

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 17 (1880-1881)
Heft: 85

Artikel: Théorie mathématique du prix des terres et de leur rachat par l'état
Autor: Walras, Léon
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-259354>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

THÉORIE MATHÉMATIQUE
DU PRIX DES TERRES
ET DE LEUR RACHAT PAR L'ÉTAT

PAR

LÉON WALRAS

Professeur d'économie politique à l'Académie de Lausanne.

(Planche XI) ¹

En publiant le présent travail, qui forme comme le couronnement de mes applications des mathématiques à l'économie politique et sociale, je dois adresser des remerciements particuliers à deux de mes collègues et amis de l'Académie de Lausanne. L'un est notre éminent philosophe Charles Secrétan qui, après m'avoir procuré en communication, de la bibliothèque de Munich, le premier exemplaire de l'ouvrage de Gossen que j'aie eu entre les mains, a bien voulu prendre la peine de lire cet ouvrage avec moi et de m'en dicter, pendant cette lecture, une traduction complète à laquelle son admirable connaissance des deux langues française et allemande donne un prix inestimable. L'autre est le D^r Hermann Amstein, professeur d'analyse et de mécanique, qui, lorsque je l'ai entretenu de la théorie de Gossen et de la critique que j'en voulais faire, ayant aperçu tout de suite la formule générale mathématique

¹ NB. Les chiffres entre parenthèses indiquent les numéros du texte auxquels on renvoie. Les chiffres entre crochets indiquent les numéros des équations ou formules.

de l'amortissement proposé par cet auteur dans ses tableaux, et m'ayant fourni la fonction de la somme restant due à la fin de chaque année, telle qu'elle est donnée au début du § IV, avec les conditions de l'égalité de cette fonction à zéro, telles qu'elles sont exposées aux n^{os} 20 et 21 de mon texte, m'a en quelque sorte ouvert la voie dans laquelle je n'ai plus eu qu'à m'avancer pour parcourir la question dans tous les sens. Je crois remplir un devoir en disant ce que je dois à deux personnes sans l'obligeance desquelles un travail qui est fait serait encore à faire ; et, de plus, je saisis avec empressement l'occasion de m'honorer de la bienveillance et de la sympathie des hommes si distingués au milieu desquels je poursuis mes recherches.

L. W.

I

Doctrines de J. Mill et de H.-H. Gossen.

1. Je ne connais aucun socialiste qui ait professé cette opinion, que je tiens de mon père et que j'ai émise, il y a vingt ans, dans mon mémoire intitulé : *De l'impôt dans le canton de Vaud*, que, « des deux espèces naturelles de capitaux et de revenus producteurs, les *facultés personnelles* et le *travail* devant être l'objet de la *propriété individuelle*, et les *salaires* devant former le revenu des *individus*, les *terres* et la *rente* doivent être l'objet de la *propriété collective*, et les *fermages* doivent former le revenu de l'*Etat*. » En revanche, il y a, à ma connaissance, quelques économistes qui ont, sinon démontré, du moins formulé très explicitement cette conciliation de l'individualisme et du communisme, et qui, de plus, se sont occupés de chercher et d'indiquer des

voies et moyens en vue de la faire passer dans les faits. Ainsi, on trouve dans les *Eléments d'économie politique* de James Mill, traduits de l'anglais par J.-T. Parisot (Paris, 1823), à la section V du chapitre IV, intitulée : *De la taxe sur les rentes foncières*, une théorie très complète, quoique très concise, de l'affectation des fermages aux dépenses publiques.

L'auteur établit d'abord en ces termes l'indépendance des deux questions de la propriété foncière et de l'industrie agricole : — « Il est suffisamment clair, dit-il, que la portion » des rentes foncières qu'on peut prendre pour payer les » dépenses du gouvernement n'affecte pas l'industrie du » pays. La culture de la terre dépend du capitaliste, qui se » livre à cette industrie lorsqu'elle lui procure les profits » ordinaires pour son capital. Il est tout à fait indifférent » pour lui de payer le surplus sous forme de rente à un » individu propriétaire du fonds, ou sous forme de taxe à un » collecteur du gouvernement. »

J. Mill rappelle qu'en Europe, au Moyen-Age, et dans les principales monarchies de l'Asie, de tout temps, les dépenses de l'Etat ont été payées par la rente foncière ; puis, par une hypothèse ingénieuse et hardie, qui place nettement la question sur le terrain du droit naturel, il ajoute : — « Si un » peuple entier émigrerait pour aller habiter un pays nouveau » où la terre ne fût pas encore devenue propriété privée, il » y aurait une raison pour regarder la portion du produit » annuel, qui ailleurs constituerait la rente foncière, comme » devant spécialement subvenir aux dépenses du gouverne- » ment ; savoir que, par ce moyen, l'industrie ne souffrirait » pas la plus petite gêne, et qu'il serait pourvu aux dépenses » du gouvernement sans faire peser de charges sur aucun » individu. Les possesseurs d'un capital en recueilleraient » tous les profits ; les ouvriers recevraient leurs salaires sans » aucune déduction ; et chaque individu emploierait son ca-

» pital de la manière qui serait réellement la plus avanta-
» geuse, sans être obligé, par le pernicieux effet d'une taxe,
» de le détourner d'une direction où il était très productif
» à la nation pour lui en faire prendre une autre où il le
» serait moins. Il y a donc un avantage particulier à faire,
» des revenus de la terre, c'est-à-dire de la rente foncière,
» un fonds pour subvenir aux besoins de l'Etat. »

Au point de vue théorique où il s'est ainsi placé, J. Mill se fait à lui-même cette objection assez peu fondée « que
» les revenus de la terre, dans un pays d'une certaine éten-
» due, et passablement peuplé, excéderaient le montant de ce
» que le gouvernement aurait besoin de dépenser; » mais il répond à cela qu'on en serait quitte pour abandonner l'excédant à la propriété privée. Puis il passe au point de vue pratique ou de réalisation de l'idéal.

2. Il reconnaît tout d'abord que « là où la terre a été con-
» vertie en propriété privée sans rendre la rente foncière
» spécialement passible des charges publiques, où elle a été
» achetée et vendue dans cette condition, et où les espé-
» rances et les calculs des individus ont été basés sur cet
» état de choses, on ne pourrait sans injustice prendre la
» rente foncière seule pour subvenir aux besoins du gou-
» vernement; » vu que ce serait dépouiller les propriétaires. Toutefois, il remarque que « cette rente que l'on achète et
» l'on vend, sur laquelle les espérances des individus sont
» basées, et qui, par conséquent, doit être exempte de toute
» taxe particulière, est la rente foncière actuelle, ou du moins
» cette rente avec quelque faible perspective d'améliora-
» tion; » et qu'en conséquence l'Etat peut s'approprier sans aucune injustice toute l'augmentation susceptible d'être faite au produit net des terres, en sus de la rente primitive, par le fait soit d'une opération subite, soit d'une action lente. Il conclut donc à ce que toute la plus-value de la rente

foncière résultant de l'augmentation de la population et de l'accroissement du capital soit absorbée par l'impôt foncier.

« Il est certain, dit-il en terminant, qu'à mesure que la
 » population augmente, et que le capital est appliqué à la
 » terre d'une manière de moins en moins productive, une
 » portion de plus en plus grande du produit net des terres
 » d'un pays entre dans ce qui constitue la rente foncière,
 » tandis que les profits du capital décroissent proportionnel-
 » lement. Cette augmentation continuelle de la rente fon-
 » cière, provenant des circonstances qui sont le fait de la
 » communauté, et non le fait particulier des propriétaires,
 » semble former un fonds non moins propre à appliquer
 » d'une manière spéciale aux besoins de l'Etat, que le
 » revenu de la terre dans un pays où elle n'a jamais été
 » propriété privée. Lorsque la rente primitive du proprié-
 » taire foncier, celle sur laquelle seule il peut baser tous
 » ses arrangements pour lui-même et pour sa famille, est
 » garantie de toute charge particulière, il n'a pas le droit de
 » se plaindre de ce qu'une nouvelle source de revenu qui
 » ne lui coûte rien soit appropriée au service de l'Etat, et si
 » la chose est vraie, il est évidemment indifférent que cette
 » nouvelle source de revenu soit tirée de la terre ou de
 » toute autre part. »

Toute cette théorie tient en huit pages. Il est fâcheux qu'elle soit entachée de quelques erreurs d'économie politique pure propres à l'école anglaise telles que l'identification de l'entrepreneur avec le capitaliste et la conception ricardienne de la rente, qu'elle soit basée sur des considérations trop sommaires de justice et d'intérêt, qu'elle soit insuffisamment développée et motivée ; car, autrement, il est à croire qu'elle aurait exercé une plus grande influence sur la direction des idées et qu'elle constituerait pour son auteur un titre de gloire.

3. Mais il semble vraiment qu'une fatalité ait pesé sur ce grand problème. En 1854, un ancien assesseur de gouvernement à Cologne, nommé Hermann-Heinrich Gossen, publiait à Brunswick, chez F. Vieweg et fils, un ouvrage intitulé *Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fließenden Regeln für menschliches Handeln (Exposition des lois du trafic social et des règles de l'activité humaine qui s'en déduisent)* dans lequel il donnait à la fois une théorie mathématique de la richesse sociale extrêmement avancée et une théorie non moins remarquable de l'attribution des fermages à l'Etat. Cet ouvrage, un des plus beaux livres d'économie politique qui aient été écrits, est encore presque absolument ignoré, même en Allemagne. Des deux théories en question, voici en quoi consiste la seconde.

Elle commence à la page 250 du livre qui en a 277. Gossen estime qu'il conviendrait que la propriété de la terre appartînt entièrement à la communauté, et que celle-ci confiât l'exploitation de chaque parcelle à celui qui offrirait d'en payer la rente la plus élevée. Utilitaire pur, comme J. Mill, il appuie cette proposition de raisons d'intérêt beaucoup plus que de raisons de justice. Il la fonde principalement sur ce principe, qu'il a du reste établi mathématiquement dans sa théorie de l'équilibre économique, que la rente la plus élevée correspond à l'emploi le plus utile. L'Etat, ayant les terres entre les mains, les affermerait aux enchères dans certaines conditions énumérées par l'auteur et par lui plus ou moins heureusement justifiées. Je n'examinerai pas ces conditions; je n'en mentionnerai même qu'une seule qui est essentielle à considérer ici parce qu'elle fournit le moyen de réalisation de l'idéal. La rente à payer par le fermier à l'Etat augmenterait d'année en année d'un tant % qui serait à déduire de l'expérience, voici comment.

a étant la rente à un moment donné, z le taux de l'accrois-

sement annuel, la rente a_n après un nombre n d'années est fournie par la formule

$$a_n = a (1 + z)^n.$$

Dans cette formule, l'expérience fournit a , a_n et n ; le calcul en tire z . Ainsi, en Prusse, l'administration des domaines de l'Etat, en renouvelant les baux, après 18 ans, augmente les fermages de 10 %. Elle pose ainsi

$$110 = 100 (1 + z)^{18},$$

$$\log (1 + z) = \frac{\log 11 - \log 10}{18} = 0.0022996,$$

$$z = 0.005309,$$

soit plus de $1/2$ %. Mais cette évaluation est, paraît-il, inférieure à la réalité; et, aussi bien, l'augmentation de 10 % n'est-elle qu'un minimum. Un auteur anglais, Sinclair, a constaté que des biens qui, en 1542, sous Henry VIII, rapportaient 273,000 liv. st., rapportaient, 250 ans plus tard, 6,000,000 liv. st. On tire de là

$$6\,000\,000 = 273\,000 (1 + z)^{250},$$

$$\log (1 + z) = \frac{\log 6\,000 - \log 273}{250} = 0.005368,$$

$$z = 0.012437,$$

soit près de $1\frac{1}{4}$ %. Gossen suppose dans ses calculs $z = 0.01$.

4. C'est au moyen de cette plus-value annuelle de 1 % que Gossen va faire passer toutes les terres aux mains de l'Etat; et ce plan, aussi soigneusement détaillé que largement conçu, révèle, malgré des lacunes que nous mettrons en évidence mais qui étaient sans doute inévitables dans la première étude d'une question si complexe, non-seulement un savant ayant une connaissance profonde des lois économi-

ques, mais un administrateur rompu au maniement des affaires. L'auteur proteste contre les moyens violents proposés par les révolutionnaires communistes et socialistes. Plus scrupuleux que James Mill, il déclare que les propriétaires fonciers, ayant acheté en tenant compte de la plus-value, ont droit à cette plus-value, et que l'Etat ne saurait les en priver. Il refuse même à l'Etat le droit d'expropriation, et il l'oblige à acquérir les terres en traitant de gré à gré avec les propriétaires, ce qu'il peut, dit-il, parfaitement faire. Selon lui, en effet, l'Etat a, pour l'achat des terres, trois avantages sur les particuliers :

1° Il emprunte à meilleur marché qu'eux, et, en conséquence, il peut acheter plus cher ;

2° Il dure plus longtemps qu'eux, et, en conséquence, une somme à toucher à longue échéance a, pour lui, plus de valeur ;

3° Pour la même raison, il peut conclure des baux plus longs et, par conséquent, plus élevés.

Le résultat de ces trois circonstances est que *l'Etat peut acheter la terre des particuliers assez bon marché pour trouver dans la hausse de la rente foncière le moyen d'amortir le prix d'achat.*

En Prusse, au moment où Gossen écrivait, c'est-à-dire en décembre 1852, le $3\frac{1}{2}\%$ était à environ 94, c'est-à-dire que l'Etat empruntait à moins de $3\frac{3}{4}\%$. Or, selon lui, dans ce pays, à ce moment, on pouvait acquérir autant de terre que l'on voulait au prix de $26\frac{2}{3}$ capitaux pour 1. En empruntant pour acheter à ce prix, l'Etat n'aurait aucun excédant des intérêts à payer sur le fermage à recevoir dans la première année, puisqu'il tirerait de son placement les $3\frac{3}{4}\%$ qu'il payerait pour son emprunt ; et il pourrait commencer dès la seconde année à amortir sa dette au moyen de la plus-value du fermage. Mais alors même que l'Etat aurait, au

début, un excédant des intérêts à payer sur le fermage à recevoir, il ne serait, en réalité, pas en perte, selon Gossen, si la plus-value de la rente pendant la seconde année était au moins égale à l'intérêt de l'excédant en question. Or dans ces conditions, il pourrait augmenter sensiblement son prix.

Soit A le prix d'une terre et le montant d'une somme empruntée par l'Etat pour acquérir cette terre, i le taux de l'intérêt de l'emprunt, a le montant du fermage initial, z le taux de la plus-value de la rente. L'intérêt annuel à payer par l'Etat est de Ai . A supposer qu'il y aurait un excédant de cet intérêt Ai sur le fermage initial a , pendant la première année, et que le déficit $Ai - a$ serait à emprunter, il n'y aurait pas, en réalité, de perte pour l'Etat si l'intérêt de cet emprunt supplémentaire, $(Ai - a) i$, était compensé par la plus-value az . La limite du prix d'achat, dans ces conditions, est donc fournie par l'équation

$$(Ai - a) i = az,$$

d'où l'on tire

$$A = a \frac{i + z}{i^2}.$$

Dans l'hypothèse où $i = 0.0375$, où $z = 0.01$, le rapport de A à a est de $33 \frac{7}{9}$, au lieu de $26 \frac{2}{3}$. Ce prix de $33 \frac{7}{9}$ capitaux pour 1 représente un placement à environ 3% .

5. Gossen a appuyé ces calculs généraux de trois tableaux sur lesquels nous en reproduirons deux. Le premier se rapporte au cas d'une terre de 100 000 payée au moyen d'un emprunt à 4% et rapportant 4 000, soit 4% , avec plus-value de 1% par an. L'amortissement commence au bout de 1 an et est terminé au bout de 47 ans. A ce moment, il y a même un excédant de 3 977, et le fermage, de 6 448, est entièrement disponible. Le second se rapporte au cas d'une terre de même prix, achetée dans les mêmes conditions, mais

ne rapportant que 3333.33, soit 3.33 %₀. La somme due augmente par excédant des intérêts sur le fermage jusqu'après la 31^e année où elle égale 113 841. Après la 32^e année, il y a un excédant du fermage sur les intérêts de 28, et la somme due diminue.

