1 - k_2}{1 - m} \right) - \frac{k_1 - k_2}{1 - m} \left( x - h_1 + \frac{h_1 - h_2}{1 - m} \right) = 0 \end{aligned}$$

qui prouve que la droite passe par le point

$$x = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{1 - m}, \quad y = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{1 - m}.$$

Lorsque  $m = 1$ , c'est-à-dire  $a_2 = a_1$ ,  $b_2 = b_1$ , ce point se trouve à l'infini et les droites imaginaires (7) sont parallèles.

Des considérations d'un autre ordre peuvent se rattacher à l'équation (1), p. 10. Qu'on se figure encore le plan supérieur projeté sur le plan inférieur. Sur deux rayons correspondants des faisceaux aux centres O et  $(h, k)$ , on marque deux points correspondants. Si celui des points qui peut être envisagé comme l'original (tandis que son correspondant est l'image) se trouve à la distance  $r$  de O, les deux points ont pour coordonnées

$$\text{l'original : } \begin{cases} r \cos \mu, \\ r \sin \mu, \end{cases} \quad \text{l'image : } \begin{cases} ar \cos \mu - br \sin \mu + h \\ br \cos \mu + ar \sin \mu + k. \end{cases}$$

En posant pour abrégé

$$(a - 1) \cos \mu - b \sin \mu = A$$

$$b \cos \mu + (a - 1) \sin \mu = B,$$

on trouve les relations

$$\begin{array}{l|l} B \cos \mu - A \sin \mu = b & \cos \mu = \frac{A(a - 1) + Bb}{C} \\ B \sin \mu + A \cos \mu = a - 1 & \sin \mu = \frac{B(a - 1) - Ab}{C} \\ A^2 + B^2 = (a - 1)^2 + b^2 = C & \frac{\partial A}{\partial \mu} = -B, \quad \frac{\partial B}{\partial \mu} = A. \end{array}$$

Alors la droite déterminée par les deux points marqués a pour équation



$$(10) \quad y - r \sin \mu = \frac{Br + k}{Ar + h} (x - r \cos \mu)$$

ou

$$(10^a) \quad (y - r \sin \mu) (Ar + h) - (x - r \cos \mu) (Br + k) = 0.$$

Dans cette équation on peut regarder  $\mu$  comme constant et  $r$  comme un paramètre variable ou inversement, et dans les deux cas l'enveloppe de toutes ces droites présente un certain intérêt.

Soit premièrement  $\mu$  constant et  $r$  variable. Afin de trouver l'enveloppe en question, on éliminera  $r$  entre l'équation (10<sup>a</sup>) et celle qui en résulte, en différentiant l'équation (10<sup>a</sup>) par rapport à  $r$ . La différentiation indiquée donne

$$-\sin \mu (Ar + h) + A(y - r \sin \mu) + \cos \mu (Br + k) - B(x - r \cos \mu) = 0,$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{Bx - Ay + h \sin \mu - k \cos \mu}{2b};$$

cette valeur de  $r$  introduite dans l'équation (10<sup>a</sup>) fournit comme équation de l'enveloppe cherchée

$$(11) \quad (Bx - Ay + h \sin \mu - k \cos \mu)^2 = 4b (hy - kx).$$

C'est l'équation d'une parabole, ou bien, si l'on veut regarder aussi  $\mu$  comme variable, celle d'un système de paraboles. La droite  $hy - kx = 0$  est une tangente commune à toutes ces courbes, et la droite

$$Bx - Ay + h \sin \mu - k \cos \mu = 0$$

représente pour chaque valeur de  $\mu$  un diamètre de la parabole correspondante.

