Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 17 (1880-1881)

Heft: 85

Artikel: Théorie mathématique du prix des terres et de leur rachat par l'état

Autor: Walras, Léon

Kapitel: III: Du prix de terres : formule de variation du prix normal pendant a période de variation du fermage

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-259354

croissant de z fois son montant d'année en année serait donné par la proportion

$$A : \frac{a}{i} :: a : a\frac{i+z}{i};$$

d'où l'on tirerait

$$A = \frac{\frac{a^2}{i}}{\frac{a(i+z)}{i}} = \frac{a}{i+z}.$$

Les précédentes formules [7] et [8], relatives au cas de plus-value perpétuelle, et ces dernières, relatives au cas de moins-value perpétuelle, se confondent, comme on voit, à la condition de prendre z avec le signe $+$ ou avec le signe $-$ suivant qu'il y a plus-value ou moins-value. Nous les ferons, par la suite, ainsi rentrer les unes dans les autres.

III

Du prix des terres. Formule de variation du prix normal pendant la période de variation du fermage.

12. Quand $z = 0$, l'équation [1] ou [2]

$$A = \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z}$$

$$= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}$$

devient

$$A = \frac{a}{i},$$

comme quand $m = 0$, ce qui doit être.

Supposons à présent $z \gtrless 0$, et voyons comment le signe de z influe sur la quantité qui s'ajoute à $\frac{a}{i}$, dans l'équation [1], pour former A.

a et i étant supposés positifs, et par conséquent le facteur

$$\frac{a}{i\,(1+i)^{m}}$$

étant positif, la quantité dont il s'agit, soit

$$\frac{az}{i\,(1+i)^{m}} \times \frac{(1+i)^{m} - (1+z)^{m}}{i - z},$$

sera positive ou négative selon que le facteur

$$z \times \frac{(1+i)^{m} - (1+z)^{m}}{i - z}$$

sera lui-même positif ou négatif.

Or, si z est positif, ce facteur sera toujours positif, vu que, suivant qu'on aura

$$i \gtrless z,$$

on aura en même temps

$$(1+i)^{m} \gtrless (1+z)^{m}.$$

Si z est négatif et > -1, ce facteur deviendra

$$-z \times \frac{(1+i)^{m} - (1-z)^{m}}{i + z};$$

et alors il sera toujours négatif, vu qu'on aura toujours

$$(1+i)^{m} > (1-z)^{m}.$$

Dans le cas particulier où $z = i$,

$$A = \frac{a}{i} + \frac{ma}{1+i},$$

et alors la quantité $\frac{ma}{1+i}$, qui s'ajoute à $\frac{a}{i}$ pour former A, sera toujours positive.

Quand $m = \infty$, et que z est $> i$ ou égal à i, A devient infini. Si z est $< i$,

$$A = \frac{a}{i - z};$$

et alors A est $> \frac{a}{i}$. Si z est < 0 et > -1,

$$A = \frac{a}{i + z};$$

et alors A est $< \frac{a}{i}$.

Ainsi : — *Le prix normal des terres est toujours supérieur ou inférieur au rapport du fermage au taux du revenu net selon qu'il y a plus-value ou moins-value de la rente.*

13. Le prix courant des terres contient donc l'escompte des accroissements positifs ou négatifs de capital foncier afférents aux accroissements positifs ou négatifs de revenu foncier à recueillir pendant la durée de la plus-value ou de la moins-value de la rente. Il est évident que le montant de cet escompte ne saurait être égal au montant des accroissements eux-mêmes, et qu'ainsi, depuis le jour de l'apparition de la plus-value ou de la moins-value et où la terre vaut

$$\frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^{\mathrm{m}}} \times \frac{(1+i)^{\mathrm{m}} - (1+z)^{\mathrm{m}}}{i - z}$$

$$= \frac{a}{i(1+i)^{\mathrm{m}}} \times \frac{i(1+i)^{\mathrm{m}} - z(1+z)^{\mathrm{m}}}{i - z}$$