1^{er} TABLEAU.

n	A_n	$A_n i$	a_n	$a_n - A_n i$
0	100 000	4 000	4 000	0
1	100 000	4 000	4 040	40
2	99 960	3 998	4 080	82
3	99 878	3 995	4 121	126
4	99 752	3 990	4 161	172
5	99 580	3 983	4 204	221
6	99 359	3 974	4 246	272
7	99 087	3 963	4 288	325
8	98 762	3 950	4 331	381
9	98 381	3 935	4 374	439
10	97 942	3 918	4 418	500
11	97 442	3 898	4 462	564
12	96 878	3 875	4 507	632
13	96 246	3 850	4 552	702
14	95 544	3 822	4 598	776
15	94 768	3 791	4 644	853
16	93 915	3 757	4 690	933
17	92 982	3 719	4 737	1 018
18	91 964	3 679	4 784	1 105
19	90 859	3 634	4 832	1 198
20	89 661	3 586	4 880	1 294
21	88 367	3 535	4 929	1 394
22	86 973	3 479	4 978	1 499
23	85 474	3 419	5 028	1 609
24	83 865	3 355	5 078	1 723
25	82 142	3 286	5 129	1 843
26	80 299	3 212	5 180	1 968

27	78 331	3 133	5 232	2 099
28	76 232	3 049	5 284	2 235
29	73 997	2 960	5 337	2 377
30	71 620	2 865	5 390	2 525
31	69 095	2 764	5 444	2 680
32	66 415	2 658	5 498	2 841
33	63 574	2 543	5 553	3 010
34	60 564	2 423	5 609	3 186
35	57 378	2 295	5 665	3 370
36	54 008	2 160	5 722	3 562
37	50 446	2 018	5 779	3 761
38	46 685	1 867	5 837	3 970
39	42 715	1 709	5 895	4 186
40	38 529	1 541	5 954	4 413
41	34 116	1 365	6 014	4 649
42	29 467	1 179	6 074	4 895
43	24 572	983	6 135	5 152
44	19 420	777	6 196	5 419
45	14 001	560	6 258	5 698
46	8 303	332	6 321	5 989
47	2 314	93	6 384	6 291
48	— 3 977		6 448	

2^e TABLEAU.

n	A_n	$A_n i$	a_n	$a_n - A_n i$
0	100 000	4 000	3 333	— 667
1	100 667	4 027	3 366	— 659
2	101 326	4 053	3 400	— 653
3	101 979	4 079	3 434	— 645
4	102 624	4 105	3 468	— 637
5	103 261	4 130	3 503	— 627
6	103 888	4 156	3 538	— 618
7	104 506	4 180	3 573	— 607
8	105 113	4 205	3 609	— 596

9	105 709	4 228	3 645	— 583
10	106 292	4 252	3 681	— 571
11	106 863	4 275	3 718	— 557
12	107 420	4 297	3 754	— 543
13	107 962	4 318	3 793	— 525
14	108 487	4 339	3 830	— 509
15	108 996	4 360	3 869	— 491
16	109 487	4 379	3 907	— 472
17	109 959	4 398	3 947	— 451
18	110 410	4 416	3 986	— 430
19	110 840	4 434	4 026	— 408
20	111 248	4 450	4 066	— 384
21	111 632	4 465	4 107	— 358
22	111 990	4 480	4 148	— 342
23	112 322	4 493	4 189	— 304
24	112 626	4 505	4 231	— 274
25	112 900	4 516	4 274	— 242
26	113 142	4 526	4 316	— 210
27	113 352	4 534	4 359	— 175
28	113 527	4 541	4 403	— 138
29	113 665	4 547	4 447	— 100
30	113 765	4 551	4 492	— 59
31	113 824	4 553	4 536	— 17
32	113 841	4 554	4 582	+ 28

6. Tel est le plan de Gossen. Il en énumère les avantages dont quelques-uns seraient à discuter et même à contester, mais au nombre desquels figure l'abolition de tous les impôts qui est un avantage indiscutable et incontestable. Ce plan repose, comme celui de Mill, sur une pleine connaissance de ce fait économique capital de la plus-value de la rente foncière dans une société progressive ; mais il est bien plus vaste et plus ambitieux que celui de Mill puisqu'il prétend d'une part laisser aux propriétaires fonciers la plus-value qu'ils ont payée et d'autre part remettre la totalité des fer-

mages aux mains de l'Etat. A ce titre il est plus séduisant ; mais est-il aussi sûr et aussi praticable ?

C'est en ajournant les résultats de l'opération, qui, dans le système de Mill, seraient immédiats, que Gossen pense atteindre son double but. On peut se demander si cet ajournement est un moyen suffisant. Comme on l'a vu, les tableaux de Gossen ne se rapportent pas exactement à ses formules. Dans ses formules, il supposait le taux de l'intérêt de 3.75 %₀, et le prix pouvant aller de 26.66 à 37.77 capitaux pour 1. Dans ses tableaux, il suppose le taux de l'intérêt de 4 %₀, et le prix pouvant aller non pas de 25 à 31.25 capitaux pour 1, comme cela résulterait de la formule $\frac{A}{a} = \frac{i+z}{i^2}$, mais seulement de 25 à 30 capitaux pour 1. Gossen nous affirme d'ailleurs qu'à 26.66 capitaux pour 1 on peut, dans beaucoup de contrées de la Prusse, acquérir autant de terre qu'on le désire ; et il semble croire qu'à 25 capitaux pour 1 on le pourrait de même, si le taux de l'intérêt s'élevait de 3.75 à 4 %₀, puisqu'il nous donne un tableau dressé dans cette hypothèse. Mais comment, en Prusse, les particuliers, détenteurs d'épargnes ou spéculateurs, paient-ils du même prix un titre de rente sur l'Etat d'un revenu constant de 3750 ou 4000 et une terre rapportant un fermage initial de 3750 ou 4000 susceptible d'un accroissement bien constaté de 1 %₀ par an ? La plus-value de la rente une fois déterminée, il doit en résulter mathématiquement, pour les terres, un prix normal tel qu'il ne puisse y avoir avantage à arbitrer des capitaux mobiliers contre des capitaux fonciers. Et, s'il en est ainsi, de deux choses l'une : ou l'Etat paiera les terres au prix normal, de façon à ne faire aucun tort aux propriétaires, et en ce cas il n'amortira pas ; ou il paiera les terres à un prix inférieur au prix normal, de manière à amortir, et alors il fera tort aux pro-

priétaires. Il est vrai que Gossen, portant la question du terrain théorique sur le terrain pratique, nous parle de circonstances qui permettraient à l'Etat de s'avancer plus loin que les particuliers vers le prix normal des terres sans toutefois l'atteindre. Reste seulement à savoir si ces circonstances sont décisives. Quel est le prix normal ? De combien s'en rapprochent les propriétaires ? De combien s'en rapproche l'Etat ? Voilà les questions que les exemples concrets de Gossen ne résolvent pas et qui, dans une affaire de cette gravité et de cette importance, veulent être tirées tout à fait au clair. Il n'y a qu'une manière d'y réussir, c'est de les reprendre pour notre compte. Nous allons faire rigoureusement la théorie mathématique du prix des terres résultant de la plus-value de la rente (§§ II et III) ; puis nous ferons la théorie de l'achat des terres par emprunt avec amortissement au moyen du fermage (§§ IV et V) ; et nous verrons si et comment la possibilité de l'amortissement au moyen du fermage se concilie avec le paiement du prix normal résultant de la plus-value (§§ VI et VII).

II

Du prix des terres. Formule de prix normal en cas de variation temporaire ou perpétuelle du fermage.

7. Dans la 49^e leçon de nos *Eléments d'économie politique pure*, alors que nous n'avions pas encore constaté le fait ni établi les lois de la variation des prix dans une société progressive, nous énoncions que, i étant le taux du revenu net, déterminé par le rapport du prix de vente des profits des capitaux mobiliers au prix de revient de ces capitaux, à l'état d'équilibre général de la production et de l'échange, p_t , p'_t , p''_t ... étant les prix de vente des rentes des terres (T) (T')

(T'')... les prix courants de ces terres P_t, P_t', P_t'' ... étaient déterminés par le système des équations

$$P_t = \frac{p_t}{i}, \quad P_t' = \frac{p_t'}{i}, \quad P_t'' = \frac{p_t''}{i} \dots$$

Dans la 52^e leçon, après avoir reconnu que, dans une société progressive, c'est-à-dire dans une société où le capital s'accroît et où la population augmente, *le prix de la rente, ou le fermage, s'élève sensiblement*, et que, dans une telle société, *le taux du revenu net s'abaisse sensiblement*, nous avons énoncé qu'en conséquence, dans une société progressive, *le prix des terres s'élève* en raison à la fois de l'élévation du fermage et de l'abaissement du taux du revenu net. Mais cela ne suffit pas, et le moment est venu de montrer à présent que cette circonstance de l'élévation du fermage dans une société progressive modifie notablement les équations ci-dessus.

Pour plus de simplicité, et aussi pour nous conformer autant que possible aux notations de Gossen, appelons a ce que nous appelions jusqu'ici p_t , A ce que nous appelions P_t . Et soit une terre qui rapporte actuellement a de fermage et dont le fermage s'élève régulièrement de z fois son montant d'année en année. z est ainsi le taux de l'accroissement annuel du fermage ou le taux de la plus-value de la rente. Nous supposerons d'abord cette plus-value temporaire et devant avoir lieu pendant m années, sauf à la supposer ensuite perpétuelle en faisant m égal à l'infini. Soit toujours i le taux du revenu net. Dans ces conditions, le fermage de la terre, fixé aujourd'hui et payable dans 1 an, est, pour la 1^{re} année, a . Il sera, après 1 an et pour la 2^e année, $a + az = a(1 + z)$; après 2 ans et pour la 3^e année, $a(1 + z) + a(1 + z)z = a(1 + z)(1 + z) = a(1 + z)^2$; après 3 ans et pour la 4^e année, $a(1 + z)^2 + a(1 + z)^2z = a(1 + z)^2(1 + z) = a(1 + z)^3$...; enfin après m années et pour la

$m + 1^{\text{e}}$ année, $a(1+z)^{m-1} + a(1+z)^{m-1}z = a(1+z)^{m-1}(1+z) = a(1+z)^m$. Or il n'est pas admissible que le prix de cette terre soit actuellement $\frac{a}{i}$, dans un an $\frac{a(1+z)}{i}$, dans 2 ans $\frac{a(1+z)^2}{i}$, dans 3 ans $\frac{a(1+z)^3}{i}$... enfin dans m années $\frac{a(1+z)^m}{i}$. Les individus qui ont des épargnes à placer fe-

ront entrer l'accroissement du fermage en ligne de compte dans leur demande de capitaux fonciers; et, à supposer que ces individus n'y songeraient pas, il se trouvera des spéculateurs pour le faire. En conséquence, le prix des terres s'élèvera. De combien? C'est ce qu'il s'agit de reconnaître.

8. Soit d'abord un individu qui a des épargnes à placer. Combien cet individu peut-il payer une terre qui rapporte actuellement a de fermage et dont le fermage s'élève régulièrement de z fois son montant d'année en année, c'est-à-dire s'accroît suivant un taux égal à z ?

Il est clair que cet individu peut acheter d'abord au prix de $\frac{a}{i}$ le fermage a à recevoir dans 1 an et les années suivantes.

Mais, dans 2 ans, le fermage à toucher, au lieu de a , sera $a(1+z)$; c'est-à-dire qu'il y aura, à partir de 1 an, un accroissement az . Cet accroissement vaudra dans 1 an $\frac{az}{i}$, et il vaut actuellement $\frac{az}{i(1+i)}$.

Dans 3 ans, le fermage à toucher, au lieu de $a(1+z)$, sera $a(1+z)^2$; c'est-à-dire qu'il y aura, à partir de 2 ans, un accroissement $a(1+z)z$. Cet accroissement vaudra dans 2 ans $\frac{a(1+z)z}{i}$, et il vaut actuellement $\frac{a(1+z)z}{i(1+i)^2}$.

Dans 4 ans, le fermage à toucher, au lieu de $a(1+z)^2$, sera $a(1+z)^3$; c'est-à-dire qu'il y aura, à partir de 3 ans,

un accroissement $a(1+z)^2z$. Cet accroissement vaudra dans 3 ans $\frac{a(1+z)^2z}{i}$, et il vaut actuellement $\frac{a(1+z)^2z}{i(1+i)^3}$...

Enfin dans $m+1$ années, le fermage à toucher, au lieu de $a(1+z)^{m-1}$, sera $a(1+z)^m$; c'est-à-dire qu'il y aura, à partir de m années, un accroissement $a(1+z)^{m-1}z$. Cet accroissement vaudra dans m années $\frac{a(1+z)^{m-1}z}{i}$, et il vaut actuellement $\frac{a(1+z)^{m-1}z}{i(1+i)^m}$.

La valeur totale actuelle du fermage initial et des m accroissements à réaliser en m années est ainsi de

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)} + \frac{a(1+z)z}{i(1+i)^2} + \frac{a(1+z)^2z}{i(1+i)^3} + \dots + \frac{a(1+z)^{m-1}z}{i(1+i)^m} \\ &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i} \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{(1+z)}{(1+i)^2} + \frac{(1+z)^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(1+z)^{m-1}}{(1+i)^m} \right]. \end{aligned}$$

La quantité entre crochets est une progression géométrique dont la somme est

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{(1+z)^{m-1}}{(1+i)^m} \times \frac{(1+z)}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)}}{\frac{(1+z)}{(1+i)} - 1} = \frac{\frac{1}{(1+i)} \left[\frac{(1+z)^m}{(1+i)^m} - 1 \right]}{\frac{(1+z)}{(1+i)} - 1} \\ &= \frac{\frac{1}{(1+i)} \times \frac{(1+z)^m - (1+i)^m}{(1+i)^m}}{\frac{(1+z) - (1+i)}{(1+i)}} \\ &= \frac{1}{(1+i)^m} \times \frac{(1+z)^m - (1+i)^m}{z - i} = \frac{1}{(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i - z}, \end{aligned}$$

l'une ou l'autre de ces deux dernières formes devant être préférée selon que z est $>$ ou $<$ i .

Par conséquent, notre individu peut payer la terre dont il s'agit

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} & [1] \\
 &= \frac{a}{i} \left[1 + \frac{z}{(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \right] \\
 &= \frac{a}{i} \left[\frac{(1+i)^m (i-z) + z [(1+i)^m - (1+z)^m]}{(1+i)^m (i-z)} \right] \\
 &= \frac{a}{i} \left[\frac{i(1+i)^m - z(1+i)^m + z(1+i)^m - z(1+z)^m}{(1+i)^m (i-z)} \right] \\
 &= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}. & [2]
 \end{aligned}$$

Nous nous réservons, pour la plus grande commodité de la discussion, de prendre l'équation du prix normal des terres tantôt sous la forme [1] et tantôt sous la forme [2].

C'est une chose qui est dores et déjà certaine que, tant que le prix des terres n'aura pas atteint cette limite, il y aura avantage, pour un individu ayant des épargnes à placer, à acheter des terres plutôt que des capitaux; que, quand cette limite sera atteinte, l'un ou l'autre placement lui sera également avantageux; qu'en conséquence, le prix ci-dessus représente pour lui le prix normal de la terre. Mais il ne sera pas inutile de montrer que ce même prix est aussi le prix limite de la terre pour un spéculateur.

9. Soit donc à présent un spéculateur qui opère avec des capitaux empruntés. Si on vendait les terres purement et simplement en raison de leur fermage actuel, cet homme n'aurait, pour acheter une terre de revenu a , qu'à emprunter une somme $\frac{a}{i}$. En laissant cette somme se capitaliser à

intérêts composés pendant m années, il aurait à son débit, au bout de ce temps, en capital et intérêts, une somme de

$$a \frac{(1+i)^m}{i}.$$

Mais, d'autre part, notre homme, touchant des fermages $a, a(1+z), a(1+z)^2 \dots a(1+z)^{m-1}$, et les plaçant au taux de i , à intérêts composés, aurait à son crédit, au bout de m années,

$$\begin{aligned} & a(1+z)^{m-1} + a(1+z)^{m-2}(1+i) + a(1+z)^{m-3}(1+i)^2 + \dots \\ & \quad + a(1+i)^{m-1} \\ = & a(1+z)^{m-1} \left[1 + \frac{(1+i)}{(1+z)} + \frac{(1+i)^2}{(1+z)^2} + \dots + \frac{(1+i)^{m-1}}{(1+z)^{m-1}} \right]. \end{aligned}$$

La quantité entre crochets est une progression géométrique dont la somme est

$$\begin{aligned} & \frac{(1+i)^{m-1}}{(1+z)^{m-1}} \times \frac{(1+i)}{(1+z)} - 1 = \frac{(1+i)^m}{(1+z)^m} - 1 = \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{(1+z)^m} \\ & \frac{\frac{(1+i)^m}{(1+z)^m} - 1}{\frac{(1+i)}{(1+z)} - 1} = \frac{\frac{(1+i)^m}{(1+z)^m} - 1}{\frac{(1+i) - (1+z)}{(1+z)}} \\ & = \frac{1}{(1+z)^{m-1}} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i - z} \\ & = \frac{1}{(1+z)^{m-1}} \times \frac{(1+z)^m - (1+i)^m}{z - i} \end{aligned}$$

Et ainsi la somme obtenue est

$$a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i - z}.$$

La différence du crédit et du débit serait donc

$$a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i - z} - a \frac{(1+i)^m}{i}.$$

Mais ce n'est pas tout. La terre qui, lorsqu'elle rapportait un fermage a , se vendait $\frac{a}{i}$, après m années, lorsqu'elle rapporterait un fermage $a(1+z)^m$, se vendrait $\frac{a(1+z)^m}{i}$. Par conséquent, le bénéfice à réaliser serait

$$\begin{aligned} & a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} - a \frac{(1+i)^m}{i} + a \frac{(1+z)^m}{i} \\ &= a \left[\frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} - \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i} \right] \\ &= a \left[\frac{i(1+i)^m - i(1+z)^m - i(1+i)^m + i(1+z)^m + z(1+i)^m - z(1+z)^m}{i(i-z)} \right] \\ &= az \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i(i-z)}. \end{aligned}$$

Ce bénéfice, à réaliser dans m années, vaut aujourd'hui

$$\frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z};$$

et c'est là précisément le supplément de prix que le spéculateur pourrait payer, tout comme le détenteur d'épargnes, pour ne faire aucun bénéfice.