Avant d'entreprendre la discussion complète et la transformation de l'équation (11), il est utile de remarquer que la droite (10) est la projection sur le plan  $xy$  d'une droite dans l'espace faisant partie de la congruence (1). Cette droite a pour équations

$$(10^b) \quad \frac{x - r \cos \mu}{Ar + h} = \frac{y - r \sin \mu}{Br + k} = z$$

ou

$$\begin{cases} x - hz = r (Az + \cos \mu) \\ y - kz = r (Bz + \sin \mu) \end{cases}$$

En y considérant  $r$  comme variable,  $\mu$  comme constant, l'ensemble de ces droites forme une surface réglée dont l'équation s'obtient par l'élimination de  $r$  entre les deux dernières équations. Il vient

$$\frac{x - hz}{y - kz} = \frac{Az + \cos \mu}{Bz + \sin \mu}, \quad \text{ou}$$

$$(13) \quad (Ak - Bh) z^2 + Bxz - Ayz + x \sin \mu - y \cos \mu + z (k \cos \mu - h \sin \mu) = 0.$$

Cette équation représente un parabolôide hyperbolique ou plutôt, si l'on envisage aussi  $\mu$  comme un paramètre variable, un système de parabolôides hyperboliques. En remplaçant A et B par leurs valeurs, elle peut se mettre sous la forme

$$\cos \mu \{ (kz - y) [(a - 1) z + 1] - bz (hz - x) \} - \\ - \sin \mu \{ (kz - y) bz + [(a - 1) z + 1] (hz - x) \} = 0.$$

Cette équation prouve que toutes ces surfaces forment ce qu'on appelle un faisceau de surfaces. En effet, elles passent toutes par l'intersection des deux surfaces particulières

$$(14) \quad \begin{cases} (kz - y) [(a - 1) z + 1] - bz (hz - x) = 0 \\ (kz - y) bz + [(a - 1) z + 1] (hz - x) = 0. \end{cases}$$

Or, on voit immédiatement que ces deux équations sont satisfaites par  $kz - y = 0$ ,  $hz - x = 0$ . Ensuite, si on les rend homogènes en substituant à  $x, y, z$  les rapports  $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$ , elles sont vérifiées simultanément par  $p = 0$ ,  $z = 0$ , ce qui veut dire que la droite à l'infini du plan  $z = 0$  appartient à tous les parabolôides. En troisième lieu, on peut considérer les équations (14) comme étant homogènes par rapport aux expressions  $kz - y$  et  $hz - x$ . Alors elles seront aussi satisfaites, si l'on annule leur déterminant, ce qui donne

$$[(a - 1) z + 1]^2 + b^2 z^2 = Cz^2 + 2(a - 1)z + 1 = 0,$$

où  $C = (a - 1)^2 + b^2$

comme précédemment. De cette équation on tire

$$z_1 = \frac{-(a - 1) + bi}{C}, \quad z_2 = \frac{-(a - 1) - bi}{C}$$



Il est utile de remarquer dès à présent que

$$\frac{bz_1}{(a-1)z_1+1} = i$$

et par suite

$$(a-1)z_1+1 = -ibz_1,$$

de même

$$\frac{bz_2}{(a-1)z_2+1} = -i$$

et partant

$$(a-1)z_2+1 = ibz_2;$$

puis

$$\begin{aligned} kz_1 - \frac{bz_1^2}{(a-1)z_1+1} &= kz_1 + \frac{bz_1^2}{ibz_1} = (k-ih)z_1 = \\ &= (k-ih) \frac{bi-(a-1)}{C} = -\frac{k(a-1)-bh}{C} + i \frac{h(a-1)+bk}{C} = y_0 - ix_0 \end{aligned}$$

et de même

$$kz_2 - \frac{bz_2^2}{(a-1)z_2+1} = y_0 + ix_0.$$

Introduisant successivement  $z_1$  et  $z_2$  à la place de  $z$  dans la première des équations (14) et la résolvant par rapport à  $y$ , on obtient

$$y = \frac{bz_1}{(a-1)z_1+1} x + \left[ kz_1 - \frac{bz_1^2}{(a-1)z_1+1} \right] = ix + y_0 - ix_0$$

et

$$y = \frac{bz_2}{(a-1)z_2+1} x + \left[ kz_2 - \frac{bz_2^2}{(a-1)z_2+1} \right] = -ix + y_0 + ix_0.$$