jusqu'au jour de la cessation de cette plus-value ou de cette moins-value et où la terre vaut

$$\frac{a(1+z)^{m}}{i},$$

la valeur de la terre va toujours en augmentant ou en diminuant. Il est bon, toutefois, d'établir mathématiquement le fait de cette augmentation ou de cette diminution, d'autant plus qu'en constatant la réalité de la variation, nous en étudierons la nature. Supposons donc généralement que n années se soient écoulées depuis l'apparition de la plus-value ou de la moins-value, de telle sorte que le fermage soit $a(1+z)^{n}$, et la durée restante de la plus-value ou de la moins-value $m-n$. Alors la terre vaudra, en vertu de l'équation [1] ou [2],

$$A_{n}=\frac{a(1+z)^{n}}{i}+\frac{a(1+z)^{n}z}{i(1+i)^{m-n}}\times\frac{(1+i)^{m-n}-(1+z)^{m-n}}{i-z} \quad [9]$$

$$=\frac{a(1+z)^{n}}{i(1+i)^{m-n}}\times\frac{i(1+i)^{m-n}-z(1+z)^{m-n}}{i-z}. \quad [10]$$

Or, pour faire l'étude qui nous intéresse, il faut discuter cette équation en faisant varier n de 0 à m. En donnant à n des valeurs plus petites que 0 ou plus grandes que m, on obtiendrait des valeurs de A_n qui ne rentreraient pas dans la question qui nous occupe en ce moment.

Pour porter dans cette discussion le plus de clarté possible, nous remplacerons l'équation ci-dessus par l'équation suivante

$$\frac{A_{n}}{a}=\frac{(1+z)^{n}}{i}+\frac{z(1+z)^{n}}{i(1+i)^{m-n}}\times\frac{(1+i)^{m-n}-(1+z)^{m-n}}{i-z} \quad [11]$$

$$=\frac{(1+z)^{n}}{i(1+i)^{m-n}}\times\frac{i(1+i)^{m-n}-z(1+z)^{m-n}}{i-z}. \quad [12]$$

Nous considérerons i, z et m comme des constantes, et $\frac{A_n}{a}$ comme une fonction exponentielle de n. Nous pourrons alors représenter l'équation par une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires dont les abscisses correspondront aux *années écoulées* depuis l'apparition de la plus-value ou de la moins-value, et les ordonnées aux *prix (en capitaux pour un de fermage initial)* de la terre à la fin de chaque année. En réalité, la plus-value ou la moins-value se chiffrant d'année en année, et le prix de la terre se déterminant en conséquence, la courbe est discontinue. Nous substituerons, dans notre figure, à cette courbe discontinue une courbe continue passant par les points de variation annuelle.

Si $z = i$, on aura, en vertu des équations [5] et [6],

$$A_n = \frac{a(1+i)^n}{i} + (m-n)a(1+i)^{n-1}, \qquad [13]$$

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^n}{i} + (m-n)(1+i)^{n-1}. \qquad [14]$$

Si $m = \infty$, on aura, en vertu des équations [7] et [8],

$$A_n = \frac{a(1+z)^n}{i-z}, \qquad [15]$$

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i-z}. \qquad [16]$$

14. Usant de la formule [12], nous avons le prix $\frac{A_n}{a}$ après n années de plus-value par l'équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n} - z(1+z)^{m-n}}{i-z},$$

et le prix $\frac{A_{n+1}}{a}$ après $n+1$ années de plus-value par l'équation

$$\frac{A_{n+1}}{a} = \frac{(1+z)^{n+1}}{i(1+i)^{m-(n+1)}} \times \frac{i(1+i)^{m-(n+1)} - z(1+z)^{m-(n+1)}}{i-z}$$

$$= \frac{(1+i)\,(1+z)\,(1+z)^{n}}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-(n+1)} - z(1+z)^{m-(n+1)}}{i-z}$$

$$= \frac{(1+z)^{n}}{i\,(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n}(1+z) - z(1+z)^{m-n}(1+i)}{i-z}.$$