10. Ainsi, le prix normal en unités de numéraire d'une terre dont le fermage actuel est a et augmente de z fois son montant par an pendant m années, quand le taux du revenu net est i , est bien, conformément à l'équation [1] ou [2],

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \\ &= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}, \end{aligned}$$

et le prix normal en capitaux pour un de fermage initial est bien

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{i} + \frac{z}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \quad [3]$$

$$= \frac{1}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}, \quad [4]$$

au début de la plus-value. Ces mêmes prix sont évidemment

$$A_m = \frac{a(1+z)^m}{i}$$

et

$$\frac{A_m}{a} = \frac{(1+z)^m}{i},$$

à la fin de la plus-value. Nous étudierons un peu plus loin le mouvement de variation de $\frac{A}{a}$ de la première valeur à la seconde.

Quand $z=i$, l'équation [1] ou [2] prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Mais on trouve alors directement, par l'un ou l'autre des deux procédés qui nous ont servi à l'établir,

$$A = \frac{a}{i} + \frac{ma}{1+i} \quad [5]$$

et

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{i} + \frac{m}{1+i}. \quad [6]$$

Si, dans la formule [3] ou [4] ci-dessus, on suppose $i=0.04$ et $z=0.01$, on trouve respectivement, pour le rapport de A à a , selon que

$m =$	0	$\frac{A}{a} = 25$
	1	25.24
	2	25.47
	5	26.13
	10	27.11
	20	28.69
	30	29.89
	40	30.74
	50	31.40
	60	31.89
	70	32.25
	80	32.53
	90	32.73
	100	32.78

11. Quand $m = 0$, l'équation [1] ou [2] devient

$$A = \frac{a}{i},$$

ce qui doit être.

Pour voir ce que devient A quand $m = \infty$, mettons l'équation [1] ou [2] sous la forme suivante

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i} + \frac{a}{i} \times \frac{z \left[1 - \left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m \right]}{i-z} \\ &= \frac{a}{i} \times \frac{i-z \left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m}{i-z}. \end{aligned}$$

Supposons d'abord z positif, et successivement $> i$, égal à i et $< i$.

Dans le premier cas, l'équation [1] ou [2] prend la forme

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i} + \frac{a}{i} \times \frac{z \left[\left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m - 1 \right]}{z-i}, \\ &= \frac{a}{i} \times \frac{z \left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m - i}{z-i}. \end{aligned}$$

Et, si m tend vers l'infini, $\left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m$ et A tendent vers l'infini.

Dans le second cas, on a

$$A = \frac{a}{i} + \frac{ma}{1+i}.$$

Et, si m tend vers l'infini, $\frac{ma}{1+i}$ et A tendent vers l'infini.

Ainsi : — *En cas de plus-value perpétuelle de la rente, et quand le taux de la plus-value est égal ou supérieur au taux du revenu net, le prix normal des terres est infini.* Nous réservons la question de savoir jusqu'à quel point cette hypothèse d'une plus-value perpétuelle de la rente égale ou supérieure au taux de l'intérêt est réalisable.

Dans le troisième cas, l'équation [1] ou [2] gardant la forme que nous lui avons donnée, si m tend vers l'infini, $\left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m$ tend vers zéro, et le prix normal tend vers

$$A = \frac{a}{i-z}; \quad [7]$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{i-z}, \quad [8]$$

soit

$$\frac{a}{A} = i - z.$$

Ainsi : — *En cas de plus-value perpétuelle de la rente, et quand le taux de la plus-value est inférieur au taux du revenu net, le prix normal des terres est égal au rapport du fermage à la différence du taux du revenu net et du taux de la plus-value. Autrement dit, le taux du fermage est égal à la différence du taux du revenu net et du taux de la plus-value.*

Cette formule remarquable vaut la peine d'être établie directement. Soit un capital mobilier rapportant a au taux de i . Si, sur le revenu a , on prélève une somme $a \frac{z}{i}$ pour la capitaliser, il restera $a \frac{i-z}{i}$. L'année suivante, le revenu sera, au lieu de a , $a(1+z)$. Si, sur ce revenu $a(1+z)$, on prélève une somme $a(1+z) \frac{z}{i}$ pour la capitaliser, il restera $a(1+z) \frac{i-z}{i}$. L'année suivante, le revenu sera, au lieu de $a(1+z)$, $a(1+z)^2$. Si, sur ce revenu $a(1+z)^2$, on prélève une somme $a(1+z)^2 \frac{z}{i}$ pour la capitaliser, il restera $a(1+z)^2 \frac{i-z}{i}$... Et ainsi de suite. Par où l'on voit qu'un revenu constant de a équivaut à un revenu de $a \frac{i-z}{i}$ croissant de z fois son montant d'année en année. Si le prix d'un tel revenu est $\frac{a}{i}$, le prix d'un revenu de a croissant de z fois son montant d'année en année sera donné par la proportion

$$A : \frac{a}{i} :: a : a \frac{i-z}{i};$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{\frac{a^2}{i}}{\frac{a(i-z)}{i}} = \frac{a}{i-z}.$$

Supposons maintenant z négatif et aussi > -1 , en écartant ainsi le cas où le fermage disparaîtrait entièrement après une année pour devenir négatif. Alors, si m tend vers l'infini, $\left(\frac{1-z}{1+i}\right)^m$ tend vers zéro, et le prix normal tend vers

$$A = \frac{a}{i+z};$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{i+z},$$

soit

$$\frac{a}{A} = i+z.$$

Ainsi: — *En cas de moins-value perpétuelle de la rente, le prix normal des terres est égal au rapport du fermage à la somme du taux de l'intérêt net et du taux de la moins-value. Autrement dit, le taux du fermage est égal à la somme du taux du revenu net et du taux de la moins-value.*

On établirait directement cette formule, comme la précédente, en montrant qu'un revenu de $a \frac{i+z}{i}$ décroissant de z fois son montant d'année en année, sur lequel on prélèverait une somme de $a \frac{z}{i}$ pour la capitaliser, serait, par le fait, transformé en un revenu constant de a . D'où il suivrait que, le prix d'un tel revenu devant être $\frac{a}{i}$, le prix d'un revenu de a dé-

croissant de z fois son montant d'année en année serait donné par la proportion

$$A : \frac{a}{i} :: a : a \frac{i+z}{i};$$

d'où l'on tirerait

$$A = \frac{\frac{a^2}{i}}{\frac{a(i+z)}{i}} = \frac{a}{i+z}.$$

Les précédentes formules [7] et [8], relatives au cas de plus-value perpétuelle, et ces dernières, relatives au cas de moins-value perpétuelle, se confondent, comme on voit, à la condition de prendre z avec le signe $+$ ou avec le signe $-$ suivant qu'il y a plus-value ou moins-value. Nous les ferons, par la suite, ainsi rentrer les unes dans les autres.

III

Du prix des terres. Formule de variation du prix normal pendant la période de variation du fermage.

12. Quand $z = 0$, l'équation [1] ou [2]

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \\ &= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z} \end{aligned}$$

devient

$$A = \frac{a}{i},$$

comme quand $m = 0$, ce qui doit être.

Supposons à présent $z \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$, et voyons comment le signe de z influe sur la quantité qui s'ajoute à $\frac{a}{i}$, dans l'équation [1], pour former A.

a et i étant supposés positifs, et par conséquent le facteur

$$\frac{a}{i(1+i)^m}$$

étant positif, la quantité dont il s'agit, soit

$$\frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z},$$

sera positive ou négative selon que le facteur

$$z \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z}$$

sera lui-même positif ou négatif.

Or, si z est positif, ce facteur sera toujours positif, vu que, suivant qu'on aura

$$i \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} z,$$

on aura en même temps

$$(1+i)^m \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} (1+z)^m.$$

Si z est négatif et > -1 , ce facteur deviendra

$$-z \times \frac{(1+i)^m - (1-z)^m}{i+z};$$

et alors il sera toujours négatif, vu qu'on aura toujours

$$(1+i)^m > (1-z)^m.$$

Dans le cas particulier où $z = i$,

$$A = \frac{a}{i} + \frac{ma}{1+i},$$

et alors la quantité $\frac{ma}{1+i}$, qui s'ajoute à $\frac{a}{i}$ pour former A, sera toujours positive.

Quand $m = \infty$, et que z est $> i$ ou égal à i , A devient infini. Si z est $< i$,

$$A = \frac{a}{i-z};$$

et alors A est $> \frac{a}{i}$. Si z est < 0 et > -1 ,

$$A = \frac{a}{i+z};$$

et alors A est $< \frac{a}{i}$.

Ainsi : — *Le prix normal des terres est toujours supérieur ou inférieur au rapport du fermage au taux du revenu net selon qu'il y a plus-value ou moins-value de la rente.*

13. Le prix courant des terres contient donc l'escompte des accroissements positifs ou négatifs de capital foncier afférents aux accroissements positifs ou négatifs de revenu foncier à recueillir pendant la durée de la plus-value ou de la moins-value de la rente. Il est évident que le montant de cet escompte ne saurait être égal au montant des accroissements eux-mêmes, et qu'ainsi, depuis le jour de l'apparition de la plus-value ou de la moins-value et où la terre vaut

$$\begin{aligned} \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^m} &\times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \\ &= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z} \end{aligned}$$

jusqu'au jour de la cessation de cette plus-value ou de cette moins-value et où la terre vaut

$$\frac{a(1+z)^m}{i},$$

la valeur de la terre va toujours en augmentant ou en diminuant. Il est bon, toutefois, d'établir mathématiquement le fait de cette augmentation ou de cette diminution, d'autant plus qu'en constatant la réalité de la variation, nous en étudierons la nature. Supposons donc généralement que n années se soient écoulées depuis l'apparition de la plus-value ou de la moins-value, de telle sorte que le fermage soit $a(1+z)^n$, et la durée restante de la plus-value ou de la moins-value $m-n$. Alors la terre vaudra, en vertu de l'équation [1] ou [2],

$$A_n = \frac{a(1+z)^n}{i} + \frac{a(1+z)^n z}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z} \quad [9]$$

$$= \frac{a(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n} - z(1+z)^{m-n}}{i-z}. \quad [10]$$

Or, pour faire l'étude qui nous intéresse, il faut discuter cette équation en faisant varier n de 0 à m . En donnant à n des valeurs plus petites que 0 ou plus grandes que m , on obtiendrait des valeurs de A_n qui ne rentreraient pas dans la question qui nous occupe en ce moment.

Pour porter dans cette discussion le plus de clarté possible, nous remplacerons l'équation ci-dessus par l'équation suivante

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i} + \frac{z(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z} \quad [11]$$

$$= \frac{(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n} - z(1+z)^{m-n}}{i-z}. \quad [12]$$

Nous considérerons i , z et m comme des constantes, et $\frac{A_n}{a}$ comme une fonction exponentielle de n . Nous pourrions alors représenter l'équation par une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires dont les abscisses correspondront aux *années écoulées* depuis l'apparition de la plus-value ou de la moins-value, et les ordonnées aux *prix (en capitaux pour un de fermage initial)* de la terre à la fin de chaque année. En réalité, la plus-value ou la moins-value se chiffrant d'année en année, et le prix de la terre se déterminant en conséquence, la courbe est discontinue. Nous substituerons, dans notre figure, à cette courbe discontinue une courbe continue passant par les points de variation annuelle.

Si $z = i$, on aura, en vertu des équations [5] et [6],

$$A_n = \frac{a(1+i)^n}{i} + (m-n)a(1+i)^{n-1}, \quad [13]$$

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^n}{i} + (m-n)(1+i)^{n-1}. \quad [14]$$

Si $m = \infty$, on aura, en vertu des équations [7] et [8],

$$A_n = \frac{a(1+z)^n}{i-z}, \quad [15]$$

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i-z}. \quad [16]$$

14. Usant de la formule [12], nous avons le prix $\frac{A_n}{a}$ après n années de plus-value par l'équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n} - z(1+z)^{m-n}}{i-z},$$

et le prix $\frac{A_{n+1}}{a}$ après $n + 1$ années de plus-value par l'équation

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}}{a} &= \frac{(1+z)^{n+1}}{i(1+i)^{m-(n+1)}} \times \frac{i(1+i)^{m-(n+1)} - z(1+z)^{m-(n+1)}}{i-z} \\ &= \frac{(1+i)(1+z)(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-(n+1)} - z(1+z)^{m-(n+1)}}{i-z} \\ &= \frac{(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n}(1+z) - z(1+z)^{m-n}(1+i)}{i-z} . \end{aligned}$$

Formant la différence première $\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{A_{n+1}}{a} - \frac{A_n}{a}$, nous avons successivement

$$\begin{aligned} \Delta \frac{A_n}{a} &= \frac{(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n}(1+z) - z(1+z)^{m-n}(1+i)}{i-z} \\ &\quad - \frac{(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n} - z(1+z)^{m-n}}{i-z} \\ &= \frac{(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \left[\frac{i(1+i)^{m-n}(1+z-1) - z(1+z)^{m-n}(1+i-1)}{i-z} \right] \\ &= \frac{(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n}z - z(1+z)^{m-n}i}{i-z} \\ &= \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z} . \end{aligned}$$

Si z est positif, cette différence sera toujours positive, tant que n sera > 0 et $< m$, vu que, suivant qu'on aura

$$i \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} z ,$$

on aura en même temps

$$(1+i)^{m-n} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} (1+z)^{m-n}.$$

Si z est négatif, cette différence devient

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{-z(1-z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1-z)^{m-n}}{i+z},$$

et alors elle sera toujours négative tant que n sera > 0 et $< m$, vu qu'on aura toujours

$$(1+i)^{m-n} > (1-z)^{m-n}.$$

Dans le cas particulier où $z = i$, on a, suivant la formule [14],

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^n}{i} + (m-n)(1+i)^{n-1},$$

$$\frac{A_{n+1}}{a} = \frac{(1+i)^{n+1}}{i} + [m - (n+1)](1+i)^n,$$

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)^n}{i} + [m - (n+1)](1+i)^n - (m-n)(1+i)^{n-1}$$

$$= \frac{(1+i)^n(1+i-1)}{i} + (m-n)(1+i)^{n-1}(1+i-1) - (1+i)^n$$

$$= \frac{i(1+i)^n}{i} + i(m-n)(1+i)^{n-1} - (1+i)^n$$

$$= i(m-n)(1+i)^{n-1},$$

différence toujours positive.

Quand $m = \infty$, et que z est > 0 et $< i$, ou < 0 et > -1 , on a, suivant la formule [16],

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i-z},$$

z étant pris avec le signe $+$ ou le signe $-$ selon les cas.

Alors

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}}{a} &= \frac{(1+z)^{n+1}}{i-z}, \\ \Delta \frac{A^n}{a} &= \frac{(1+z)^{n+1} - (1+z)^n}{i-z} \\ &= \frac{(1+z)^n (1+z-1)}{i-z} \\ &= \frac{z(1+z)^n}{i-z}, \end{aligned}$$

différence positive ou négative selon que z est positif ou négatif.

Ainsi : — *Le prix des terres est annuellement croissant ou décroissant, pendant la période de variation de la valeur de la rente, selon qu'il y a plus-value ou moins-value de la rente.*

Comparant l'équation

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z}$$

avec l'équation [11]

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i} + \frac{z(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z},$$

soit

$$\frac{A_n}{a} i - (1+z)^n = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z},$$

on voit que

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{A_n}{a} i - (1+z)^n.$$

Comme on peut s'en assurer facilement, cette formule est générale, et s'applique aux cas où $z = i$ et où $m = \infty$.

Ainsi : — *La variation annuelle du prix de la terre est égale à la différence de l'intérêt du capital foncier, au taux courant du revenu net, et du fermage.* Cette circonstance est rationnelle. Le propriétaire foncier dont la terre augmente de valeur doit trouver dans cette augmentation l'équivalent de ce qu'il perd sur le revenu foncier; et celui dont la terre diminue de valeur doit trouver l'équivalent de cette diminution dans ce qu'il gagne sur le revenu foncier.