Or, on se rappellera que les directrices de la congruence linéaire

$$(A+Bi)\xi + (C+Di)\eta + E + Fi = 0$$

étaient (formules (4) p. 6)

$$z = \frac{Cp + Dq \pm i(Dp - Cq)}{p^2 + q^2}, \quad y = \pm ix + \frac{Eq - Fp \pm i(Ep + Fq)}{p^2 + q^2}.$$

Pour adapter ces formules au cas de la congruence

$$\eta = (a+bi)\xi + h + ki,$$

il suffit d'y faire les substitutions

$$A = a, \quad B = b, \quad C = -1, \quad D = 0, \quad E = h, \quad F = k, \\ p = A + C = a - 1, \quad q = B + D = b,$$

ce qui fournit

$$z = \frac{-(a-1) + bi}{(a-1)^2 + b^2}, \quad y = ix + \frac{hb - k(a-1) + i[h(a-1) + kb]}{(a-1)^2 + b^2} = \\ = ix + y_0 - ix_0$$

$$z = \frac{-(a-1) - bi}{(a-1)^2 + b^2}, \quad y = -ix + \frac{hb - k(a-1) - i[h(a-1) + kb]}{(a-1)^2 + b^2} = \\ = -ix + y_0 + ix_0.$$

Par conséquent, les deux droites imaginaires communes à tous les paraboloides hyperboliques, sont précisément les directrices de la congruence (1).

Ainsi, les surfaces composant le faisceau (13) passent toutes par une courbe gauche du 4<sup>me</sup> ordre qui dégénère en quatre lignes droites, à savoir: 1° la droite  $kz - y = 0$ ,  $hz - x = 0$ ; 2° la droite à l'infini du plan  $z = 0$ ; 3° et 4° les directrices imaginaires de la congruence (1).

De cette propriété des paraboloides (13) découle une propriété remarquable des paraboles (11). Ces dernières sont les contours apparents des dits paraboloides sur le plan  $xy$ . En effet, on sait qu'en désignant par  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les cosinus directeurs de ses génératrices, le cylindre tangent à la surface du second ordre

$$u = f(x, y, z) = 0$$

est donné par la formule

$$2u \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2bc \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2ca \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) = \\ = \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

et que la courbe suivant laquelle il touche la surface se trouve dans le plan

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Or, en l'appliquant aux surfaces (13)

$$(13) \quad (Ak - Bh) z^2 + Bxz - Ayz + \\ + x \sin \mu - y \cos \mu + z (k \cos \mu - h \sin \mu) = 0$$

et en y faisant  $a = b = 0$ ,  $c = 1$ , elle conduit à l'équation (11), à savoir

$$(11) \quad (Bx - Ay + h \sin \mu - k \cos \mu)^2 = 4b (hy - kx).$$

Les courbes de contact sont situées dans les plans

$$\frac{1}{2} Bx - \frac{1}{2} Ay + (Ak - Bh) z + \frac{1}{2} (k \cos \mu - h \sin \mu) = 0$$

ou

$$\cos \mu \left\{ bx - (a - 1) y + 2 [k(a - 1) - bh] z + k \right\} + \\ + \sin \mu \left\{ (a - 1) x + by - 2 [bk + h(a - 1)] z - h \right\} = 0,$$

qui forment un faisceau, comme cela devait être, puisque les paraboloides (13) forment eux-mêmes un faisceau. D'ailleurs, ces plans sont les plans polaires des paraboloides par rapport au point à l'infini de l'axe des  $z$  comme pôle.