Formant la différence première $\Delta\frac{A_n}{a} = \frac{A_{n+1}}{a} - \frac{A_n}{a}$, nous avons successivement

$$\Delta\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^{n}}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n}(1+z) - z(1+z)^{m-n}(1+i)}{i-z}$$

$$- \frac{(1+z)^{n}}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i\,(1+i)^{m-n} - z(1+z)^{m-n}}{i-z}$$

$$= \frac{(1+z)^{n}}{i(1+i)^{m-n}}\left[\frac{i\,(1+i)^{m-n}(1+z-1) - z(1+z)^{m-n}(1+i-1)}{i-z}\right]$$

$$= \frac{(1+z)^{n}}{i\,(1+i)^{m-n}} \times \frac{i\,(1+i)^{m-n}\,z - z(1+z)^{m-n}\,i}{i-z}$$

$$= \frac{z\,(1+z)^{n}}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z}.$$

Si z est positif, cette différence sera toujours positive, tant que n sera > 0 et $< m$, vu que, suivant qu'on aura

$$i \gtrless z,$$

on aura en même temps

$$(1+i)^{m-n} \gtrless (1+z)^{m-n}.$$

Si z est négatif, cette différence devient

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{-z(1-z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n}-(1-z)^{m-n}}{i+z},$$

et alors elle sera toujours négative tant que n sera > 0 et $< m$, vu qu'on aura toujours

$$(1+i)^{m-n} > (1-z)^{m-n}.$$

Dans le cas particulier où $z = i$, on a, suivant la formule [14],

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^n}{i} + (m-n)(1+i)^{n-1},$$

$$\frac{A_{n+1}}{a} = \frac{(1+i)^{n+1}}{i} + [m-(n+1)](1+i)^n,$$

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)^n}{i} + [m-(n+1)](1+i)^n - (m-n)(1+i)^{n-1}$$

$$= \frac{(1+i)^n(1+i-1)}{i} + (m-n)(1+i)^{n-1}(1+i-1) - (1+i)^n$$

$$= \frac{i(1+i)^n}{i} + i(m-n)(1+i)^{n-1} - (1+i)^n$$

$$= i(m-n)(1+i)^{n-1},$$

différence toujours positive.

Quand $m = \infty$, et que z est > 0 et $< i$, ou < 0 et > -1, on a, suivant la formule [16],

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i-z},$$

z étant pris avec le signe $+$ ou le signe $-$ selon les cas. Alors

$$\frac{A_{n+1}}{a} = \frac{(1+z)^{n+1}}{i-z},$$

$$\Delta \frac{A^n}{a} = \frac{(1+z)^{n+1} - (1+z)^n}{i-z}$$

$$= \frac{(1+z)^n (1+z-1)}{i-z}$$

$$= \frac{z(1+z)^n}{i-z},$$

différence positive ou négative selon que z est positif ou négatif.

Ainsi : — *Le prix des terres est annuellement croissant ou décroissant, pendant la période de variation de la valeur de la rente, selon qu'il y a plus-value ou moins-value de la rente.*

Comparant l'équation

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z}$$

avec l'équation [11]

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i} + \frac{z(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z},$$

soit

$$\frac{A_n}{a} i - (1+z)^n = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z},$$

on voit que

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{A_n}{a} i - (1+z)^n.$$

Comme on peut s'en assurer facilement, cette formule est générale, et s'applique aux cas où $z = i$ et où $m = \infty$.

Ainsi : — *La variation annuelle du prix de la terre est égale à la différence de l'intérêt du capital foncier, au taux courant du revenu net, et du fermage.* Cette circonstance est rationnelle. Le propriétaire foncier dont la terre augmente de valeur doit trouver dans cette augmentation l'équivalent de ce qu'il perd sur le revenu foncier; et celui dont la terre diminue de valeur doit trouver l'équivalent de cette diminution dans ce qu'il gagne sur le revenu foncier.