La différence première $A - \frac{A_n}{a}$ étant nulle quand $n = m$, on a alors

$$\frac{A_m}{a} i - (1+z)^m = 0,$$

soit

$$A_m = \frac{a(1+z)^m}{i};$$

ce qui doit être, puisque, au moment où cesse la variation de valeur de la rente, le prix de la terre redevient une quantité constante égale au rapport du fermage au taux du revenu net. La droite horizontale

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^m}{i}$$

se substitue, à partir de ce moment, à la courbe

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i} + \frac{z(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z}.$$

15. Comme on le voit, l'escompte des accroissements positifs ou négatifs du capital foncier afférents aux accroisse-

ments positifs ou négatifs du revenu foncier ne supprime pas complètement l'augmentation ou la diminution de valeur de la terre pendant la période de plus-value ou de moins-value. Cet escompte fait seulement qu'une partie de la variation totale se produit au moment de l'apparition de la plus-value ou de la moins-value, l'autre partie se produisant d'année en année. C'est ce que la Fig. 1 va montrer tout-à-fait.

Les trois courbes AM, A'M', A''M'' correspondent respectivement aux trois cas d'une plus-value de $z = 0.05$, d'une plus-value de $z = 0.01$ et d'une moins-value de $z = 0.01$, devant durer pendant 10 ans, alors que le taux de l'intérêt net est de $i = 0.04$.

La première a donc pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.05^n}{0.04} + \frac{0.05 \times 1.05^n}{0.04 \times 1.04^{10-n}} \times \frac{1.04^{10-n} - 1.05^{10-n}}{0.04 - 0.05}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA = 37.50$, quand $n = 0$, pour arriver à une ordonnée $10M = 40.72$, quand $n = 10$. L'effet de l'escompte des accroissements de capital foncier a été de la substituer à la courbe IM.

La seconde a pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.01^n}{0.04} + \frac{0.01 \times 1.01^n}{0.04 \times 1.04^{10-n}} \times \frac{1.04^{10-n} - 1.01^{10-n}}{0.04 - 0.01}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA' = 27.11$, quand $n = 0$, pour arriver à une ordonnée $10M' = 27.61$, quand $n = 10$. L'effet de l'escompte a été de la substituer à la courbe IM'.

La troisième a pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{0.99^n}{0.04} - \frac{0.01 \times 0.99^n}{0.04 \times 1.04^{10-n}} \times \frac{1.04^{10-n} - 0.99^{10-n}}{0.04 + 0.01}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA'' = 23.05$, quand $n = 0$, pour arriver à une ordonnée $10M'' = 22.61$, quand $n = 10$. L'effet de l'escompte a été de la substituer à la courbe IM'' .

La courbe $A'''M'''$ correspond au cas d'une plus-value de $z = i = 0.04$, devant durer pendant 10 ans. Elle a donc pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.04^n}{0.04} + (10 - n) 1.04^{n-1}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA''' = 34.61$, quand $n = 0$, pour arriver à une ordonnée $10M''' = 37$, quand $n = 10$. L'effet de l'escompte a été de la substituer à la courbe IM''' .

Les deux courbes $A^{IV}M^{IV}$, A^VM^V correspondent respectivement aux deux cas d'une plus-value perpétuelle de $z = 0.01$ et d'une moins-value perpétuelle de $z = 0.01$, le taux de l'intérêt net étant de $i = 0.04$.

La première a donc pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.01^n}{0.04 - 0.01}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA^{IV} = 33.33$, quand $n = 0$, pour passer par une ordonnée $10M^{IV} = 36.82$, quand $n = 10$, et continuer à s'élever de plus en plus.

La seconde a pour équation

$$\frac{A_n}{a} = \frac{0.99^n}{0.04 + 0.01}.$$

Elle part d'une ordonnée $OA^V = 20$, quand $n = 0$, pour passer par une ordonnée $10M^V = 18.08$, quand $n = 10$, et continuer à s'abaisser de plus en plus.

16. Nous avons la différence première $\Delta \frac{A_n}{a}$ par l'équation

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z},$$

et la différence première $\Delta \frac{A_{n+1}}{a}$ par l'équation

$$\begin{aligned} \Delta \frac{A_{n+1}}{a} &= \frac{z(1+z)^{n+1}}{(1+i)^{m-(n+1)}} \times \frac{(1+i)^{m-(n+1)} - (1+z)^{m-(n+1)}}{i-z} \\ &= \frac{z(1+i)(1+z)(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-(n+1)} - (1+z)^{m-(n+1)}}{i-z} \\ &= \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n}(1+z) - (1+z)^{m-n}(1+i)}{i-z}. \end{aligned}$$

Formant la différence seconde $\Delta^2 \frac{A_n}{a} = \Delta \frac{A_{n+1}}{a} - \Delta \frac{A_n}{a}$, nous avons successivement

$$\begin{aligned} \Delta^2 \frac{A_n}{a} &= \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n}(1+z) - (1+z)^{m-n}(1+i)}{i-z} \\ &\quad - \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z} \\ &= \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \left[\frac{(1+i)^{m-n}(1+z-1) - (1+z)^{m-n}(1+i-1)}{i-z} \right] \\ &= \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{z(1+i)^{m-n} - i(1+z)^{m-n}}{i-z}. \end{aligned}$$

Si z est positif et $> i$, cette différence sera positive ou négative selon qu'on aura

$$i(1+z)^{m-n} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} z(1+i)^{m-n},$$

soit

$$\frac{(1+z)^{m-n}}{(1+i)^{m-n}} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{z}{i},$$

$$(m - n) \log \frac{1 + z}{1 + i} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \log \frac{z}{i},$$

$$m - n \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{\log \frac{z}{i}}{\log \frac{1 + z}{1 + i}}.$$

Si z est positif et $< i$, elle sera positive ou négative selon qu'on aura

$$z(1 + i)^{m-n} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} i(1 + z)^{m-n},$$

soit

$$m - n \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{\log \frac{i}{z}}{\log \frac{1 + i}{1 + z}},$$

ce qui revient au même.

La différence seconde dont il s'agit est nulle pour une valeur k de n , telle que l'on ait

$$m - k = \frac{\log \frac{i}{z}}{\log \frac{1 + i}{1 + z}}, \quad [17]$$

quantité toujours positive.

Dans le cas particulier où $z = i$,

$$\Delta \frac{A_n}{a} = i(m - n)(1 + i)^{n-1},$$

$$\Delta \frac{A_{n+1}}{a} = i[m - (n + 1)](1 + i)^n,$$

$$\begin{aligned}
A^2 \frac{A^n}{a} &= i[m - (n+1)](1+i)^n - i(m-n)(1+i)^{n-1} \\
&= i(m-n)(1+i)^{n-1}(1+i) - i(1+i)^n - i(m-n)(1+i)^{n-1} \\
&= i(m-n)(1+i)^{n-1}(1+i-1) - i(1+i)^n \\
&= i^2(m-n)(1+i)^{n-1} - i(1+i)^n,
\end{aligned}$$

différence positive ou négative selon qu'on aura

$$i^2(m-n)(1+i)^{n-1} \begin{cases} > \\ < \end{cases} i(1+i)^n,$$

soit

$$i(m-n) \begin{cases} > \\ < \end{cases} (1+i),$$

$$m-n \begin{cases} > \\ < \end{cases} \frac{1+i}{i},$$

et nulle quand on a

$$m-n = \frac{1+i}{i}, \quad [18]$$

quantité toujours positive.

Ainsi : — *En cas de plus-value temporaire, les augmentations annuelles du prix de la terre, même si elles sont d'abord croissantes, sont toujours décroissantes à la fin de la période de plus-value.*

Si z est négatif, la différence devient

$$\frac{-z(1-z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{-z(1+i)^{m-n} - i(1-z)^{m-n}}{i+z}.$$

Or cette différence est alors la différence de deux quantités négatives; le fait qu'elle est positive indique donc que, de

ces deux quantités considérées abstraction faite de leurs signes, la première $\Delta \frac{A_{n+1}}{a}$ est moindre que la seconde $\Delta \frac{A_n}{a}$.

Ainsi : — *En cas de moins-value temporaire, les diminutions annuelles du prix de la terre sont toujours décroissantes pendant la période de moins-value.*

Quand $m = \infty$, et que z est > 0 et $< i$, ou < 0 et > -1 ,

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^n}{i-z},$$

z étant pris avec le signe $+$ ou le signe $-$ selon les cas. Alors

$$\begin{aligned} \Delta \frac{A_{n+1}}{a} &= \frac{z(1+z)^{n+1}}{i-z}, \\ \Delta^2 \frac{A_n}{a} &= \frac{z(1+z)^{n+1} - z(1+z)^n}{i-z} \\ &= \frac{z(1+z)^n(1+z-1)}{i-z} \\ &= \frac{z^2(1+z)^n}{i-z}, \end{aligned}$$

différence toujours positive.

Ainsi : — *En cas de plus-value perpétuelle, les augmentations annuelles du prix de la terre sont toujours croissantes. En cas de moins-value perpétuelle, les diminutions annuelles du prix de la terre sont toujours décroissantes.*

Comparant l'équation

$$\Delta^2 \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{z(1+i)^{m-n} - i(1+z)^{m-n}}{i-z}$$

avec l'équation

$$\Delta \frac{A_n}{a} = \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z},$$

soit

$$\begin{aligned} \Delta \frac{A_n}{a} i - z(1+z)^n &= \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z} i - z(1+z)^n \\ &= z(1+z)^n \left[\frac{i(1+i)^{m-n} - i(1+z)^{m-n}}{(1+i)^{m-n}(i-z)} - 1 \right] \\ &= z(1+z)^n \left[\frac{i(1+i)^{m-n} - i(1+z)^{m-n} - i(1+i)^{m-n} + z(1+i)^{m-n}}{(1+i)^{m-n}(i-z)} \right] \\ &= \frac{z(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{z(1+i)^{m-n} - i(1+z)^{m-n}}{i-z}, \end{aligned}$$

on voit que

$$\Delta^2 \frac{A_n}{a} = \Delta \frac{A_n}{a} i - z(1+z)^n.$$

Cette circonstance est rationnelle : — *L'accroissement ou le décroissement de la variation annuelle du prix de la terre est égal à la différence de l'intérêt de cette variation, au taux courant du revenu net, et de l'accroissement ou du décroissement du fermage.*

Cette différence seconde est nulle quand $n = k$, et l'on a alors

$$\Delta \frac{A_k}{a} i - z(1+z)^k = 0,$$

soit

$$\Delta \frac{A_k}{a} = \frac{z(1+z)^k}{i}.$$

17. Si l'on exprime géométriquement ces derniers résultats, on en tire les indications suivantes concernant la forme des courbes.

La courbe AM, à partir d'un point qui a pour ordonnée

$$k = 10 - \frac{\log \frac{0.05}{0.04}}{\log \frac{1.05}{1.04}} = -13.31, \text{ la courbe } A'M', \text{ à partir d'un}$$

point qui a pour ordonnée $k = 10 - \frac{\log \frac{0.01}{0.04}}{\log \frac{1.01}{1.04}} = -37.36$, la

courbe A''M'', à partir d'un point qui a pour ordonnée $k = 10 - \frac{1.04}{0.04} = -16$, sont concaves par rapport à l'axe horizontal. Les points M, M', M'' sont des points de maximum.

La courbe A''M'' est toujours convexe. Le point M'' est un point de minimum.

Les courbes A^{iv}M^{iv}, A^vM^v sont toujours convexes.

IV

Du rachat des terres par l'Etat. Formule d'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage.

18. Dans nos sociétés modernes qui sont, au point de vue économique, des sociétés progressives, c'est-à-dire qui sont des sociétés où le capital s'accroît et où la population augmente, et dans lesquelles il y a plus-value de la rente, le prix des terres est supérieur au rapport du fermage au taux du revenu net et est, en outre, toujours croissant. Par con-

séquent, ce prix est celui non-seulement de la rente actuelle, mais de la rente future. J. Mill a donc tort de refuser et Gossen a donc raison d'accorder aux propriétaires un droit de propriété sur la plus-value de la rente qu'ils ont payée en achetant les terres. La seule chose qu'on pourrait leur contester serait le droit à une plus-value nouvelle qui viendrait s'ajouter à la première. Voilà un point capital qui est réglé par nos analyses précédentes. On a beaucoup reproché aux paysans d'acheter des terres au moyen de capitaux empruntés à un taux d'intérêt supérieur au taux du fermage. On voit clairement, par ce qui précède, que cette opération, effectuée dans de certaines conditions et limites, peut n'être pas mauvaise et peut même être bonne, grâce au phénomène de la plus-value de la rente. Il faut reconnaître que, sur bien des points, les paysans savent mieux l'économie politique que les économistes et que les gouvernants. Pendant que les économistes discutent la question de savoir sur qui tombe l'impôt foncier, les paysans, quand ils achètent des terres, se font produire leur estimation cadastrale et déduisent purement et simplement du prix d'achat la quote-part du capital foncier afférente à l'impôt foncier. Et de même, pendant que les économistes discutent la question de savoir si la rente a ou n'a pas de valeur, les paysans achètent les terres en raison non-seulement de la valeur actuelle, mais de la valeur future de la rente. De là le prix relativement élevé des terres qui, pour le dire en passant, nous fournit une confirmation expérimentale éclatante de notre théorie. Il y a grandement lieu de se demander si l'Etat ne pourrait pas, comme le croit Gossen, effectuer avec succès une opération qui réussit aux particuliers; mais, pour critiquer la théorie de Gossen, il convient de lui donner d'abord une forme analytique tout-à-fait rigoureuse et générale.

Soit A le prix d'une terre et le montant du capital em-

prunté pour l'achat, a le montant du fermage à recevoir à la fin de la 1^{re} année, i le taux de l'intérêt net, z le taux d'accroissement du fermage.

Dans n années, un individu ayant emprunté une somme A au taux de i , et ayant laissé les intérêts de cette somme se capitaliser au même taux, aura à son débit une somme de

$$A(1+i)^n.$$

Mais, à la même époque, cet individu, ayant acheté une terre dont le fermage initial est a et augmente de z fois son montant chaque année, aura touché n fermages qui auront été respectivement de a , $a(1+z)$, $a(1+z)^2$... $a(1+z)^{n-1}$. Et, s'il a placé ces fermages à intérêts composés au taux de i , il aura à son crédit une somme de

$$\begin{aligned} & a(1+z)^{n-1} + a(1+z)^{n-2}(1+i) + a(1+z)^{n-3}(1+i)^2 + \dots \\ & \quad + a(1+i)^{n-1} \\ &= a(1+z)^{n-1} \left[1 + \frac{(1+i)}{(1+z)} + \frac{(1+i)^2}{(1+z)^2} + \dots + \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+z)^{n-1}} \right]. \end{aligned}$$

Nous avons vu (9) que la quantité entre crochets est une progression géométrique dont la somme est

$$\frac{1}{(1+z)^{n-1}} \times \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z} = \frac{1}{(1+z)^{n-1}} \times \frac{(1+z)^n - (1+i)^n}{z-i},$$

et qu'ainsi la somme obtenue est

$$a \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z}.$$

Par conséquent, la somme restant due après n années écoulées est

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z}. \quad [19]$$

Quand $z=i$, l'équation [19] prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Mais on trouve alors directement, en se reportant à la progression dont la somme fournit le multiplicateur de a dans cette équation,

$$A_n = A(1+i)^n - an(1+i)^{n-1}. \quad [20]$$

Au moyen de la formule [19] on calculerait directement telle ou telle valeur de A_n des deux tableaux de Gossen (5). En procédant ainsi pour le second, de 10 en 10 ans, et le complétant jusqu'à 80 ans, alors que $A = 100,000$, $a = 3333.33$, $i = 0.04$ et $z = 0.01$, on trouve successivement pour

$n = 0$	$A_n = 100\,000. \gg \gg$
1	100 666.66
2	101 326.66
5	103 261.66
10	106 288.33
20	111 232. \gg \gg
30	113 723.33
40	112 085.33
50	103 775. \gg \gg
60	84 970. \gg \gg
70	49 960. \gg \gg
80	—9 786. \gg \gg

En comparant ces valeurs à celles qui figurent aussi dans le second tableau de Gossen, on remarquera quelques différences. Elles tiennent à ce que le mode arithmétique de calcul de Gossen, appliqué d'ailleurs avec une approximation médiocre, comporte des écarts qui vont en augmentant d'importance. Toutefois, cette circonstance n'a d'intérêt qu'au point de vue pratique. Au point de vue théorique,

qui est le nôtre, le grand avantage qu'il y a à posséder une formule rigoureuse et générale consiste en ce qu'on peut la discuter et étudier ainsi sous toutes ses faces la question du rachat des terres par l'Etat. C'est ce que nous allons faire dans ce paragraphe et dans les suivants.

