

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 17 (1880-1881)
Heft: 85

Artikel: Théorie mathématique du prix des terres et de leur rachat par l'état
Autor: Walras, Léon
Kapitel: II: Du prix des terres : formule de prix normal en cas de variation temporaire ou perpétuelle du fermage
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-259354>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

priétaires. Il est vrai que Gossen, portant la question du terrain théorique sur le terrain pratique, nous parle de circonstances qui permettraient à l'Etat de s'avancer plus loin que les particuliers vers le prix normal des terres sans toutefois l'atteindre. Reste seulement à savoir si ces circonstances sont décisives. Quel est le prix normal ? De combien s'en rapprochent les propriétaires ? De combien s'en rapproche l'Etat ? Voilà les questions que les exemples concrets de Gossen ne résolvent pas et qui, dans une affaire de cette gravité et de cette importance, veulent être tirées tout à fait au clair. Il n'y a qu'une manière d'y réussir, c'est de les reprendre pour notre compte. Nous allons faire rigoureusement la théorie mathématique du prix des terres résultant de la plus-value de la rente (§§ II et III) ; puis nous ferons la théorie de l'achat des terres par emprunt avec amortissement au moyen du fermage (§§ IV et V) ; et nous verrons si et comment la possibilité de l'amortissement au moyen du fermage se concilie avec le paiement du prix normal résultant de la plus-value (§§ VI et VII).

II

Du prix des terres. Formule de prix normal en cas de variation temporaire ou perpétuelle du fermage.

7. Dans la 49^e leçon de nos *Eléments d'économie politique pure*, alors que nous n'avions pas encore constaté le fait ni établi les lois de la variation des prix dans une société progressive, nous énoncions que, i étant le taux du revenu net, déterminé par le rapport du prix de vente des profits des capitaux mobiliers au prix de revient de ces capitaux, à l'état d'équilibre général de la production et de l'échange, p_t , p'_t , p''_t ... étant les prix de vente des rentes des terres (T) (T')

(T'')... les prix courants de ces terres P_t, P_t', P_t'' ... étaient déterminés par le système des équations

$$P_t = \frac{p_t}{i}, \quad P_t' = \frac{p_t'}{i}, \quad P_t'' = \frac{p_t''}{i} \dots$$

Dans la 52^e leçon, après avoir reconnu que, dans une société progressive, c'est-à-dire dans une société où le capital s'accroît et où la population augmente, *le prix de la rente, ou le fermage, s'élève sensiblement*, et que, dans une telle société, *le taux du revenu net s'abaisse sensiblement*, nous avons énoncé qu'en conséquence, dans une société progressive, *le prix des terres s'élève* en raison à la fois de l'élévation du fermage et de l'abaissement du taux du revenu net. Mais cela ne suffit pas, et le moment est venu de montrer à présent que cette circonstance de l'élévation du fermage dans une société progressive modifie notablement les équations ci-dessus.

Pour plus de simplicité, et aussi pour nous conformer autant que possible aux notations de Gossen, appelons a ce que nous appelions jusqu'ici p_t , A ce que nous appelions P_t . Et soit une terre qui rapporte actuellement a de fermage et dont le fermage s'élève régulièrement de z fois son montant d'année en année. z est ainsi le taux de l'accroissement annuel du fermage ou le taux de la plus-value de la rente. Nous supposerons d'abord cette plus-value temporaire et devant avoir lieu pendant m années, sauf à la supposer ensuite perpétuelle en faisant m égal à l'infini. Soit toujours i le taux du revenu net. Dans ces conditions, le fermage de la terre, fixé aujourd'hui et payable dans 1 an, est, pour la 1^{re} année, a . Il sera, après 1 an et pour la 2^e année, $a + az = a(1 + z)$; après 2 ans et pour la 3^e année, $a(1 + z) + a(1 + z)z = a(1 + z)(1 + z) = a(1 + z)^2$; après 3 ans et pour la 4^e année, $a(1 + z)^2 + a(1 + z)^2z = a(1 + z)^2(1 + z) = a(1 + z)^3$...; enfin après m années et pour la