La différence première $\Delta \frac{A_n}{a}$ étant nulle quand $n = m$, on a alors

$$\frac{A_m}{a} i - (1+z)^m = 0,$$

soit

$$A_m = \frac{a(1+z)^m}{i};$$

ce qui doit être, puisque, au moment où cesse la variation de valeur de la rente, le prix de la terre redevient une quantité constante égale au rapport du fermage au taux du revenu net. La droite horizontale

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^m}{i}$$

se substitue, à partir de ce moment, à la courbe

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i} + \frac{z(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z}.$$

15. Comme on le voit, l'escompte des accroissements positifs ou négatifs du capital foncier afférents aux accroisse-

ments positifs ou négatifs du revenu foncier ne supprime pas complétement l'augmentation ou la diminution de valeur de la terre pendant la période de plus-value ou de moins-value. Cet escompte fait seulement qu'une partie de la variation totale se produit au moment de l'apparition de la plus-value ou de la moins-value, l'autre partie se produisant d'année en année. C'est ce que la Fig. 1 va montrer tout-à-fait.

Les trois courbes AM, A′M′, A″M″ correspondent respectivement aux trois cas d'une plus-value de $z = 0.05$, d'une plus-value de $z = 0.01$ et d'une moins-value de $z = 0.01$, devant durer pendant 10 ans, alors que le taux de l'intérêt net est de $i = 0.04$.

La première a donc pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.05^n}{0.04} + \frac{0.05 \times 1.05^n}{0.04 \times 1.04^{10-n}} \times \frac{1.04^{10-n} - 1.05^{10-n}}{0.04 - 0.05}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA = 37.50$, quand $n = 0$, pour arriver à une ordonnée $10M = 40.72$, quand $n = 10$. L'effet de l'escompte des accroissements de capital foncier a été de la substituer à la courbe IM.

La seconde a pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.01^n}{0.04} + \frac{0.01 \times 1.01^n}{0.04 \times 1.04^{10-n}} \times \frac{1.04^{10-n} - 1.01^{10-n}}{0.04 - 0.01}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA' = 27.11$, quand $n = 0$, pour arriver à une ordonnée $10M' = 27.61$, quand $n = 10$. L'effet de l'escompte a été de la substituer à la courbe IM′.

La troisième a pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{0.99^n}{0.04} - \frac{0.01 \times 0.99^n}{0.04 \times 1.04^{10-n}} \times \frac{1.04^{10-n} - 0.99^{10-n}}{0.04 + 0.01}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA'' = 23.05$, quand $n = 0$, pour arriver à une ordonnée $10 M'' = 22.61$, quand $n = 10$. L'effet de l'escompte a été de la substituer à la courbe IM″.

La courbe A‴M‴ correspond au cas d'une plus-value de $z = i = 0.04$, devant durer pendant 10 ans. Elle a donc pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.04^n}{0.04} + (10 - n)\, 1.04^{n-1}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA''' = 34.61$, quand $n = 0$, pour arriver à une ordonnée $10 M''' = 37$, quand $n = 10$. L'effet de l'escompte a été de la substituer à la courbe IM‴.

Les deux courbes $A^{IV} M^{IV}$, $A^{V} M^{V}$ correspondent respectivement aux deux cas d'une plus-value perpétuelle de $z = 0.01$ et d'une moins-value perpétuelle de $z = 0.01$, le taux de l'intérêt net étant de $i = 0.04$.

La première a donc pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.01^n}{0.04 - 0.01}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA^{IV} = 33.33$, quand $n = 0$, pour passer par une ordonnée $10 M^{IV} = 36.82$, quand $n = 10$, et continuer à s'élever de plus en plus.

La seconde a pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{0.99^n}{0.04 + 0.01}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA^{V} = 20$, quand $n = 0$, pour passer par une ordonnée $10 M^{V} = 18.08$, quand $n = 10$, et continuer à s'abaisser de plus en plus.