19. Pour rendre cette discussion tout-à-fait claire, il faut, dans la formule [19]

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z},$$

considérer A , a , i et z comme des constantes et A_n comme une fonction exponentielle de n . On peut alors représenter l'équation par une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires dont les abscisses correspondront aux *années écoulées* depuis l'achat de la terre et les ordonnées à la *somme restant due* à la fin de chaque année. En réalité, les sommes dues étant arrêtées à la fin de chaque année, et les intérêts se composant d'année en année, la courbe est discontinue. Nous substituerons, dans la figure, à cette courbe discontinue une courbe continue passant par les points de variation annuelle.

Ainsi l'équation

$$A_n = 100,000 \times 1.04^n - 4000 \times \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01},$$

correspondante au premier tableau de Gossen, serait représentée par une courbe AN (Fig. 2); et l'équation

$$A_n = 100\,000 \times 1.04^n - \frac{10\,000}{3} \times \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01},$$

correspondante au second tableau, serait représentée par une courbe AN'.

Dans le premier cas, où le fermage initial suffit au paie-

ment des intérêts, la somme empruntée diminuant par amortissement dès la 2^e année, la courbe, horizontale jusqu'à la fin de la 1^{re} année, est décroissante à partir de ce moment. Dans le second cas, où le fermage initial ne suffit pas au paiement des intérêts, la somme empruntée augmentant par emprunts nouveaux avant de diminuer par amortissement, la courbe est successivement croissante et décroissante. Dans les deux cas, elle vient couper l'axe des années écoulées aux points N et N'. Il faut rechercher à quelles conditions il en est ainsi. D'une façon plus générale, il faut se poser ce problème : — *Rechercher dans quelles conditions on peut acheter des terres avec des capitaux empruntés en faisant l'amortissement des emprunts au moyen du fermage.* La discussion de la formule [19], effectuée d'abord au point de vue des circonstances qui permettent à A_n de devenir nul, et ensuite au point de vue des circonstances qui font que A_n est immédiatement décroissant, ou successivement croissant et décroissant, nous permettra de déterminer ces conditions avec beaucoup plus de rigueur et de précision que ne l'a fait Gossen.

20. Le point où la courbe coupe l'axe des années écoulées, correspondant au moment où l'amortissement est terminé après N années, est donné par l'équation

$$A(1+i)^N - a \frac{(1+i)^N - (1+z)^N}{i-z} = 0$$

d'où l'on tire successivement

$$A(1+i)^N = a \frac{(1+i)^N - (1+z)^N}{i-z},$$

$$A = a \frac{1 - \left(\frac{1+z}{1+i}\right)^N}{i-z},$$

$$\frac{A}{a} = \frac{1 - \left(\frac{1+z}{1+i}\right)^N}{i-z},$$

$$\frac{A}{a} (i-z) = 1 - \left(\frac{1+z}{1+i}\right)^N,$$

$$\left(\frac{1+z}{1+i}\right)^N = 1 - \frac{A}{a} (i-z),$$

$$N \log \frac{1+z}{1+i} = \log \left[1 - \frac{A}{a} (i-z) \right],$$

$$N = \frac{\log \left[1 - \frac{A}{a} (i-z) \right]}{\log \frac{1+z}{1+i}}. \quad [21]$$

Dans le cas particulier où $z = i$, cette valeur prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Mais, dans ce cas, la valeur de N pour laquelle $A_n = 0$ est donnée par l'équation

$$A(1+i)^N - aN(1+i)^{N-1} = 0$$

d'où l'on tire successivement

$$A(1+i)^N = aN(1+i)^{N-1},$$

$$A(1+i) = aN,$$

$$N = \frac{A}{a} (1+i). \quad [22]$$

21. Trois cas peuvent se présenter d'abord, suivant qu'on a $z > i$, $z = i$ ou $z < i$.

Dans le cas où z est $> i$, la quantité entre crochets au

numérateur du second membre de l'équation [21] devient $1 + \frac{A}{a}(z - i)$. Elle est positive et > 1 . Son logarithme est réel et positif. La quantité $\frac{1+z}{1+i}$ est également positive et > 1 . Son logarithme est également réel et positif. Par conséquent, la valeur de N est toujours réelle et positive quand A et a sont eux-mêmes réels et positifs.

Dans le cas où $z = i$, le second membre de l'équation [22], $\frac{A}{a}(1+i)$, est toujours réel et positif quand A et a sont eux-mêmes réels et positifs.

Ainsi : — *Dans une société où le taux d'accroissement du fermage égale ou surpasse le taux de l'intérêt net, on peut acheter des terres à un prix quelconque en faisant l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage.*

Il semble que, dans ces deux cas, il n'y ait aucune condition à la possibilité d'acheter des terres avec des capitaux empruntés en faisant l'amortissement des emprunts au moyen du fermage. Il y en a une cependant. La formule ne tient pas compte de la durée de l'accroissement du fermage, ou, pour mieux dire, elle suppose l'accroissement indéfini. Il est donc essentiel d'ajouter que *la durée de l'accroissement du fermage doit être au moins égale au nombre d'années nécessaire pour l'amortissement.*

Dans le cas où z est $< i$, pour que N soit réel, il faut que l'on ait

$$1 - \frac{A}{a}(i - z) > 0;$$

ce qui donne la condition

$$1 > \frac{A}{a}(i - z),$$

soit

$$\frac{a}{A} > i - z.$$

Et, pour que N soit positif, comme dans ce cas $\log \frac{1+z}{1+i}$ est une quantité négative, il faut que $\log \left[1 - \frac{A}{a} (i-z) \right]$ soit aussi une quantité négative, c'est-à-dire qu'il faut que l'on ait

$$1 - \frac{A}{a} (i-z) < 1,$$

soit

$$- \frac{A}{a} (i-z) < 0,$$

ce qui a toujours lieu du moment que i est $> z$. Par où l'on voit que, dans le cas dont il s'agit, si N est réel, il est en même temps positif, et qu'ainsi : — *Dans une société où le taux de l'intérêt net surpasse le taux d'accroissement du fermage, on ne peut acheter des terres en faisant l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage qu'à la condition que le taux du fermage initial soit supérieur à la différence des deux autres taux.* Cette condition particulière s'ajoute ici à la condition générale, qui subsiste toujours, que la durée de l'accroissement du fermage soit au moins égale au nombre d'années nécessaire pour l'amortissement. On verra plus tard que ces conditions ne sont pas aussi naturellement remplies que le croit Gossen.

Une confirmation des formules précédentes se trouve en supposant qu'il n'y ait pas de plus-value de la rente, c'est-à-dire que $z = 0$. L'équation [19] devient alors

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

et l'équation [21] devient

$$N = \frac{\log \left(1 - \frac{Ai}{a}\right)}{\log \frac{1}{1+i}} = \frac{\log a - \log(a - Ai)}{\log(1+i)},$$

formules ordinaires de l'amortissement d'une somme A empruntée au taux de i et pour lequel on paie une annuité de a . La condition pour que N soit réel devient alors

$$a > Ai;$$

et, en effet, pour pouvoir amortir le prix d'achat d'une terre au moyen du fermage, sans accroissement de ce fermage, il faut bien que le montant du fermage constant soit supérieur au montant des intérêts du capital emprunté pour l'achat, ou en d'autres termes, que le taux du fermage soit supérieur au taux de l'intérêt. La condition pour que N soit positif devient alors

$$-\frac{Ai}{a} < 0,$$

ce qui a toujours lieu du moment que A et a sont des quantités positives.

Enfin, z pourrait être négatif. En ce cas les deux équations [19] et [21] deviendraient

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - (1-z)^n}{i+z},$$

$$N = \frac{\log \left[1 - \frac{A}{a}(i+z)\right]}{\log \frac{1-z}{1+i}};$$

et l'inspection de ces formules fait assez voir à quelle condition l'amortissement est possible. Pour que N soit réel, il faut que l'on ait

$$1 - \frac{A}{a}(i+z) > 0,$$

soit

$$1 > \frac{A}{a}(i+z),$$

soit

$$\frac{a}{A} > i+z.$$

Et pour que N soit positif, comme dans ce cas la quantité $\log \frac{1-z}{1+i}$ est négative, il faut que la quantité $\log \left[1 - \frac{A}{a}(i+z) \right]$ soit aussi négative, c'est-à-dire qu'il faut que l'on ait

$$1 - \frac{A}{a}(i+z) < 1,$$

soit

$$- \frac{A}{a}(i+z) < 0,$$

ce qui a toujours lieu quand A et a sont positifs. Il s'ensuit que : — *Dans une société où il y a diminution et non accroissement du fermage, on ne peut acheter des terres en faisant l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage qu'à la condition que le taux du fermage initial soit supérieur à la somme du taux de l'intérêt net et du taux de la diminution du fermage.*

V

Du rachat des terres par l'Etat. Variation de la somme due pendant la période d'amortissement.

22. Après la question de savoir si l'amortissement au moyen du fermage est possible, c'est-à-dire si la courbe de la somme restant due en fonction des années écoulées coupe l'axe horizontal, une question très importante aussi est de savoir si la somme empruntée augmente par emprunts nouveaux avant de diminuer par amortissement, c'est-à-dire si la courbe est croissante avant d'être décroissante. Pour traiter cette question de la manière la plus complète, reprenons l'équation [19]

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z};$$

et faisons-y successivement $n=0, 1, 2, 3$ et 4 , il viendra successivement

$$A_0 = A,$$

$$A_1 = A(1+i) - a,$$

$$A_2 = A(1+2i+i^2) - a \frac{1+2i+i^2 - 1-2z-z^2}{i-z}$$

$$= A(1+2i+i^2) - a[2+(i+z)],$$

$$A_3 = A(1+3i+3i^2+i^3) - a \frac{1+3i+3i^2+i^3 - 1-3z-3z^2-z^3}{i-z}$$

$$= A(1+3i+3i^2+i^3) - a[3+3(i+z) + (i^2+iz+z^2)],$$

$$\Lambda_4 = (1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4) - a \frac{1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 - 1 - 4z - 6z^2 - 4z^3 - z^4}{i - z}$$

$$= (1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4) - a[4 + 6(i + z) + 4(i^2 + iz + z^2) + (i^3 + i^2z + iz^2 + z^3)].$$

Posons, pour plus de simplicité,

$$\alpha = i + z,$$

$$\beta = i^2 + iz + z^2 = i\alpha + z^2,$$

$$\gamma = i^3 + i^2z + iz^2 + z^3 = i\beta + z^3,$$

$$\delta = i^4 + i^3z + i^2z^2 + iz^3 + z^4 = i\gamma + z^4,$$

il vient

$$A_0 = A,$$

$$A_1 = A(1 + i) - a,$$

$$A_2 = A(1 + 2i + i^2) - a(2 + \alpha),$$

$$A_3 = A(1 + 3i + 3i^2 + i^3) - a(3 + 3\alpha + \beta),$$

$$A_4 = A(1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4) - a(4 + 6\alpha + 4\beta + \gamma).$$

Si on se reporte à la loi du développement du binome de Newton, celle du développement de notre formule devient évidente, et il est clair que, si on pose

$$x = i^{n-1} + i^{n-2}z + i^{n-3}z^2 + \dots + z^{n-1},$$

$$\lambda = i^n + i^{n-1}z + i^{n-2}z^2 + \dots + z^n = ix + z^n,$$

$$\mu = i^{n+1} + i^n z + i^{n-1}z^2 + \dots + z^{n+1} = i\lambda + z^{n+1},$$

$$v = i^{n+2} + i^{n+1}z + i^n z^2 + \dots + z^{n+2} = i\mu + z^{n+2},$$

il vient

$$A_n = A \left[1 + \frac{n}{1} i + \frac{n(n-1)}{1.2} i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} i^3 + \dots + i^n \right] \\ - a \left[\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \beta + \dots + x \right],$$

$$A_{n+1} = A \left[1 + \frac{n+1}{1} i + \frac{(n+1)n}{1.2} i^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} i^3 + \dots + i^{n+1} \right] \\ - a \left[\frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.2} \alpha + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} \beta + \dots + \lambda \right],$$

$$A_{n+2} = A \left[1 + \frac{n+2}{1} i + \frac{(n+2)(n+1)}{1.2} i^2 + \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3} i^3 + \dots + i^{n+2} \right] \\ - a \left[\frac{n+2}{1} + \frac{(n+2)(n+1)}{1.2} \alpha + \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3} \beta + \dots + \mu \right],$$

$$A_{n+3} = A \left[1 + \frac{n+3}{1} i + \frac{(n+3)(n+2)}{1.2} i^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3} i^3 + \dots + i^{n+3} \right] \\ - a \left[\frac{n+3}{1} + \frac{(n+3)(n+2)}{1.2} \alpha + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3} \beta + \dots + \nu \right].$$

23. Cela posé, formons les différences premières $\Delta A_0 = A_1 - A_0$, $\Delta A_1 = A_2 - A_1$, $\Delta A_2 = A_3 - A_2$, $\Delta A_3 = A_4 - A_3$... $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$, $\Delta A_{n+1} = A_{n+2} - A_{n+1}$, $\Delta A_{n+2} = A_{n+3} - A_{n+2}$, nous aurons

$$\Delta A_0 = A i - a,$$

$$\Delta A_1 = A (i + i^2) - a (1 + \alpha),$$

$$\Delta A_2 = A(i + 2i^2 + i^3) - a(1 + 2\alpha + \beta),$$

$$\Delta A_3 = A(i + 3i^2 + 3i^3 + i^4) - a(1 + 3\alpha + 3\beta + \gamma),$$

.....

$$\Delta A_n = A \left[i + \frac{n}{1} i^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^3 + \dots + i^{n+1} \right]$$

$$- a \left[1 + \frac{n}{1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta + \dots + \lambda \right],$$

$$\Delta A_{n+1} = A \left[i + \frac{n+1}{1} i^2 + \frac{(n+1)n}{1.2} i^3 + \dots + i^{n+2} \right]$$

$$- a \left[1 + \frac{n+1}{1} \alpha + \frac{(n+1)n}{1.2} \beta + \dots + \mu \right],$$

$$\Delta A_{n+2} = A \left[i + \frac{n+2}{1} i^2 + \frac{(n+2)(n+1)}{1.2} i^3 + \dots + i^{n+3} \right]$$

$$- a \left[1 + \frac{n+2}{1} \alpha + \frac{(n+2)(n+1)}{1.2} \beta + \dots + \nu \right].$$

Pour que, dès le début, les différences premières ne soient pas positives, il faut que l'on n'ait pas

$$A_1 - A_0 = \Delta A_0 = Ai - a > 0,$$

soit

$$i > \frac{a}{A}.$$

Et, en effet, il est évident que : — *Si le taux de l'intérêt net est supérieur au taux initial du fermage, la somme empruntée*

pour l'achat de la terre doit augmenter par emprunts nouveaux avant de diminuer par amortissement.

Si, comme nous l'avons fait (19), on représente par une courbe continue les variations discontinues de la somme restant due à la fin de chaque année, la condition $i > \frac{a}{A}$ correspond à la double circonstance d'une courbe croissante ou d'une courbe décroissante à son point de départ A. La condition $i = \frac{a}{A}$ correspond à la circonstance d'une courbe cessant d'être croissante pour devenir décroissante à son point de départ, c'est-à-dire à la circonstance d'un point de maximum en A, comme cela a lieu dans le cas de la courbe AN (Fig. 2) du 1^{er} tableau de Gossen, où $a = 4000$, $A = 100000$, et où, par conséquent, $\frac{a}{A} = 0.04 = i$.