$m + 1^{\text{e}}$ année, $a(1+z)^{m-1} + a(1+z)^{m-1}z = a(1+z)^{m-1}(1+z) = a(1+z)^m$. Or il n'est pas admissible que le prix de cette terre soit actuellement $\frac{a}{i}$, dans un an $\frac{a(1+z)}{i}$, dans 2 ans $\frac{a(1+z)^2}{i}$, dans 3 ans $\frac{a(1+z)^3}{i}$... enfin dans m années $\frac{a(1+z)^m}{i}$. Les individus qui ont des épargnes à placer fe-

ront entrer l'accroissement du fermage en ligne de compte dans leur demande de capitaux fonciers; et, à supposer que ces individus n'y songeraient pas, il se trouvera des spéculateurs pour le faire. En conséquence, le prix des terres s'élèvera. De combien? C'est ce qu'il s'agit de reconnaître.

8. Soit d'abord un individu qui a des épargnes à placer. Combien cet individu peut-il payer une terre qui rapporte actuellement a de fermage et dont le fermage s'élève régulièrement de z fois son montant d'année en année, c'est-à-dire s'accroît suivant un taux égal à z ?

Il est clair que cet individu peut acheter d'abord au prix de $\frac{a}{i}$ le fermage a à recevoir dans 1 an et les années suivantes.

Mais, dans 2 ans, le fermage à toucher, au lieu de a , sera $a(1+z)$; c'est-à-dire qu'il y aura, à partir de 1 an, un accroissement az . Cet accroissement vaudra dans 1 an $\frac{az}{i}$, et il vaut actuellement $\frac{az}{i(1+i)}$.

Dans 3 ans, le fermage à toucher, au lieu de $a(1+z)$, sera $a(1+z)^2$; c'est-à-dire qu'il y aura, à partir de 2 ans, un accroissement $a(1+z)z$. Cet accroissement vaudra dans 2 ans $\frac{a(1+z)z}{i}$, et il vaut actuellement $\frac{a(1+z)z}{i(1+i)^2}$.

Dans 4 ans, le fermage à toucher, au lieu de $a(1+z)^2$, sera $a(1+z)^3$; c'est-à-dire qu'il y aura, à partir de 3 ans,

un accroissement $a(1+z)^2z$. Cet accroissement vaudra dans 3 ans $\frac{a(1+z)^2z}{i}$, et il vaut actuellement $\frac{a(1+z)^2z}{i(1+i)^3}$...

Enfin dans $m+1$ années, le fermage à toucher, au lieu de $a(1+z)^{m-1}$, sera $a(1+z)^m$; c'est-à-dire qu'il y aura, à partir de m années, un accroissement $a(1+z)^{m-1}z$. Cet accroissement vaudra dans m années $\frac{a(1+z)^{m-1}z}{i}$, et il vaut actuellement $\frac{a(1+z)^{m-1}z}{i(1+i)^m}$.

La valeur totale actuelle du fermage initial et des m accroissements à réaliser en m années est ainsi de

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)} + \frac{a(1+z)z}{i(1+i)^2} + \frac{a(1+z)^2z}{i(1+i)^3} + \dots + \frac{a(1+z)^{m-1}z}{i(1+i)^m} \\ &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i} \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{(1+z)}{(1+i)^2} + \frac{(1+z)^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(1+z)^{m-1}}{(1+i)^m} \right]. \end{aligned}$$

La quantité entre crochets est une progression géométrique dont la somme est

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{(1+z)^{m-1}}{(1+i)^m} \times \frac{(1+z)}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)}}{\frac{(1+z)}{(1+i)} - 1} = \frac{\frac{1}{(1+i)} \left[\frac{(1+z)^m}{(1+i)^m} - 1 \right]}{\frac{(1+z)}{(1+i)} - 1} \\ &= \frac{\frac{1}{(1+i)} \times \frac{(1+z)^m - (1+i)^m}{(1+i)^m}}{\frac{(1+z) - (1+i)}{(1+i)}} \\ &= \frac{1}{(1+i)^m} \times \frac{(1+z)^m - (1+i)^m}{z - i} = \frac{1}{(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i - z}, \end{aligned}$$

l'une ou l'autre de ces deux dernières formes devant être préférée selon que z est $>$ ou $<$ i .