16. Nous avons la différence première $\Delta \frac{A_n}{a}$ par l'équation

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i - z},$$

et la différence première $\Delta \frac{A_{n+1}}{a}$ par l'équation

$$\Delta \frac{A_{n+1}}{a} = \frac{z(1+z)^{n+1}}{(1+i)^{m-(n+1)}} \times \frac{(1+i)^{m-(n+1)} - (1+z)^{m-(n+1)}}{i-z}$$

$$= \frac{z(1+i)(1+z)(1+z)^{n}}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-(n+1)} - (1+z)^{m-(n+1)}}{i-z}$$

$$= \frac{z(1+z)^{n}}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n}(1+z) - (1+z)^{m-n}(1+i)}{i-z}.$$

Formant la différence seconde $\Delta^2 \frac{A_n}{a} = \Delta \frac{A_{n+1}}{a} - \Delta \frac{A_n}{a}$, nous avons successivement

$$\Delta^2 \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^{n}}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n}(1+z) - (1+z)^{m-n}(1+i)}{i-z}$$

$$- \frac{z(1+z)^{n}}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z}$$

$$= \frac{z(1+z)^{n}}{(1+i)^{m-n}} \left[\frac{(1+i)^{m-n}(1+z-1) - (1+z)^{m-n}(1+i-1)}{i-z} \right]$$

$$= \frac{z(1+z)^{n}}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{z(1+i)^{m-n} - i(1+z)^{m-n}}{i-z}.$$

Si z est positif et $> i$, cette différence sera positive ou négative selon qu'on aura

$$i(1+z)^{m-n} \gtrless z(1+i)^{m-n},$$

soit

$$\frac{(1+z)^{m-n}}{(1+i)^{m-n}} \gtrless \frac{z}{i},$$

$$(m-n)\log\frac{1+z}{1+i} \gtrless \log\frac{z}{i},$$

$$m-n \gtrless \frac{\log\frac{z}{i}}{\log\frac{1+z}{1+i}}.$$

Si z est positif et $< i$, elle sera positive ou négative selon qu'on aura

$$z(1+i)^{m-n} \gtrless i(1+z)^{m-n},$$

soit

$$m-n \gtrless \frac{\log\frac{i}{z}}{\log\frac{1+i}{1+z}},$$

ce qui revient au même.

La différence seconde dont il s'agit est nulle pour une valeur k de n, telle que l'on ait

$$m-k = \frac{\log\frac{i}{z}}{\log\frac{1+i}{1+z}}, \qquad [17]$$

quantité toujours positive.

Dans le cas particulier où $z = i$,

$$\Delta\frac{A_n}{a} = i(m-n)(1+i)^{n-1},$$

$$\Delta\frac{A_{n+1}}{a} = i[m-(n+1)](1+i)^{n},$$

$$\Delta^2 \frac{A^n}{a} = i[m-(n+1)](1+i)^n - i(m-n)(1+i)^{n-1}$$

$$= i(m-n)(1+i)^{n-1}(1+i) - i(1+i)^n - i(m-n)(1+i)^{n-1}$$

$$= i(m-n)(1+i)^{n-1}(1+i-1) - i(1+i)^n$$

$$= i^2(m-n)(1+i)^{n-1} - i(1+i)^n,$$

différence positive ou négative selon qu'on aura

$$i^2(m-n)(1+i)^{n-1} \gtrless i(1+i)^n,$$

soit

$$i(m-n) \gtrless (1+i),$$

$$m-n \gtrless \frac{1+i}{i},$$

et nulle quand on a

$$m-k = \frac{1+i}{i}, \qquad [18]$$

quantité toujours positive.

Ainsi : — *En cas de plus-value temporaire, les augmentations annuelles du prix de la terre, même si elles sont d'abord croissantes, sont toujours décroissantes à la fin de la période de plus-value.*

Si z est négatif, la différence devient

$$\frac{-z(1-z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{-z(1+i)^{m-n} - i(1-z)^{m-n}}{i+z}.$$

Or cette différence est alors la différence de deux quantités négatives; le fait qu'elle est positive indique donc que, de ces deux quantités considérées abstraction faite de leurs signes, la première $\Delta \frac{A_{n+1}}{a}$ est moindre que la seconde $\Delta \frac{A_n}{a}$.