Si l'on veut qu'à un moment donné, la somme due cesse de s'accroître, il faut poser généralement

$$AA_n = 0,$$

soit

$$A \left[i + \frac{n}{1} i^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^3 + \dots + i^{n+1} \right] - a \left[1 + \frac{n}{1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta + \dots + \lambda \right] = 0,$$

d'où l'on tire successivement

$$A = a \frac{1 + \frac{n}{1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta + \dots + \lambda}{i + \frac{n}{1} i^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^3 + \dots + i^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{n}{1}(i+z) + \frac{n(n-1)}{1.2}(i^2 + iz + z^2) + \dots + (i^n + \dots + z^n) \\
= & a \frac{1 + \frac{n}{1}(i+z) + \frac{n(n-1)}{1.2}(i^2 + iz + z^2) + \dots + (i^n + \dots + z^n)}{i + \frac{n}{1}i^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}i^3 + \dots + i^{n+1}} \\
= & \frac{a}{i} \left[1 + z \frac{\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \beta + \dots + x}{1 + \frac{n}{1}i + \frac{n(n-1)}{1.2}i^2 + \dots + i^n} \right] \\
= & \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z} \\
= & \frac{a}{i(1+i)^n} \times \frac{i(1+i)^n - z(1+z)^n}{i-z}.
\end{aligned}$$

24. On reconnaît les équations [1] et [2] de prix normal dans lesquelles la durée de la plus-value m est remplacée par le nombre d'années n après lequel il n'y a plus d'excédant du montant des intérêts à payer sur le montant du fermage à recevoir. En y réfléchissant, on se convainc en effet que : — *Le prix normal d'une terre est celui qui, augmenté des intérêts capitalisés et diminué des fermages capitalisés, se trouve égal, quand finit la durée de la plus-value de la rente, au rapport du fermage au taux du revenu net, de manière à ce qu'il n'y ait ni bénéfice ni perte à faire pour celui qui aurait acheté la terre lors de l'apparition de la plus-value et la revendrait lors de la cessation de cette plus-value. Et cette considération aurait pu nous faire trouver d'une manière plus simple l'équation ci-dessus d'égalité du montant des intérêts à celui du fermage, qui est aussi celle du prix normal.*

Au bout de m années, la somme due est

$$A_m = A(1+i)^m - a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z};$$

les intérêts à payer s'élèvent donc alors à

$$\left[A(1+i)^m - a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \right] i;$$

tandis que, d'autre part, le fermage à recevoir s'élève alors à

$$a(1+z)^m.$$

Pour qu'il n'y ait pas, à ce moment, accroissement de la somme due, ou pour que le prix soit prix normal, il faut que le fermage à recevoir suffise aux intérêts à payer, ou que

$$\left[A(1+i)^m - a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \right] i = a(1+z)^m,$$

ou que, conformément à notre théorème,

$$A(1+i)^m - a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} = a \frac{(1+z)^m}{i}.$$

Or, de cette équation, on tire l'équation [2] de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A(1+i)^m &= a \left[\frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} + \frac{(1+z)^m}{i} \right] \\ &= a \frac{i(1+i)^m - i(1+z)^m + i(1+z)^m - z(1+z)^m}{i(i-z)} \\ &= \frac{a}{i} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}; \\ A &\Rightarrow \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}. \end{aligned}$$

25. Si l'on pose

$$\begin{aligned}
 A &= a \frac{1 + \frac{n}{1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta + \dots + \lambda}{i + \frac{n}{1} i^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^3 + \dots + i^{n+1}} \\
 &= \frac{a}{i} \times \frac{1 + \frac{n}{1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta + \dots + \lambda}{(1+i)^n},
 \end{aligned}$$

alors $\mathcal{A}A_{n+1}$ devient

$$\begin{aligned}
 &\frac{a}{i} \times \frac{1 + \frac{n}{1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta + \dots + \lambda}{(1+i)^n} \times i(1+i)^{n+1} \\
 &\quad - a \left[1 + \frac{n+1}{1} \alpha + \frac{(n+1)n}{1.2} \beta + \dots + \mu \right] \\
 &= a \left[1 + \frac{n}{1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta + \dots + \lambda \right] (1+i) \\
 &\quad - a \left[1 + \frac{n+1}{1} \alpha + \frac{(n+1)n}{1.2} \beta + \dots + \mu \right] \\
 &= a \left[1 - 1 + \frac{n - (n+1)}{1} \alpha + \frac{n(n-1) - (n+1)n}{1.2} \beta + \dots - \mu \right. \\
 &\quad \left. + i + \frac{n}{1} \alpha i + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta i + \dots + \lambda i \right] \\
 &= a \left[-\alpha - \frac{n}{1} \beta - \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma - \dots - \mu \right. \\
 &\quad \left. + (\alpha - z) + \frac{n}{1} (\beta - z^2) + \frac{n(n-1)}{1.2} (\gamma - z^3) + \dots + (\mu - z^{n+1}) \right]
 \end{aligned}$$

$$= -a \left[z + \frac{n}{1} z^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} z^3 + \dots + z^{n+1} \right]$$

$$= -az(1+z)^n.$$

Cette quantité étant essentiellement négative, quand z est positif, il s'ensuit, comme on pouvait le prévoir, que : — *Dès que la somme due a cessé d'augmenter par emprunts nouveaux, elle commence à diminuer par amortissement.*

26. Formons maintenant les différences secondes $\mathcal{A}^2 A_0 = (A_2 - A_1) - (A_1 - A_0)$, $\mathcal{A}^2 A_1 = (A_3 - A_2) - (A_2 - A_1)$, $\mathcal{A}^2 A_2 = (A_4 - A_3) - (A_3 - A_2) \dots \mathcal{A}^2 A_n = (A_{n+2} - A_{n+1}) - (A_{n+1} - A_n)$, $\mathcal{A}^2 A_{n+1} = (A_{n+3} - A_{n+2}) - (A_{n+2} - A_{n+1})$, nous aurons

$$\mathcal{A}^2 A_0 = Ai^2 - a\alpha,$$

$$\mathcal{A}^2 A_1 = A(i^2 + i^3) - a(\alpha + \beta),$$

$$\mathcal{A}^2 A_2 = A(i^2 + 2i^3 + i^4) - a(\alpha + 2\beta + \gamma),$$

.

$$\mathcal{A}^2 A_n = A \left[i^2 + \frac{n}{1} i^3 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^4 + \dots + i^{n+2} \right]$$

$$- a \left[\alpha + \frac{n}{1} \beta + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma + \dots + \mu \right],$$

$$\mathcal{A}^2 A_{n+1} = A \left[i^2 + \frac{n+1}{1} i^3 + \frac{(n+1)n}{1.2} i^4 + \dots + i^{n+3} \right]$$

$$- a \left[\alpha + \frac{n+1}{1} \beta + \frac{(n+1)n}{1.2} \gamma + \dots + \nu \right].$$

Pour que, dès le début, les différences premières, étant d'ailleurs positives, ne soient pas croissantes, c'est-à-dire

pour que les différences secondes ne soient pas positives, il faut que l'on n'ait pas

$$(A_2 - A_1) - (A_1 - A_0) = A^2 A_0 = Ai^2 - a\alpha = Ai^2 - a(i+z) > 0,$$

soit

$$i > \frac{az}{Ai - a}.$$

Ainsi : — *Si le taux de l'intérêt net est supérieur au rapport de l'accroissement initial du fermage à l'excédant initial des intérêts à payer sur le fermage à recevoir, les augmentations annuelles de la somme due sont croissantes avant d'être décroissantes.*

Si, comme nous l'avons fait (19), on représente par une courbe continue les variations discontinues de la somme restant due à la fin de chaque année, la condition $i > \frac{az}{Ai - a}$ correspond à la double circonstance d'une courbe convexe ou concave par rapport à l'axe horizontal à son point de départ A. La condition $i = \frac{az}{Ai - a}$ correspond à la circonstance d'une courbe cessant d'être convexe pour devenir concave par rapport à l'axe horizontal à son point de départ, c'est-à-dire à la circonstance d'un point d'inflexion en A. C'est ce qui a lieu quand on pose

$$Ai^2 = a(i+z),$$

et qu'on en tire

$$A = a \frac{i+z}{i^2},$$

comme le fait Gossen pour obtenir son prix limite (4). Ainsi la condition posée par Gossen « que l'Etat ne se trouve pas

en perte (*wenn des Staat keinen Schaden haben soll*) pour la première année » ne signifie pas, comme on aurait pu le croire, « qu'il n'y ait pas d'excédant de la somme due la 2^e année sur la somme due la 1^{re} année, » ce qui impliquerait que

$$A = \frac{a}{i},$$

comme dans le cas de son 1^{er} tableau et de la courbe AN, mais bien « que l'excédant ne soit pas plus grand pour la seconde année que pour la première, ou, pour mieux dire, que ces deux excédants soient égaux. » Ce prix limite de

Gossen $A = a \frac{i+z}{i^2} = \frac{a}{i} + \frac{az}{i^2}$ n'est pas non plus le prix

$A = a \frac{1}{i-z}$ auquel l'amortissement devient impossible et

pour lequel la courbe ne vient plus couper l'axe horizontal. C'est le prix pour lequel les excédants cessent de croître et commencent à décroître. Si Gossen avait appliqué rigoureusement sa condition dans son 2^e tableau, il aurait dû

supposer $\frac{A}{a} = \frac{0.04+0.01}{0.04^2} = 31.25$, et en faisant $A=100\ 000$

faire $a = \frac{100\ 000}{31.25} = 3\ 200$. Alors il aurait eu la courbe

AN'' au lieu de la courbe AN' qu'il a eue en supposant

$a = \frac{100\ 000}{30} = 3\ 333.33$. La première courbe aurait eu son

point d'inflexion en A et son point de maximum en M'', tandis que la seconde a son point d'inflexion en K' et son point de maximum en M'.

Si l'on voulait qu'à un moment donné l'excédant cessât de s'accroître, il faudrait poser généralement

$$A^2 A_n = 0,$$

soit

$$A \left[i^2 + \frac{n}{1} i^3 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^4 + \dots + i^{n+2} \right] \\ - a \left[\alpha + \frac{n}{1} \beta + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma + \dots + \mu \right] = 0,$$

d'où l'on tirerait successivement

$$A = a \frac{\alpha + \frac{n}{1} \beta + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma + \dots + \mu}{i^2 + \frac{n}{1} i^3 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^4 + \dots + i^{n+2}}$$

$$= a \frac{(i+z) + \frac{n}{1}(i^2+iz+z^2) + \frac{n(n-1)}{1.2}(i^3+i^2z+iz^2+z^3) + \dots + (i^{n+1} + \dots + z^{n+1})}{i^2 + \frac{n}{1} i^3 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^4 + \dots + i^{n+2}}$$

$$= \frac{a}{i} \left[1 + \frac{z}{i} \times \frac{1 + \frac{n}{1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta + \dots + \lambda}{1 + \frac{n}{1} i + \frac{n(n-1)}{1.2} i^2 + \dots + i^n} \right]$$

$$= \frac{a}{i} \left[1 + \frac{z}{i} \left[1 + z \frac{\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha + \dots + \lambda}{1 + \frac{n}{1} i + \frac{n(n-1)}{1.2} i^2 + \dots + i^n} \right] \right]$$

$$= \frac{a}{i} + \frac{az}{i^2} + \frac{az^2}{i^2(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z}$$

$$= \frac{a}{i^2(1+i)^n} \times \frac{i^2(1+i)^n - z^2(1+z)^n}{i-z}.$$

27. Cette équation est dans un rapport intéressant avec la précédente relative aux différences premières.

Supposons d'abord deux prix d'achat, l'un A tel que la différence première soit nulle après n années, conformément à l'équation

$$A = \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z},$$

et l'autre A' tel que ce soit la différence seconde qui soit nulle après n années, conformément à l'équation

$$A' = \frac{a}{i} + \frac{az}{i^2} + \frac{az^2}{i^2(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z};$$

on voit tout de suite que

$$A' = \frac{a}{i} + \frac{Az}{i},$$

formule curieuse mais qu'il n'importe pas d'approfondir ici.

Supposons à présent un seul et même prix d'achat tel que la différence première soit nulle après m années, conformément à l'équation

$$A = \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z},$$

et que la différence seconde soit nulle après k années, conformément à l'équation

$$A = \frac{a}{i^2(1+i)^k} \times \frac{i^2(1+i)^k - z^2(1+z)^k}{i-z}.$$

On a, dans ces conditions,

$$\frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z} = \frac{a}{i^2(1+i)^k} \times \frac{i^2(1+i)^k - z^2(1+z)^k}{i-z},$$

$$\frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{(1+i)^m} = \frac{i^2(1+i)^k - z^2(1+z)^k}{i(1+i)^k},$$

$$i^2(1+i)^{m+k} - zi(1+i)^k(1+z)^m = i^2(1+i)^{m+k} - z^2(1+i)^m(1+z)^k,$$

$$i(1+z)^{m-k} = z(1+i)^{m-k},$$

$$\frac{i}{z} = \left(\frac{1+i}{1+z}\right)^{m-k},$$

$$(m-k) \log \frac{1+i}{1+z} = \log \frac{i}{z},$$

$$m-k = \frac{\log \frac{i}{z}}{\log \frac{1+i}{1+z}};$$

d'où il suit que : — *Le nombre d'années qui s'écoule depuis le moment où l'excédant des intérêts à payer sur les fermages à recevoir cesse de s'accroître jusqu'à celui où il devient nul ne dépend que du taux de l'intérêt net et du taux d'accroissement du fermage.* Autrement dit, la distance horizontale du point d'inflexion au point de maximum des courbes est la même quel que soit le rapport du prix d'achat au fermage initial. Dans les deux courbes AN', AN'', cette distance

$$k'm' = ON \text{ est de } \frac{\log \frac{0.04}{0.01}}{\log \frac{1.04}{1.01}} = 47.36.$$

Cette distance $m-k$ du point d'inflexion au point de maximum dans les courbes AN, AN', AN'' de la Fig. 2 est, comme on voit, la même que la distance $m-k$ du point d'inflexion au point de maximum dans les courbes AM, A'M',

A'''M''' de la Fig. 1. Cette circonstance met doré et déjà en évidence l'identité des courbes d'amortissement et des courbes de variation du prix normal; mais nous laisserons cette identité de côté pour y revenir dans un instant.

28. Si l'on pose

$$\begin{aligned} A &= a \frac{\alpha + \frac{n}{1} \beta + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma + \dots + \mu}{i^2 + \frac{n}{1} i^3 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^4 + \dots + i^{n+2}} \\ &= \frac{a}{i^2} \times \frac{\alpha + \frac{n}{1} \beta + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma + \dots + \mu}{(1+i)^n}, \end{aligned}$$

alors $i^2 A_{n+1}$ devient

$$\begin{aligned} &\frac{a}{i^2} \times \frac{\alpha + \frac{n}{1} \beta + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma + \dots + \mu}{(1+i)^n} \times i^2 (1+i)^{n+1} \\ &= a \left[\alpha + \frac{n+1}{1} \beta + \frac{(n+1)n}{1.2} \gamma + \dots + \mu \right] \\ &= a \left[\alpha + \frac{n}{1} \beta + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma + \dots + \mu \right] (1+i) \\ &\quad - a \left[\alpha + \frac{n+1}{1} \beta + \frac{(n+1)n}{1.2} \gamma + \dots + \mu \right] \\ &= a \left[\alpha - \alpha + \frac{n - (n+1)}{1} \beta + \frac{n(n-1) - (n+1)n}{1.2} \gamma + \dots - \mu \right] \\ &\quad + \alpha i + \frac{n}{1} \beta i + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma i + \dots + \mu i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a \left[-\beta - \frac{n}{1} \gamma - \frac{n(n-1)}{1.2} \delta - \dots - \nu \right. \\
&+ (\beta - z^2) + \frac{n}{1} (\gamma - z^3) + \frac{n(n-1)}{1.2} (\delta - z^4) + \dots + (\nu - z^{n+2}) \left. \right] \\
&= -a \left[z^2 + \frac{n}{1} z^3 + \frac{n(n-1)}{1.2} z^4 + \dots + z^{n+2} \right] \\
&= -az^2 (1+z)^n.
\end{aligned}$$

Cette quantité étant essentiellement négative quand z est positif, il s'ensuit que : — *Dès que l'excédant des intérêts à payer sur les fermages à recevoir a cessé de croître, il commence à décroître.*

VI

Impossibilité de l'amortissement en cas de prix normal.

29. La discussion de la formule [19] de la somme restant due en fonction des années écoulées

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z}$$

nous a fait reconnaître certaines conditions de rapport entre A et a pour que l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage soit possible. Et, d'autre part, la discussion de la formule [1] ou [2]

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} \\
&= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}
\end{aligned}$$

a mis en évidence certaines conditions de rapport entre A et a quand le prix est prix normal. Il s'agit de savoir si ces dernières conditions permettent aux premières d'être fréquemment et facilement remplies. Or, au premier coup d'œil, on voit qu'il n'en est pas ainsi.

« Dans une société où le taux de l'intérêt net surpasse le taux d'accroissement du fermage, c'est-à-dire dans le cas de z positif et $< i$, on ne peut acheter des terres en faisant l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage qu'à la condition que le taux du fermage initial soit supérieur à la différence des deux autres taux (21), » soit si l'on a

$$\frac{a}{A} > i - z.$$

Mais, d'autre part, « En cas de plus-value perpétuelle de la rente, et quand le taux de la plus-value est inférieur au taux du revenu net, le taux du fermage qui résulte du prix normal est égal à la différence du taux du revenu net et du taux de la plus-value (11), » soit

$$\frac{a}{A} = i - z.$$

« Dans une société où il y a diminution et non accroissement du fermage, c'est-à-dire dans le cas de z négatif, on ne peut acheter des terres en faisant l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage qu'à la condition que le taux du fermage initial soit supérieur à la somme du taux de l'intérêt net et du taux de la diminution du fermage (21), » soit si l'on a

$$\frac{a}{A} > i + z.$$

Mais, d'autre part, « En cas de moins-value perpétuelle de la rente, le taux du fermage qui résulte du prix normal est

égal à la somme du taux du revenu net et du taux de la moins-value (11), » soit

$$\frac{a}{A} = i + z.$$

Il y a donc contradiction entre les conditions d'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage et les conditions de prix normal dans le cas de plus-value perpétuelle quand le taux de la plus-value est inférieur au taux de l'intérêt et dans le cas de moins-value perpétuelle. Quant au cas de plus-value perpétuelle quand le taux de la plus-value est supérieur au taux de l'intérêt, le prix normal étant alors infini, il ne saurait y avoir d'amortissement. Par conséquent : — *Quand on paie le prix normal, il est impossible de faire l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage ni dans le cas de plus-value ni dans celui de moins-value perpétuelle.* Restent les cas de plus-value et de moins-value temporaire ; mais il est facile de faire voir, par une démonstration générale vraiment remarquable, que, dans ces cas aussi, il est impossible de faire l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage quand on paie le prix normal.