Afin de soumettre les paraboles en question à une étude plus approfondie, on transformera l'équation (11) à l'aide des substitutions

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{A\xi + B\eta}{\sqrt{C}} \\ y = \frac{B\xi - A\eta}{\sqrt{C}} \end{array} \right. \quad \text{d'où il suit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{Ax + By}{\sqrt{C}} \\ \eta = \frac{Bx - Ay}{\sqrt{C}} \end{array} \right.$$

Elle prend alors la forme

$$\left[ \eta + \frac{(Bh - Ak)(a - 1) + b(Ah + Bk)}{C^{\frac{3}{2}}} \right]^2 = \\ = 4b \frac{Bh - Ak}{C^{\frac{3}{2}}} \left[ \xi + \frac{(Ah + Bk)(a - 1)}{C^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Posant encore pour simplifier

$$\xi + \frac{(Ah + Bk)(a - 1)}{C^{\frac{3}{2}}} = X$$

$$\eta + \frac{(Bh - Ak)(a - 1) + b(Ah + Bk)}{C^{\frac{3}{2}}} = Y,$$

il vient

$$Y^2 = 4b \frac{Bh - Ak}{C^{\frac{3}{2}}} X.$$

Par conséquent, une quelconque des paraboles a le paramètre

$$2b \frac{Bh - Ak}{C^{\frac{3}{2}}},$$

son foyer est donné par

$$(15) \quad X = b \frac{Bh - Ak}{C^{\frac{3}{2}}}, \quad Y = 0,$$

et sa directrice possède l'équation

$$(16) \quad X = -b \frac{Bh - Ak}{C^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, par le retour au système primitif de coordonnées, les expressions (15) fournissent comme coordonnées du foyer

$$(17) \quad \begin{cases} x = -\frac{h(a - 1) + bk}{C} = x_0 \\ y = -\frac{k(a - 1) - bh}{C} = y_0, \end{cases}$$

tandis que l'équation de la directrice (16) devient

$$(18) \quad Ax + By + h \cos \mu + k \sin \mu = 0.$$

On voit ainsi que *toutes les paraboles (11), sans être homofocales dans le sens général du mot, ont un foyer commun qui est précisément le point double du plan xy.* Quant aux directrices, elles forment un faisceau de rayons, car leur équation peut se mettre sous la forme

$$\cos \mu [(a - 1)x + by + h] + \sin \mu [-bx + (a - 1)y + k] = 0$$

qui prouve qu'elles passent toutes par le point d'intersection des droites

$$(a-1)x + by + h = 0$$

$$-bx + (a-1)y + k = 0$$

à savoir

$$\begin{cases} x = -\frac{h(a-1) - bk}{C} = x_1 \\ y = -\frac{k(a-1) + bh}{C} = y_1, \end{cases}$$

Dans la suite, ce point  $(x_1, y_1)$  jouera encore une fois un rôle important.

Maintenant il est facile de prévoir que l'équation (11) pourra aussi prendre la forme

$$(Ax + By + h \cos \mu + k \sin \mu)^2 = C [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2].$$

On en conclut que les droites imaginaires

$$(19) \begin{cases} y - y_0 + i(x - x_0) = 0 \\ y - y_0 - i(x - x_0) = 0, \end{cases}$$

qui joignent le point  $(x_0, y_0)$  aux points circulaires imaginaires à l'infini du plan  $xy$  sont deux tangentes communes à toutes les paraboles (11). Ceci montre une fois de plus que ces paraboles ont le point  $(x_0, y_0)$  pour foyer commun. De plus, on remarquera que les droites (19) sont les projections sur le plan  $xy$  des directrices de la congruence (1).

La propriété des paraboloides (13) consistant en ce que leurs cylindres tangents parallèles à l'axe des  $z$  sont coupés par des plans parallèles au plan  $xy$  suivant des paraboles ayant un foyer commun, est susceptible d'une certaine généralisation. En effet, par des calculs analogues, mais plus longs, on démontrerait qu'elle s'étend à tous les cônes tangents dont le centre commun se trouve en dehors du plan  $xy$ .

Pour résumer l'étude qui vient d'être faite, on peut dire : *Les droites faisant partie de la congruence (1) (leur nombre est doublement infini) se groupent suivant une infinité de paraboloides hyperboliques. Ces surfaces passent toutes par quatre droites dans l'espace dont deux sont réelles, tandis que les deux autres sont les directrices imaginaires de la congruence (1). Leur pro-*

jection centrale sur le plan  $xy$  est un système de paraboles ayant un foyer commun, pourvu que le centre de projection, qui d'ailleurs est complètement arbitraire, ne soit pas situé dans le plan  $xy$ . En particulier, leur contour apparent sur le plan  $xy$  consiste en un système de paraboles dont le foyer commun est le point double du plan.