Par conséquent, notre individu peut payer la terre dont il s'agit

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} & [1] \\
 &= \frac{a}{i} \left[1 + \frac{z}{(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \right] \\
 &= \frac{a}{i} \left[\frac{(1+i)^m (i-z) + z [(1+i)^m - (1+z)^m]}{(1+i)^m (i-z)} \right] \\
 &= \frac{a}{i} \left[\frac{i(1+i)^m - z(1+i)^m + z(1+i)^m - z(1+z)^m}{(1+i)^m (i-z)} \right] \\
 &= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}. & [2]
 \end{aligned}$$

Nous nous réservons, pour la plus grande commodité de la discussion, de prendre l'équation du prix normal des terres tantôt sous la forme [1] et tantôt sous la forme [2].

C'est une chose qui est dores et déjà certaine que, tant que le prix des terres n'aura pas atteint cette limite, il y aura avantage, pour un individu ayant des épargnes à placer, à acheter des terres plutôt que des capitaux; que, quand cette limite sera atteinte, l'un ou l'autre placement lui sera également avantageux; qu'en conséquence, le prix ci-dessus représente pour lui le prix normal de la terre. Mais il ne sera pas inutile de montrer que ce même prix est aussi le prix limite de la terre pour un spéculateur.

9. Soit donc à présent un spéculateur qui opère avec des capitaux empruntés. Si on vendait les terres purement et simplement en raison de leur fermage actuel, cet homme n'aurait, pour acheter une terre de revenu a , qu'à emprunter une somme $\frac{a}{i}$. En laissant cette somme se capitaliser à

intérêts composés pendant m années, il aurait à son débit, au bout de ce temps, en capital et intérêts, une somme de

$$a \frac{(1+i)^m}{i}.$$

Mais, d'autre part, notre homme, touchant des fermages $a, a(1+z), a(1+z)^2 \dots a(1+z)^{m-1}$, et les plaçant au taux de i , à intérêts composés, aurait à son crédit, au bout de m années,

$$\begin{aligned} & a(1+z)^{m-1} + a(1+z)^{m-2}(1+i) + a(1+z)^{m-3}(1+i)^2 + \dots \\ & \quad + a(1+i)^{m-1} \\ = & a(1+z)^{m-1} \left[1 + \frac{(1+i)}{(1+z)} + \frac{(1+i)^2}{(1+z)^2} + \dots + \frac{(1+i)^{m-1}}{(1+z)^{m-1}} \right]. \end{aligned}$$

La quantité entre crochets est une progression géométrique dont la somme est

$$\begin{aligned} & \frac{(1+i)^{m-1}}{(1+z)^{m-1}} \times \frac{(1+i)}{(1+z)} - 1 = \frac{(1+i)^m}{(1+z)^m} - 1 = \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{(1+z)^m} \\ & \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{(1+z)^m} \div \frac{(1+i) - (1+z)}{(1+z)} = \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{(1+z)^m} \times \frac{(1+z)}{(1+i) - (1+z)} \\ & = \frac{1}{(1+z)^{m-1}} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i - z} \\ & = \frac{1}{(1+z)^{m-1}} \times \frac{(1+z)^m - (1+i)^m}{z - i} \end{aligned}$$

Et ainsi la somme obtenue est

$$a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i - z}.$$

La différence du crédit et du débit serait donc

$$a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i - z} - a \frac{(1+i)^m}{i}.$$