30. Soit une terre dont le fermage initial a est susceptible de s'accroître de z fois son montant par an pendant m années, qui a été achetée au moyen d'une somme empruntée au taux courant de i , et qui a été payée au prix normal. La somme due, en principal et intérêts, au bout de n années de plus-value, est, conformément à la formule [19],

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z}.$$

A , prix normal, est donné par l'équation [2]

$$A = \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}.$$

Or, en portant cette valeur de A dans l'équation précédente, il vient successivement

$$\begin{aligned}
 A_n &= \left[\frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z} \right] (1+i)^n \\
 &\quad - a \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z} \\
 &= a \left[\frac{i(1+i)^{m+n} - z(1+z)^m(1+i)^n}{i(1+i)^m(i-z)} - \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z} \right] \\
 &= a \frac{i(1+i)^{m+n} - z(1+z)^m(1+i)^n - i(1+i)^{m+n} + i(1+i)^m(1+z)^n}{i(1+i)^m(i-z)} \\
 &= a \frac{i(1+i)^m(1+z)^n - z(1+z)^m(1+i)^n}{i(1+i)^m(i-z)} \\
 &= a(1+i)^n(1+z)^n \times \frac{i(1+i)^{m-n} - z(1+z)^{m-n}}{i(1+i)^m(i-z)} \\
 &= \frac{a(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n} - z(1+z)^{m-n}}{i-z},
 \end{aligned}$$

soit

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+z)^n}{i(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n} - z(1+z)^{m-n}}{i-z}.$$

On reconnaît l'équation [12] de variation du prix normal en fonction des années écoulées depuis l'apparition de la plus-value. Ainsi, pendant toute la durée de la plus-value, l'acheteur dont nous étudions la situation doit, à chaque instant, une somme précisément égale, en principal et intérêts, au prix normal de la terre. Pendant toute cette période, le fermage de la terre, qui est de $a(1+z)^n$, ne suffit pas à payer les intérêts annuels de la somme

due, qui s'élèvent à $\frac{a(1+z)^n}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{i(1+i)^{m-n} - z(1+z)^{m-n}}{i-z}$
 $= a(1+z)^n + \frac{a(1+z)^n z}{(1+i)^{m-n}} \times \frac{(1+i)^{m-n} - (1+z)^{m-n}}{i-z}$, et cette
 somme due augmente en conséquence; mais, en raison de la
 plus-value restant à courir, le prix normal de la terre aug-
 mente d'une somme précisément égale (14).

Si, dans l'équation précédente, on fait $n = m$, il vient

$$A_m = \frac{a(1+z)^m}{i},$$

soit

$$\frac{A_m}{a} = \frac{(1+z)^m}{i}.$$

Et si on avait pris la somme due, en principal et intérêts, au
 bout de m années de plus-value,

$$A_m = A(1+i)^m - a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z},$$

et qu'on eût porté dans cette équation la valeur de A , prix
 normal, fournie par l'équation [2]

$$A = \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z},$$

il serait venu, par une série de transformations qu'il est inu-
 tile de reproduire,

$$A_m = \frac{a(1+z)^m}{i},$$

soit

$$\frac{A_m}{a} = \frac{(1+z)^m}{i}.$$

Ainsi, au bout des m années de plus-value, l'acheteur doit, en principal et intérêts, une somme $A_m = \frac{a(1+z)^m}{i}$ dont l'intérêt annuel est $a(1+z)^m$, et il possède une terre dont le fermage, désormais constant, est $a(1+z)^m$, et qui vaut $A_m = \frac{a(1+z)^m}{i}$. Le fermage de la terre suffira alors exact-

tement à payer les intérêts annuels de la somme due, à moins que l'acheteur, voulant liquider son opération, ne vende sa terre pour rembourser ce qu'il doit, sans bénéfice ni perte.

Dans le cas particulier où $z = i$, la somme due, en principal et intérêts, au bout de n années de plus-value, est, conformément à la formule [20],

$$A_n = A(1+i)^n - an(1+i)^{n-1}.$$

A , prix normal, est donné par l'équation [5]

$$A = \frac{a}{i} + \frac{ma}{1+i}.$$

Or, en portant cette valeur de A dans l'équation précédente, il vient successivement

$$\begin{aligned} A_n &= \left[\frac{a}{i} + \frac{ma}{1+i} \right] (1+i)^n - an(1+i)^{n-1} \\ &= a \frac{(1+i)^n}{i} + ma(1+i)^{n-1} - an(1+i)^{n-1} \\ &= \frac{a(1+i)^n}{i} + (m-n)a(1+i)^{n-1} \end{aligned}$$

soit

$$\frac{A_n}{a} = \frac{(1+i)^n}{i} + (m-n)(1+i)^{n-1},$$

ce qui est bien, pour ce cas particulier, l'équation [14] de variation du prix normal en fonction des années écoulées depuis l'apparition de la plus-value.

Si, dans cette équation, on fait $n = m$, il vient

$$A_m = \frac{a(1+i)^m}{i},$$

soit

$$\frac{A_m}{a} = \frac{(1+i)^m}{i}.$$

Et si on avait pris la somme due, en principal et intérêts, au bout de m années de plus-value,

$$A_m = A(1+i)^m - am(1+i)^{m-1},$$

et qu'on eût porté dans cette équation la valeur de A , prix normal, fournie par l'équation [5]

$$A = \frac{a}{i} + \frac{ma}{1+i},$$

il serait venu

$$A_m = \frac{a(1+i)^m}{i},$$

soit

$$\frac{A_m}{a} = \frac{a(1+i)^m}{i}.$$

Ce cas particulier rentre donc dans le cas général. Et, par conséquent : — *Quand on paie le prix normal, il est impossible de faire l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage ni dans le cas de plus-value ni dans celui de moins-value temporaire.*

31. Et pourtant, nous avons trouvé que « Dans une société où le taux d'accroissement du fermage égale ou surpasse le taux de l'intérêt net, c'est-à-dire dans le cas de z positif et égal à i ou $> i$, on pouvait acheter des terres à un prix quelconque en faisant l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage (21). » Sans doute, mais nous avons introduit pourtant cette seule et unique restriction que toutefois « La durée de l'accroissement du fermage, soit m , devait être au moins égale au nombre d'années nécessaire pour l'amortissement, soit à N . » Or, précisément, cette condition ne saurait être remplie en cas de prix normal ; car on a, d'une part, en vertu de l'équation [21],

$$N = \frac{\log \left[1 - \frac{A}{a} (i - z) \right]}{\log \frac{1+z}{1+i}};$$

et, d'autre part, en résolvant par rapport à m l'équation [2], on a successivement

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z} \\ &= \frac{a}{i-z} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i(1+i)^m} = \frac{a}{i-z} \left[1 - \frac{z}{i} \left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m \right], \end{aligned}$$

$$\frac{A}{a} (i-z) = 1 - \frac{z}{i} \left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m,$$

$$\frac{z}{i} \left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m = 1 - \frac{A}{a} (i-z),$$

$$\left(\frac{1+z}{1+i} \right)^m = \frac{i}{z} \left[1 - \frac{A}{a} (i-z) \right],$$

$$m \log \frac{1+z}{1+i} = \log \frac{i}{z} + \log \left[1 - \frac{A}{a} (i-z) \right],$$

$$m = \frac{\log \frac{i}{z} + \log \left[1 - \frac{A}{a} (i-z) \right]}{\log \frac{1+z}{1+i}}. \quad [23]$$

On a donc

$$N - m = - \frac{\log \frac{i}{z}}{\log \frac{1+z}{1+i}} = \frac{\log \frac{i}{z}}{\log \frac{1+i}{1+z}}.$$

Or cette différence est nécessairement positive, puisque, soit que i soit $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix} z$, le numérateur et le dénominateur de la première fraction seront toujours de signe contraire, et le numérateur et le dénominateur de la seconde fraction toujours de même signe. Ce qui revient à dire que N est toujours $> m$.

Dans le cas particulier où $z = i$, on a, d'une part, en vertu de l'équation [22]

$$N = \frac{A}{a} (1+i);$$

et, d'autre part, en résolvant par rapport à m l'équation [5], on a successivement

$$A = \frac{a}{i} + \frac{ma}{1+i},$$

$$Ai(1+i) = a(1+i) + mai,$$

$$mai = (Ai - a)(1+i),$$

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{(Ai - a)(1 + i)}{ai} = \frac{Ai(1 + i)}{ai} - \frac{a(1 + i)}{ai} \\
 &= \frac{A}{a}(1 + i) - \frac{1 + i}{i}. \quad [24]
 \end{aligned}$$

On a donc

$$N - m = \frac{1 + i}{i}.$$

Or cette différence est nécessairement positive. Ce qui revient à dire que, dans ce cas encore, N est toujours $> m$.

En comparant la différence $N - m$ avec la différence $m - k$ telle que nous l'avons rencontrée déjà à deux reprises (16 et 27), nous voyons que

$$N - m = m - k;$$

d'où il suit que : — *Le nombre d'années de plus-value de la rente qu'il faudrait ajouter au nombre existant, en cas de plus-value temporaire, pour que l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage fût possible, ne dépend que du taux de l'intérêt net et du taux d'accroissement du fermage et est, en outre, précisément égal à celui qui s'écoule depuis le moment où l'excédant des intérêts à payer sur les fermages à recevoir cesse de s'accroître jusqu'à celui où il devient nul.*

32. Il faut nous arrêter un instant sur le fait, déjà senti plus haut et qui vient de se manifester complètement tout à l'heure, de l'identité de la courbe de variation du prix normal de la terre durant la période de variation du prix de la rente et de la courbe d'amortissement du prix d'achat de la terre au moyen du fermage.

Pour en bien saisir tous les détails, prenons les courbes de la Fig. 2, AN , AN' , AN'' , donnant la somme restant due à la fin de chaque année exprimée en unités numéraires suivant

le mode adopté par Gossen, et transformons-les en les courbes de la Fig. 3, AN, A'N', A''N'', donnant la même somme exprimée en capitaux pour un de fermage initial suivant le mode adopté par nous pour les courbes de variation du prix normal.

Ainsi, la courbe AN de la Fig. 2, dont l'équation est

$$A_n = 100\,000 \times 1.04^n - 4\,000 \times \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01},$$

deviendra la courbe AN de la Fig. 3, dont l'équation est

$$\frac{A_n}{a} = 25 \times 1.04^n - \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01}.$$

La courbe AN' de la Fig. 2, dont l'équation est

$$A_n = 100\,000 \times 1.04^n - 3\,333.33 \times \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01},$$

deviendra la courbe A'N' de la Fig. 3, dont l'équation est

$$\frac{A_n}{a} = 30 \times 1.04^n - \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01}.$$

La courbe AN'' de la Fig. 2, dont l'équation est

$$A_n = 100\,000 \times 1.04^n - 3\,200 \times \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01},$$

deviendra la courbe A''N'' de la Fig. 3, dont l'équation est

$$\frac{A_n}{a} = 31.25 \times 1.04^n - \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01}.$$

Comme on le voit, toutes ces courbes sont formées par la différence de trois courbes AP, A'P', A''P'', représentant le montant du prix de la terre augmenté des intérêts capitalisés en fonction des années écoulées, et dont les équations sont respectivement

$$y = 25 \times 1.04^n, \quad y = 30 \times 1.04^n, \quad y = 31.25 \times 1.04^n,$$

et d'une courbe unique OP, représentant le montant des fermages capitalisés en fonction des années écoulées, et dont l'équation est

$$y = \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01}.$$

C'est ainsi, par exemple, que l'abscisse $ON = 47.36$ du point N d'intersection de la courbe AN avec l'axe horizontal, correspondant au point P d'intersection de la courbe AP avec la courbe OP, est déterminée par l'équation

$$OP - OP = 25 \times 1.04^{47.36} - \frac{1.04^{47.36} - 1.01^{47.36}}{0.04 - 0.01} = 0.$$

Cette première transformation opérée, pour faire apparaître aux yeux l'identité générique de ces courbes AN, A'N', A''N'' de la Fig. 3 avec les courbes AM, A'M', A''M'' de la Fig. 1, prenons ces dernières et ramenons-les purement et simplement à l'échelle des précédentes en les transportant dans la Fig. 3. Elles y deviendront les courbes $\alpha\mu$, $\alpha'\mu'$, $\alpha''\mu''$. Si ces courbes étaient continuées pour les valeurs de la variable n inférieures à zéro et supérieures à m , valeurs que nous n'avons pas considérées jusqu'ici, elles auraient la forme des courbes AN, A'N', A''N''. C'est ainsi, par exemple, que la courbe $\alpha'\mu'$, dans l'équation de laquelle i et z ont les mêmes valeurs que dans les équations des courbes AN, A'N', A''N'', deviendrait la courbe $\alpha'\mu'\nu'$, courbe coupant l'axe horizontal en un point ν' fourni, conformément à la formule [21], par l'équation

$$57.36 = \frac{\log [1 - 27.11 (0.04 - 0.01)]}{\log \frac{1.01}{1.04}}.$$

La transformation de formule opérée plus haut explique comment cette courbe $\alpha'\mu'\nu'$ peut avoir l'équation suivante :

$$\frac{A_n}{a} = 27.11 \times 1.04^n - \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01},$$

analogue à celles ci-dessus des courbes AN, A'N', A''N'' et résultant de la différence des deux courbes

$$y = 27.11 \times 1.04^n$$

et

$$y = \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01};$$

et comment ces courbes AN, A'N', A''N'' peuvent avoir les équations suivantes :

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.01^n}{0.04} + \frac{0.01 \times 1.01^n}{0.04 \times 1.04^{0-n}} \times \frac{1.04^{0-n} - 1.01^{0-n}}{0.04 - 0.01},$$

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.01^n}{0.04} + \frac{0.01 \times 0.01^n}{0.04 \times 1.04^{31.30-n}} \times \frac{1.04^{31.30-n} - 1.01^{31.30-n}}{0.04 - 0.01},$$

$$\frac{A_n}{a} = \frac{1.01^n}{0.04} + \frac{0.01 \times 1.01^n}{0.04 \times 1.04^{47.36-n}} \times \frac{1.04^{47.36-n} - 1.01^{47.36-n}}{0.04 - 0.01},$$

analogues à celle de la courbe $\alpha'\mu'\nu'$ (15), les trois valeurs de m : 0, 31.30 et 47.36 étant fournies respectivement, conformément à la formule [23], par les équations

$$0 = \frac{\log [1 - 25(0.04 - 0.01)]}{\log \frac{1.01}{1.04}} + \frac{\log \frac{0.01}{0.04}}{\log \frac{1.01}{1.04}} = 47.36 - 47.36,$$

$$31.30 = \frac{\log[1 - 30(0.04 - 0.01)]}{\log \frac{1.01}{1.04}} + \frac{\log \frac{0.04}{0.01}}{\log \frac{1.01}{1.04}} = 78.66 - 47.36$$

$$47.36 = \frac{\log[1 - 31.25(0.04 - 0.01)]}{\log \frac{1.01}{1.04}} + \frac{\log \frac{0.04}{0.01}}{\log \frac{1.01}{1.04}} = 94.72 - 47.36,$$

lesquelles donnent, comme nous l'avons vu (31), le nombre d'années de plus-value pour lequel un prix est prix normal.

Ainsi la courbe $\alpha'\mu'\nu'$ serait courbe d'amortissement du prix d'achat dans le cas d'une terre payée à raison de 27.11 capitaux pour un de fermage initial alors que la durée de la plus-value de la rente serait non de 10 ans seulement mais de 57.36 ans au moins. Et inversement les courbes AN, A'N', A''N'' seraient courbes de variation du prix normal dans le cas de terres payées à raison de 25, 30 et 31.25 capitaux pour un de fermage initial alors que la durée de la plus-value de la rente serait non de 47.36, 78.66 et 94.72 ans au moins, mais de 0, 31.30 et 47.36 ans seulement.