---

Il existe une autre manière de grouper les droites de la congruence. En effet, si dans les équations de la droite (10<sup>b</sup>)

$$(10^b) \frac{x - r \cos \mu}{r[(a-1) \cos \mu - b \sin \mu] + h} = \frac{y - r \sin \mu}{r[b \cos \mu + (a-1) \sin \mu] + k} = z$$

on envisage  $\mu$  comme variable et  $r$  comme constant, et qu'on élimine  $\mu$  entre elles, on obtient encore une surface réglée. Les équations (10<sup>b</sup>) peuvent s'écrire

$$\begin{cases} x - hz = r \{ \cos \mu [1 + (a-1)z] - bz \sin \mu \} \\ y - kz = r \{ \sin \mu [1 + (a-1)z] + bz \cos \mu \}. \end{cases}$$

L'élimination indiquée s'effectue alors en élevant les deux membres de ces équations au carré et en ajoutant les résultats terme par terme; il vient

$$(20) \quad (x - hz)^2 + (y - kz)^2 = r^2 \{ [1 + (a-1)z]^2 + b^2 z^2 \} = r^2 [1 + 2(a-1)z + Cz^2].$$

Cette équation représente un hyperboloïde à une nappe ou bien, si l'on y considère  $r$  comme un paramètre variable, un système d'hyperboloïdes. On remarque tout d'abord que ces surfaces sont concentriques et que le centre a les coordonnées

$$x = -\frac{h(a-1)}{C}, \quad y = -\frac{k(a-1)}{C}, \quad z = -\frac{a-1}{C}.$$

L'une des séries de leurs sections circulaires se trouve dans les plans parallèles au plan  $z = 0$ , tandis que l'orientation de l'autre série varie avec  $r$ , c'est-à-dire qu'elle est différente pour les différents hyperboloïdes.

L'équation (20) fait reconnaître immédiatement que les hy-

perboloïdes passent tous par l'intersection des deux surfaces particulières

$$\begin{cases} (x - hz)^2 + (y - kz)^2 = 0 \\ Cz^2 + 2(a - 1)z + 1 = 0 \end{cases}$$

et qu'en conséquence ils forment un faisceau de surfaces. De la dernière de ces deux équations on tire

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-(a-1) + ib}{C} \\ z_2 = \frac{-(a-1) - ib}{C} \end{cases}$$

En introduisant successivement  $z_1$  et  $z_2$  à la place de  $z$  dans la première équation, on trouve

$$\begin{aligned} y - kz_1 &= \pm i(x - hz_1) \\ y - kz_2 &= \pm i(x - hz_2), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} y &= \pm ix + \frac{-k(a-1) \pm ih(a-1) + ikb \pm hb}{C} \\ y &= \pm ix + \frac{-k(a-1) \pm ih(a-1) - ikb \mp hb}{C} \end{aligned}$$

ou encore, en séparant les doubles signes

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = ix + \frac{hb - k(a-1) + i[h(a-1) + bk]}{C} = ix + y_0 - ix_0 \\ y = -ix + \frac{-hb - k(a-1) + i[bk - h(a-1)]}{C} = -ix + y_1 + ix_1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = ix + \frac{-bh - k(a-1) + i[h(a-1) - bk]}{C} = ix + y_1 - ix_1 \\ y = -ix + \frac{bh - k(a-1) - i[h(a-1) + bk]}{C} = -ix + y_0 + ix_0 \end{cases} \end{aligned}$$

La courbe du 4<sup>e</sup> ordre, commune à tous les hyperboloïdes, se compose donc des quatre droites imaginaires

$$\begin{aligned}
1^\circ \quad z &= \frac{-(a-1) + ib}{C}, \quad y = ix + y_0 - ix_0 \\
2^\circ \quad z &= \frac{-(a-1) - ib}{C}, \quad y = -ix + y_0 + ix_0 \\
3^\circ \quad z &= \frac{-(a-1) - ib}{C}, \quad y = ix + y_1 - ix_1 \\
4^\circ \quad z &= \frac{-(a-1) + ib}{C}, \quad y = -ix + y_1 + ix_1.
\end{aligned}$$

Les droites (1°) et (2°) sont les directrices de la congruence (1), tandis que les droites (3°) et (4°) seraient les directrices de la congruence

$$\eta = (a - bi) \xi + h + ki.$$

La présence des deux dernières droites dans la courbe du 4° ordre s'explique par le fait que dans l'équation (20) la quantité  $b$  n'entre qu'au carré.