Mais ce n'est pas tout. La terre qui, lorsqu'elle rapportait un fermage a , se vendait $\frac{a}{i}$, après m années, lorsqu'elle rapporterait un fermage $a(1+z)^m$, se vendrait $\frac{a(1+z)^m}{i}$. Par conséquent, le bénéfice à réaliser serait

$$\begin{aligned} & a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} - a \frac{(1+i)^m}{i} + a \frac{(1+z)^m}{i} \\ &= a \left[\frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} - \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i} \right] \\ &= a \left[\frac{i(1+i)^m - i(1+z)^m - i(1+i)^m + i(1+z)^m + z(1+i)^m - z(1+z)^m}{i(i-z)} \right] \\ &= az \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i(i-z)}. \end{aligned}$$

Ce bénéfice, à réaliser dans m années, vaut aujourd'hui

$$\frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z};$$

et c'est là précisément le supplément de prix que le spéculateur pourrait payer, tout comme le détenteur d'épargnes, pour ne faire aucun bénéfice.

10. Ainsi, le prix normal en unités de numéraire d'une terre dont le fermage actuel est a et augmente de z fois son montant par an pendant m années, quand le taux du revenu net est i , est bien, conformément à l'équation [1] ou [2],

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \\ &= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}, \end{aligned}$$

et le prix normal en capitaux pour un de fermage initial est bien

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{i} + \frac{z}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \quad [3]$$

$$= \frac{1}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}, \quad [4]$$

au début de la plus-value. Ces mêmes prix sont évidemment

$$A_m = \frac{a(1+z)^m}{i}$$

et

$$\frac{A_m}{a} = \frac{(1+z)^m}{i},$$

à la fin de la plus-value. Nous étudierons un peu plus loin le mouvement de variation de $\frac{A}{a}$ de la première valeur à la seconde.

Quand $z=i$, l'équation [1] ou [2] prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Mais on trouve alors directement, par l'un ou l'autre des deux procédés qui nous ont servi à l'établir,

$$A = \frac{a}{i} + \frac{ma}{1+i} \quad [5]$$

et

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{i} + \frac{m}{1+i}. \quad [6]$$

Si, dans la formule [3] ou [4] ci-dessus, on suppose $i=0.04$ et $z=0.01$, on trouve respectivement, pour le rapport de A à a , selon que

$m =$	0	$\frac{A}{a} = 25$
	1	25.24
	2	25.47
	5	26.13
	10	27.11
	20	28.69
	30	29.89
	40	30.74
	50	31.40
	60	31.89
	70	32.25
	80	32.53
	90	32.73
	100	32.78

11. Quand $m = 0$, l'équation [1] ou [2] devient

$$A = \frac{a}{i},$$

ce qui doit être.

Pour voir ce que devient A quand $m = \infty$, mettons l'équation [1] ou [2] sous la forme suivante

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i} + \frac{a}{i} \times \frac{z \left[1 - \left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m \right]}{i-z} \\ &= \frac{a}{i} \times \frac{i-z \left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m}{i-z}. \end{aligned}$$

Supposons d'abord z positif, et successivement $> i$, égal à i et $< i$.

Dans le premier cas, l'équation [1] ou [2] prend la forme

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i} + \frac{a}{i} \times \frac{z \left[\left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m - 1 \right]}{z-i}, \\ &= \frac{a}{i} \times \frac{z \left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m - i}{z-i}. \end{aligned}$$

Et, si m tend vers l'infini, $\left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m$ et A tendent vers l'infini.

Dans le second cas, on a

$$A = \frac{a}{i} + \frac{ma}{1+i}.$$

Et, si m tend vers l'infini, $\frac{ma}{1+i}$ et A tendent vers l'infini.

Ainsi : — *En cas de plus-value perpétuelle de la rente, et quand le taux de la plus-value est égal ou supérieur au taux du revenu net, le prix normal des terres est infini.* Nous réservons la question de savoir jusqu'à quel point cette hypothèse d'une plus-value perpétuelle de la rente égale ou supérieure au taux de l'intérêt est réalisable.