Ainsi : — *En cas de moins-value temporaire, les diminutions annuelles du prix de la terre sont toujours décroissantes pendant la période de moins-value.*

Quand $m = \infty$, et que z est > 0 et $< i$, ou < 0 et > -1,

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^n}{i-z},$$

z étant pris avec le signe $+$ ou le signe $-$ selon les cas. Alors

$$\Delta \frac{A_{n+1}}{a} = \frac{z(1+z)^{n+1}}{i-z},$$

$$\Delta^2 \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^{n+1} - z(1+z)^n}{i-z}$$

$$= \frac{z(1+z)^n(1+z-1)}{i-z}$$

$$= \frac{z^2(1+z)^n}{i-z},$$

différence toujours positive.

Ainsi : — *En cas de plus-value perpétuelle, les augmentations annuelles du prix de la terre sont toujours croissantes. En cas de moins-value perpétuelle, les diminutions annuelles du prix de la terre sont toujours décroissantes.*

Comparant l'équation

$$\Delta^2 \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{z(1+i)^{m-n} - i(1+z)^{m-n}}{i-z}$$

avec l'équation

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z},$$

soit

$$\Delta \frac{A_n}{a} i - z(1+z)^n = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z} i - z(1+z)^n$$

$$= z(1+z)^n \left[\frac{i(1+i)^{m-n} - i(1+z)^{m-n}}{(1+i)^{m-n}(i-z)} - 1\right]$$

$$= z(1+z)^n \left[\frac{i(1+i)^{m-n} - i(1+z)^{m-n} - i(1+i)^{m-n} + z(1+i)^{m-n}}{(1+i)^{m-n}(i-z)}\right]$$

$$= \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{z(1+i)^{m-n} - i(1+z)^{m-n}}{i-z},$$

on voit que

$$\Delta^2 \frac{A_n}{a} = \Delta \frac{A_n}{a} i - z(1+z)^n.$$

Cette circonstance est rationnelle : — *L'accroissement ou le décroissement de la variation annuelle du prix de la terre est égal à la différence de l'intérêt de cette variation, au taux courant du revenu net, et de l'accroissement ou du décroissement du fermage.*

Cette différence seconde est nulle quand $n = k$, et l'on a alors

$$\Delta \frac{A_k}{a} i - z(1+z)^k = 0,$$

soit

$$\Delta \frac{A_k}{a} = \frac{z(1+z)^k}{i}.$$

17. Si l'on exprime géométriquement ces derniers résultats, on en tire les indications suivantes concernant la forme des courbes.

La courbe AM, à partir d'un point qui a pour ordonnée $k = 10 - \dfrac{\log \dfrac{0.05}{0.04}}{\log \dfrac{1.05}{1.04}} = -13.31$, la courbe A′M′, à partir d'un point qui a pour ordonnée $k = 10 - \dfrac{\log \dfrac{0.01}{0.04}}{\log \dfrac{1.01}{1.04}} = -37.36$, la courbe A‴M‴, à partir d'un point qui a pour ordonnée $k = 10 - \dfrac{1.04}{0.04} = -16$, sont concaves par rapport à l'axe horizontal. Les points M, M′, M‴ sont des points de maximum.

La courbe A″M″ est toujours convexe. Le point M″ est un point de minimum.

Les courbes $A^{IV}M^{IV}$, $A^{V}M^{V}$ sont toujours convexes.

IV

Du rachat des terres par l'Etat. Formule d'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage.

18. Dans nos sociétés modernes qui sont, au point de vue économique, des sociétés progressives, c'est-à-dire qui sont des sociétés où le capital s'accroît et où la population augmente, et dans lesquelles il y a plus-value de la rente, le prix des terres est supérieur au rapport du fermage au taux du revenu net et est, en outre, toujours croissant. Par con-