Afin de trouver une autre propriété importante des hyperboloïdes, on transformera leur équation en coordonnées tangentielles tétraédriques. A cet effet, on rendra d'abord homogène l'équation (20) en remplaçant  $x, y, z$  par les rapports  $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$  et en multipliant par  $p^2$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
(20^a) \quad f(x, y, z, p) &= x^2 + y^2 + (h^2 + k^2 - r^2 C) z^2 - 2h x z - \\
&\quad - 2k y z - 2r^2 (a - 1) z p - r^2 p^2 = 0.
\end{aligned}$$

La transformation se fait alors à l'aide des formules connues

$$\frac{1}{2} f'(x) = x - h z = u$$

$$\frac{1}{2} f'(y) = y - k z = v.$$

$$\frac{1}{2} f'(z) = (h^2 + k^2 - r^2 C) z - h x - k y - r^2 (a - 1) p = w$$

$$\frac{1}{2} f'(p) = -r^2 (a - 1) z - r^2 p = q,$$

d'où l'on tire



$$x = \frac{1}{r^2 b^2} [r^2 b^2 - h^2] u - hkv - hw + h(a-1)q]$$

$$y = \frac{1}{r^2 b^2} [-hku + (r^2 b^2 - k^2)v - kw + k(a-1)q]$$

$$z = -\frac{1}{r^2 b^2} [hu + kv + w - (a-1)q]$$

$$p = \frac{1}{r^2 b^2} [(a-1)hu + (a-1)kv + (a-1)w - Cq].$$

Toute réduction faite, il vient

$$(21) \quad r^2 b^2 (u^2 + v^2) - h^2 u^2 - k^2 v^2 - w^2 - Cq^2 - 2hku v - 2huw - 2kvw + 2h(a-1)uq + 2k(a-1)vq + 2(a-1)wq = 0.$$

Si l'on passe maintenant aux coordonnées tangentielles cartésiennes, en posant  $q = 1$ , et que l'on assigne ensuite à  $w$  une valeur particulière  $w_0$ , l'ensemble des deux équations

$$(22) \quad \begin{cases} r^2 b^2 (u^2 + v^2) - h^2 u^2 - k^2 v^2 - w^2 - 2hku v - 2huw - 2kvw + \\ \quad + 2h(a-1)u + 2k(a-1)v + 2(a-1)w - C = 0 \\ w = w_0 \end{cases}$$

représente un système de cônes concentriques tangents aux hyperboloïdes. Le centre commun est un point quelconque de l'axe des  $z$ , donné par l'équation  $w = w_0$  ou par ses coordonnées

$x = y = 0$ ,  $z = -\frac{1}{w_0}$ , et les courbes de contact se trouvent dans les plans

$$(h^2 + k^2)z - hx - ky + r^2 \{ [w_0(a-1) - C]z + w_0 - (a-1) \} = 0.$$

formant un faisceau qui n'est autre que le faisceau des plans polaires des hyperboloïdes par rapport au centre des cônes comme pôle.