Dans le troisième cas, l'équation [1] ou [2] gardant la forme que nous lui avons donnée, si m tend vers l'infini, $\left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m$ tend vers zéro, et le prix normal tend vers

$$A = \frac{a}{i-z}; \quad [7]$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{i-z}, \quad [8]$$

soit

$$\frac{a}{A} = i - z.$$

Ainsi : — *En cas de plus-value perpétuelle de la rente, et quand le taux de la plus-value est inférieur au taux du revenu net, le prix normal des terres est égal au rapport du fermage à la différence du taux du revenu net et du taux de la plus-value. Autrement dit, le taux du fermage est égal à la différence du taux du revenu net et du taux de la plus-value.*

Cette formule remarquable vaut la peine d'être établie directement. Soit un capital mobilier rapportant a au taux de i . Si, sur le revenu a , on prélève une somme $a \frac{z}{i}$ pour la capitaliser, il restera $a \frac{i-z}{i}$. L'année suivante, le revenu sera, au lieu de a , $a(1+z)$. Si, sur ce revenu $a(1+z)$, on prélève une somme $a(1+z) \frac{z}{i}$ pour la capitaliser, il restera $a(1+z) \frac{i-z}{i}$. L'année suivante, le revenu sera, au lieu de $a(1+z)$, $a(1+z)^2$. Si, sur ce revenu $a(1+z)^2$, on prélève une somme $a(1+z)^2 \frac{z}{i}$ pour la capitaliser, il restera $a(1+z)^2 \frac{i-z}{i}$... Et ainsi de suite. Par où l'on voit qu'un revenu constant de a équivaut à un revenu de $a \frac{i-z}{i}$ croissant de z fois son montant d'année en année. Si le prix d'un tel revenu est $\frac{a}{i}$, le prix d'un revenu de a croissant de z fois son montant d'année en année sera donné par la proportion

$$A : \frac{a}{i} :: a : a \frac{i-z}{i};$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{\frac{a^2}{i}}{\frac{a(i-z)}{i}} = \frac{a}{i-z}.$$

Supposons maintenant z négatif et aussi > -1 , en écartant ainsi le cas où le fermage disparaîtrait entièrement après une année pour devenir négatif. Alors, si m tend vers l'infini, $\left(\frac{1-z}{1+i}\right)^m$ tend vers zéro, et le prix normal tend vers

$$A = \frac{a}{i+z};$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{i+z},$$

soit

$$\frac{a}{A} = i+z.$$

Ainsi : — *En cas de moins-value perpétuelle de la rente, le prix normal des terres est égal au rapport du fermage à la somme du taux de l'intérêt net et du taux de la moins-value. Autrement dit, le taux du fermage est égal à la somme du taux du revenu net et du taux de la moins-value.*

On établirait directement cette formule, comme la précédente, en montrant qu'un revenu de $a \frac{i+z}{i}$ décroissant de z fois son montant d'année en année, sur lequel on prélèverait une somme de $a \frac{z}{i}$ pour la capitaliser, serait, par le fait, transformé en un revenu constant de a . D'où il suivrait que, le prix d'un tel revenu devant être $\frac{a}{i}$, le prix d'un revenu de a dé-

croissant de z fois son montant d'année en année serait donné par la proportion

$$A : \frac{a}{i} :: a : a \frac{i+z}{i};$$

d'où l'on tirerait

$$A = \frac{\frac{a^2}{i}}{\frac{a(i+z)}{i}} = \frac{a}{i+z}.$$

Les précédentes formules [7] et [8], relatives au cas de plus-value perpétuelle, et ces dernières, relatives au cas de moins-value perpétuelle, se confondent, comme on voit, à la condition de prendre z avec le signe $+$ ou avec le signe $-$ suivant qu'il y a plus-value ou moins-value. Nous les ferons, par la suite, ainsi rentrer les unes dans les autres.

III

Du prix des terres. Formule de variation du prix normal pendant la période de variation du fermage.

12. Quand $z = 0$, l'équation [1] ou [2]

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \\ &= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z} \end{aligned}$$

devient

$$A = \frac{a}{i},$$

comme quand $m = 0$, ce qui doit être.