Or, la forme de la première des équations (22) permet de reconnaître immédiatement que les sections de ces cônes faites par des plans parallèles au plan  $xy$  forment un système de sections coniques homofocales. Il est aisé de voir que cette propriété subsiste pour tous les cônes concentriques dont le centre se trouve en dehors du plan  $xy$ . En particulier, lorsque  $w_0 = 0$ , les deux équations

$$(23) \begin{cases} r^2 b^2 (u^2 + v^2) - h^2 u^2 - k^2 v^2 - 2hku v + 2h(a-1)u + \\ \quad + 2k(a-1)v - C = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

sont l'expression analytique des cylindres tangents aux hyperboloïdes, ayant leurs génératrices parallèles à l'axe des  $z$ . Ces cylindres déterminent sur le plan  $xy$  le contour apparent des hyperboloïdes. Or, interprétée en coordonnées tangentiellles trimétriques dans le plan  $xy$ , la première des équations (23) représente les bases des cylindres tangents. Afin d'obtenir le contour apparent en coordonnées ponctuelles, on rend d'abord la première des équations (23) homogène, en substituant aux variables  $u$  et  $v$  les rapports  $\frac{u}{q}$  et  $\frac{v}{q}$  et en multipliant par  $q^2$ ; cela fournit

$$(24) \quad F(u, v, q) = r^2 b^2 (u^2 + v^2) - h^2 u^2 - k^2 v^2 - 2hku v + 2h(a-1)uq + 2k(a-1)vq - Cq^2 = 0;$$

ensuite la transformation indiquée s'effectue au moyen des formules

$$\frac{1}{2} F'(u) = (r^2 b^2 - h^2) u - hkv + h(a-1)q = x$$

$$\frac{1}{2} F'(v) = -hku + (r^2 b^2 - k^2) v + k(a-1)q = y$$

$$\frac{1}{2} F'(q) = h(a-1)u + k(a-1)v - Cq = p,$$

desquelles on tire les valeurs de  $u, v, q$ . L'introduction de ces valeurs dans l'équation (24) conduit à l'équation cherchée. Tout calcul fait, on obtient

$$(r^2 C - k^2) x^2 + (r^2 C - h^2) y^2 + 2hkxy + 2r^2(a-1)p(hx + ky) = r^2 p^2 [r^2 b^2 - (h^2 + k^2)],$$

ou, en posant encore  $p = 1$ , ce qui équivaut au passage des coordonnées trimétriques aux coordonnées cartésiennes

$$(25) \quad r^2 \{ [(a-1)y - bx + k]^2 + [by + (a-1)x + h]^2 \} = (kx - hy - r^2 b)^2.$$

Cette équation est la même que celle qu'on aurait trouvée en cherchant l'enveloppe des droites (10)

$$(10) \quad y - r \sin \mu = \frac{Br + k}{Ar + h} (x - r \cos \mu),$$

si l'on considérait  $\mu$  comme variable et  $r$  comme constant.

Il aurait été facile de reconnaître directement que les sections coniques (25) sont homofocales. En effet, la transformation

$$\begin{cases} x = \frac{h\xi - k\eta}{\sqrt{h^2 + k^2}} + x_0 \\ y = \frac{k\xi + h\eta}{\sqrt{h^2 + k^2}} + y_0 \end{cases}$$

amène l'équation

$$Cr^2\xi^2 + C\left(r^2 - \frac{h^2 + k^2}{C}\right)\left(\eta + \frac{b\sqrt{h^2 + k^2}}{C}\right)^2 - b^2r^2\left(r^2 - \frac{h^2 + k^2}{C}\right) = 0$$

qui peut s'écrire

$$(26) \quad \frac{\xi^2}{b^2 \frac{r^2 C - (h^2 + k^2)}{C^2}} + \frac{\left(\eta + \frac{b\sqrt{h^2 + k^2}}{C}\right)^2}{\frac{b^2 r^2}{C}} = 1.$$

Par conséquent, le centre commun a les coordonnées

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{b\sqrt{h^2 + k^2}}{C}$$

et les demi-axes sont

$$\frac{b}{C} \sqrt{r^2 C - (h^2 + k^2)} \quad \text{et} \quad \frac{br}{\sqrt{C}}$$

Suivant que  $r^2 C$  est plus grand ou plus petit que  $(h^2 + k^2)$ , les courbes sont des ellipses ou des hyperboles. Pour  $r^2 C = h^2 + k^2$ , la courbe dégénère en l'axe H qu'on se figure double. Les courbes sont effectivement homofocales, car leur excentricité est constante et  $= \frac{b\sqrt{h^2 + k^2}}{C}$ . Les deux foyers ont les coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = -2b \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{C} \end{array} \right\}.$$

Exprimées dans le système primitif de coordonnées, elles deviennent

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2bk\sqrt{h^2 + k^2}}{C\sqrt{h^2 + k^2}} + x_0 = -\frac{h(a-1) - bk}{C} = x_1 \\ y = \frac{-2bh\sqrt{h^2 + k^2}}{C\sqrt{h^2 + k^2}} + y_0 = -\frac{k(a-1) + bh}{C} = y_1 \end{array} \right.$$

Donc, l'un des foyers,  $(x_0, y_0)$ , est le point double du plan, tandis que l'autre,  $(x_1, y_1)$ , est le point double relativement à la congruence  $\eta = (a - bi)\xi + h + ki$ .

On sait que les sections coniques homofocales ont la propriété de posséder quatre tangentes imaginaires communes, dont les six points d'intersection sont : 1° les deux points circulaires imaginaires à l'infini, 2° les deux foyers imaginaires, et 3° les deux foyers réels des courbes. Or, l'équation (25) peut se mettre sous chacune des formes

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 C [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = (kx - hy + r^2 b)^2 \\ r^2 C [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] = (kx - hy - r^2 b)^2, \end{array} \right.$$

montrant que les sections coniques en question possèdent bien quatre tangentes imaginaires communes, à savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} y - y_0 = \pm i(x - x_0) \\ y - y_1 = \pm i(x - x_1) \end{array} \right.$$

et que les droites

$$kx - hy \pm r^2 b = 0$$

en sont les directrices.

Les droites  $y - y_0 = \pm i(x - x_0)$  peuvent être considérées comme les projections sur le plan  $xy$  des directrices de la congruence (1); les droites  $y - y_1 = \pm i(x - x_1)$  ont la même signification relativement à la congruence  $\eta = (a - bi)\xi + h + ki$ .

L'étude qui vient d'être faite peut se résumer comme il suit : *La double infinité de droites appartenant à la congruence (1) se groupe selon une infinité d'hyperboloïdes à une nappe. Ces surfaces forment un faisceau passant par les directrices des congruences  $\eta = (a \pm bi) \xi + h + ki$ ; une série de leurs sections circulaires est parallèle au plan  $xy$ , et leurs cônes tangents concentriques sont coupés par des plans parallèles au plan  $xy$  selon un système de sections coniques homofocales, pourvu que le centre commun se trouve en dehors du plan  $xy$ . En particulier, les sections coniques homofocales représentant le contour apparent des hyperboloïdes sur le plan  $xy$  ont pour foyers les points doubles de ce plan correspondant aux congruences  $\eta = (a \pm bi) \xi + h + ki$ .*

Il resterait encore à examiner les cas particuliers : 1°  $h = k = 0$ , 2°  $b = 0$ , 3°  $a = 1, b = 0$ . Dans le cas 2° les droites dans l'espace forment une gerbe, et dans le cas 3° elles sont toutes parallèles.

On n'entrera pas ici dans les détails de cette étude qui, du reste, n'offre aucune difficulté.

## SECONDE PARTIE

### Courbes imaginaires.

Soit l'équation d'une courbe

$$(1) \quad \eta = f(\xi).$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on peut la mettre sous la forme

$$X + Yi = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Pour que le point  $(\alpha + \beta i, \gamma + \delta i)$  fasse partie de cette courbe, il faut que les quantités  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  satisfassent aux conditions

$$(2) \quad \begin{cases} \gamma = \varphi(\alpha, \beta) \\ \delta = \psi(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Par ces deux équations,  $\gamma$  et  $\delta$  sont déterminés en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  que l'on peut, en conséquence, envisager comme des variables indépendantes. Si l'on donne à  $\alpha$  et  $\beta$  toutes les valeurs possibles, les équations

$$(3) \quad \frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{y - \beta}{\delta - \beta} = z$$