Les courbes de variation du prix normal de la terre durant la période de variation du prix de la rente et les courbes d'amortissement du prix d'achat de la terre au moyen du fermage devaient être ainsi identiques, vu que, pas plus pendant les m années de plus-value qu'au bout de ces m années, l'acheteur d'une terre au prix normal ne doit faire de bénéfice ni de perte, et que, par conséquent, pendant toute la durée de cette plus-value comme à la fin, la somme due en cas d'achat avec des capitaux empruntés doit se confondre avec le prix normal de la terre. Quoi qu'il en soit, cette identité des deux sortes de courbes existant, il n'y a

pas à s'étonner si nous avons trouvé que, pour les unes et les autres, la distance du point d'inflexion K au point de maximum M était indépendante du rapport du prix d'achat au fermage initial $\frac{A}{a}$ et dépendante seulement du taux de l'intérêt net i et du taux d'accroissement du fermage z . Pour les unes et les autres aussi, cette même distance du point d'inflexion au point de maximum est égale à la distance du point de maximum M au point d'intersection avec l'axe horizontal N, en vertu de l'équation

$$N - m = \frac{\log \frac{i}{z}}{\log \frac{1+i}{1+z}} = m - k.$$

Ainsi, dans les courbes AN, A'N', A''N'', $\alpha'\mu'\nu'$, qui se rapportent toutes à un taux de l'intérêt net de 0.04 et à un taux d'accroissement du fermage de 0.01, cette double distance, représentée par les longueurs $k'm'$, ON, d'une part, ON, $10\nu'$, $m'N'$, NN'', d'autre part, est toujours égale à 47.36.

VII

Critique de la théorie de Gossen. Possibilité de l'amortissement grâce à l'élévation du taux d'accroissement du fermage.

33. Dans tous les cas, d'après ce que nous avons vu, si on paie le prix normal, il est impossible de faire l'amortissement du prix d'achat d'une terre au moyen du fermage. Et il est bien clair, en effet, qu'il en doit être ainsi puisqu'un tel amortissement constituerait un bénéfice et que le prix normal est celui qui ne permet ni bénéfice ni perte. On pouvait donc,

comme nous l'avons fait, annoncer cette conclusion *a priori*; mais il n'en était pas moins instructif de la développer.

A cet égard, Gossen cite des faits et produit des chiffres qu'il emprunte, dit-il, à la réalité. A cela nous ferons l'observation que voici. Pour qu'un fait soit acquis à la science, il faut qu'il soit à la fois réel et rationnel; il faut que, l'observation et l'expérience constatant que ce fait existe et qu'il existe de telle ou telle façon, le raisonnement montre qu'il ne peut pas ne pas exister et qu'il ne peut pas exister d'une autre façon dans des conditions normales. Que si le raisonnement, d'une part, l'observation et l'expérience, d'autre part, se contredisent, il faut tâcher de les mettre d'accord si l'on veut élaborer la science du fait dont il s'agit; mais le raisonnement n'est pas détruit par cette contradiction s'il est bon, car il est possible que ce soit le fait qui doive être ou rectifié ou expliqué par des circonstances exceptionnelles. Nous croyons qu'il en est ainsi des faits allégués par Gossen.

Son premier tableau, correspondant à la courbe AN (Fig. 2), se rapporte à une terre donnant 4 % de fermage avec une plus-value de 1 % alors que le taux de l'intérêt net est à 4 %. Evidemment, il y a là quelque exception à signaler, car il est clair que des gens qui, toutes choses étant parfaitement égales d'ailleurs, ne feraient nulle différence entre deux capitaux dont un capital à revenu constant et un capital à revenu égal mais croissant d'année en année seraient à mettre aux Petites-Maisons. Le second tableau, correspondant à la courbe AN', se rapporte à une terre donnant 3.33 % de fermage avec une plus-value de 1 % alors que le taux de l'intérêt net est à 4 %. Eh bien, ce fait ne saurait être considéré non plus comme un fait normal. Notre théorie établit d'une manière irréfragable, à ce qu'il nous semble, que la plus-value dont il s'agit ne saurait être qu'une plus-

value temporaire dont la durée m serait fournie, en vertu de la formule [23], par l'équation

$$m = \frac{\log \frac{0.04}{0.01} + \log \left[1 - \frac{100\,000}{3\,333.33} (0.04 - 0.01) \right]}{\log \frac{1.01}{1.04}} = 31.30.$$

Et cette durée serait insuffisante pour un amortissement exigeant un nombre d'années N fourni, en vertu de la formule [21], par l'équation

$$N = \frac{\log \left[1 - \frac{100\,000}{3\,333.33} (0.04 - 0.01) \right]}{\log \frac{1.01}{1.04}} = 78.66.$$

D'après notre théorie, pour avoir une plus-value perpétuelle de 1 %, telle que Gossen semble la supposer, si le taux de l'intérêt net est à 4 %, il faut prendre une terre qui rapporte 3 333.33 de fermage initial, mais qui vaut 111 111.11, en vertu de la formule [7] et conformément à l'équation

$$111\,111.11 = \frac{3\,333.33}{0.04 - 0.01},$$

ou bien une terre qui vaut 100 000, mais qui rapporte 3 000 de fermage initial, en vertu de la même formule [7] et conformément à l'équation

$$100\,000 = \frac{3\,000}{0.04 - 0.01}.$$

Adoptant cette dernière hypothèse, substituons le chiffre de 3 000 à celui de 3 333.33 dans l'équation

$$A_n = 100\,000 \times 1.04^n - 3\,333.33 \times \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01}$$

qui est celle de la courbe AN' , nous aurons l'équation

$$\begin{aligned} A_n &= 100\,000 \times 1.04^n - 3\,000 \times \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01} \\ &= 100\,000 \times 1.01^n \end{aligned}$$

qui est celle de la courbe AN''' . Dans ces conditions, l'amortissement ne se fait plus. Au lieu de devoir une somme successivement croissante et décroissante, l'acheteur doit une somme qui croît constamment avec la valeur de la terre calculée d'après son revenu. Ainsi, théoriquement, ou du moins dans les données théoriques par lui posées, la combinaison de Gossen est impossible.

34. Mais Gossen, on l'a vu, invoque des considérations pratiques relatives à la possibilité pour l'Etat : 1° d'emprunter à un taux plus favorable que les particuliers, 2° de spéculer sur des plus-values de rente foncière plus éloignées, et 3° de faire des baux plus avantageux. Ces trois considérations sont fondées, mais seulement si on compare la position de l'Etat avec celle des spéculateurs. Il est certain que des spéculateurs opérant sur la plus-value de la rente foncière au moyen de capitaux empruntés n'emprunteraient pas en général ces capitaux au taux de l'intérêt net, et ne les emprunteraient même qu'à ce taux grossi d'une prime de risques supérieure à celle que paie l'Etat. Sans doute, une opération comme celle dont il est ici question se ferait au moyen de capitaux empruntés sur hypothèques; mais on ne prête sur hypothèques que jusqu'à concurrence de 50 ou 60 % de la valeur des biens-fonds. De là cette conséquence que les spéculateurs, faisant entrer dans les calculs une valeur de i plus forte que celle qu'y fait entrer l'Etat, ne peuvent pas s'approcher autant que lui du prix mathématique des terres. La deuxième considération a besoin d'être expliquée. Il est

certain encore qu'un spéculateur ne peut compter réaliser lui-même toutes les plus-values de rente foncière escomptées, même en cas de plus-value temporaire et, à bien plus forte raison, en cas de plus-value perpétuelle. Il réalise par la vente soit à un détenteur d'épargnes, soit à un autre spéculateur. Mais cette réalisation par la vente est soumise à des chances et peut être rendue difficile par des crises. L'Etat, lui, réalise lui-même, à cause de sa durée plus longue. La troisième considération est également juste à l'égard des spéculateurs; seulement, il reste ceci qu'aucune de ces considérations n'est fondée si, au lieu de comparer la position de l'Etat avec celle des spéculateurs, on la compare avec celle des détenteurs d'épargnes. Les détenteurs d'épargnes n'empruntent pas. S'ils acquièrent un capital non susceptible de détérioration par l'usage ou de destruction par accident, comme les terres, il leur suffit de retirer de leur placement le taux de l'intérêt net, sans prime d'amortissement ni d'assurance. Les détenteurs d'épargnes réalisent les plus-values de rente foncière escomptées soit eux-mêmes, par la vente au meilleur moment, soit dans la personne de leurs descendants. Enfin, les détenteurs d'épargnes peuvent faire des baux aussi avantageux que l'Etat. Ces détenteurs d'épargnes ne craignent donc pas la concurrence de l'Etat. Or leur intervention suffit pour fixer le prix des terres. Donc, pratiquement comme théoriquement, la combinaison n'est pas possible.

35. Eh bien, ce plan, qui semble ruiné à tous les points de vue, se relève complètement si l'on fait intervenir à présent une considération qui a échappé à son auteur et qui a pourtant une importance décisive dans la question. C'est la plus-value de la rente foncière qui occasionne la différence du prix des terres et du prix des capitaux proprement dits; c'est le taux de la plus-value qui détermine ce prix des terres; mais ce taux n'est pas constant. S'il l'était, le bénéfice de la

plus-value aurait été réalisé une fois pour toutes par la première génération de propriétaires fonciers. Il augmente dans une société progressive, et c'est pourquoi toutes les générations de propriétaires fonciers participent au bénéfice de la plus-value. A chaque augmentation du taux de cette plus-value, le prix des terres, en outre de l'augmentation relative à la plus-value existante, augmente en raison de l'apparition d'une plus-value nouvelle; et c'est ce bénéfice, sur lequel les propriétaires n'ont aucun droit de propriété, parce qu'il n'a été ni prévu ni calculé et qu'ils ne l'ont pas payé en achetant les terres, qu'il faut réserver à l'Etat et qui lui permettra d'effectuer l'amortissement du prix d'achat des terres au moyen du fermage.

Il nous faut revenir ici sur la manière dont Gossen introduit le coefficient z d'augmentation de la valeur de la rente foncière. « Cette augmentation, dit-il, trouve une expression approximative dans la formule

$$a_n = a(1 + z)^n$$

quand a désigne la rente de la première année et a_n la rente après n années, parce que les changements dans les circonstances qui agissent sur l'élévation de la rente foncière concourent eux-mêmes à produire de nouveaux changements, phénomène qui trouve son expression dans la potentiation proportionnelle au temps (*weil die in den Zuständen herbeigeführten Veränderungen, welche auf die Höhe der Grundrente zurückwirken, selbst wieder mit wirksam sind, neue Veränderungen zu erzeugen, was denn durch Potenziren nach Verhältniss der Zeit seinen Ausdruck findet*). » Cette manière de procéder nous paraît inattaquable. Nous dirions seulement, un peu différemment, quant à nous, que la fonction exponentielle par rapport au temps est la formule naturelle d'une variation comme celle dont il s'agit par la raison que, si cer-

taines circonstances ont augmenté une quantité a de az , il est à croire que ces mêmes circonstances augmenteront une quantité $a + az$ de $(a + az)z$. Mais il ne faut pas perdre de vue que ces circonstances peuvent n'être pas les mêmes après la première augmentation qu'avant, et c'est ce que Gossen a fait. D'une façon générale, dans l'application du calcul à l'étude des faits quantitatifs, il faut s'attacher à plier toujours les formules aux faits et non les faits aux formules, et c'est à quoi Gossen a manqué. Dans l'exemple emprunté à la Prusse, c'est l'administration prussienne qui a le tort de supposer z constant et égal à 0.005309. Encore faut-il dire que ce taux de plus-value n'est pour elle qu'un minimum. Mais, dans l'exemple tiré de l'histoire de l'Angleterre, c'est Gossen lui-même qui, en vertu de son équation, a le tort de supposer que, pour les terres appartenant à des couvents supprimés par Henry VIII, z a été constant et égal à 0.012437 depuis le milieu du XVI^e siècle jusqu'à la fin du XVIII^e. Il est probable qu'au contraire ce taux de plus-value de la rente a varié pendant tout ce laps de temps. Il l'est surtout qu'il a augmenté dans le courant du XIX^e siècle, vu que c'est précisément à cette époque que se sont produits les progrès de l'industrie préparés par les progrès antérieurs des sciences physiques et naturelles et que l'Angleterre, à la tête des nations les plus avancées de l'Europe, a passé du régime agricole au régime industriel et commercial. Il est probable enfin que ce taux de plus-value continuera d'augmenter du XIX^e au XX^e siècle, par la raison que cette grande évolution économique n'est pas à beaucoup près terminée. Même en Angleterre, l'agriculture n'est pas complètement passée du mode extensif au mode intensif; et il est à croire que cette transformation, qui suppose un emploi considérable de capital proprement dit et qui permet une extension considérable de la population, portera le taux moyen de la

plus-value des terres à un chiffre qu'il n'a pas atteint jusqu'ici.

Nous disons le taux moyen ; car il faut prendre garde encore que le coefficient z varie aussi bien d'un point à l'autre que d'un moment à l'autre. Le taux de plus-value de 0.012437 est assez élevé, même comme taux moyen quant au temps, et il n'est pas douteux qu'il ne soit supérieur au taux moyen quant aux lieux ; c'est qu'apparemment ces biens ecclésiastiques dont parle Sinclair étaient des terres de bonne qualité et bien situées. M. Léonce de Lavergne, dans ses études sur *l'Economie rurale de l'Angleterre*, donne le chiffre de 0.01 pour le taux moyen de la plus-value des terres en Angleterre vers 1850. Ce taux est assez modéré, et il est à croire qu'il se rapporte exclusivement aux terres cultivées et non pas aux terrains bâtis sur la valeur de la rente desquels l'effet du progrès économique est surtout sensible. Quoi qu'il en soit, ce ne serait en tous cas qu'un taux moyen, et il resterait à constater le taux spécial de plus-value de la rente des terres dans tel ou tel district de l'Angleterre. On trouverait alors des chiffres moins élevés peut-être dans certains cas ; on en trouverait de bien plus élevés sans doute dans certains autres, par exemple dans le cas des terrains appartenant au marquis de Westminster sur lesquels il s'est élevé des quartiers nouveaux de Londres et de ceux appartenant au comte de Derby où l'on a construit une partie des usines du Lancashire. En la matière qui nous occupe, comme en toute matière de science appliquée, la théorie ne fournit que la formule abstraite ; c'est à l'observation et à l'expérience à donner aux coefficients de cette formule des valeurs concrètes. Tout serait à faire ici, en vue de la détermination la plus précise et la plus détaillée de z suivant les années et suivant les localités, pour la statistique, officielle ou indépendante, appuyée sur l'examen des actes de location et de

vente et du produit des droits de mutation. On s'occupera sans doute de ce travail quand on aura compris à quel point les lords Westminster et Derby s'arrondissent au détriment de la fortune publique.

Soit toujours i le taux de l'intérêt net, a le fermage initial d'une terre susceptible d'une plus-value perpétuelle, z le taux de cette plus-value. Le prix normal de cette terre au début, quand le fermage est a , est, comme nous l'avons montré (11),

$\frac{a}{i-z}$, et la somme due après m années, quand le fermage est $a(1+z)^m$, est $\frac{a(1+z)^m}{i-z}$. Qu'à ce moment, le taux de la

plus-value, au lieu d'être z , devienne z' , la somme due à la fin de chaque année, à partir de cette variation, est donnée, en fonction des années écoulées depuis l'origine, conformément à la formule [19], par l'équation

$$A_n = \frac{a(1+z)^m}{i-z} (1+i)^{n-m} - a(1+z)^m \frac{(1+i)^{n-m} - (1+z')^{n-m}}{i-z'}. \quad [25]$$

Prenons, par exemple, le cas du second tableau de Gossen rectifié. Le taux de l'intérêt net est de 0.04, le fermage initial est de 3 000, le taux de la plus-value perpétuelle est de 0.01. Le prix normal de la terre au début, quand le fermage est de 3 000, est de 100 000, et la somme due après 10 années, quand le fermage est de $3\,000 \times 1.01^{10} = 3\,313.86$, est de $100\,000 \times 1.04^{10} = 110\,462$. Qu'à ce moment le taux de la plus-value, au lieu d'être 0.01, devienne 0.02, la somme due à la fin de chaque année, à partir de cette élévation, sera donnée, en fonction des années écoulées depuis l'origine, par l'équation

$$A_n = 110\,462 \times 1.04^{n-10} - 3\,313.86 \frac{1.04^{n-10} - 1.02^{n-10}}{0.04 - 0.02}.$$

Cette équation est celle de la courbe aN^{IV} (Fig. 2) représentant un amortissement en 65 ans environ depuis l'achat. L'apparition de 1 % de plus-value a ramené la courbe aN''' en aN^{IV} . On voit par cet exemple comment le problème se pose exactement dans la réalité. Il ne s'agirait pas, pour l'Etat, d'acheter des terres en s'attachant à payer un prix inférieur au prix normal résultant de la plus-value ou de la moins-value existante de ces terres, et en comptant sur la différence pour effectuer l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage, ce qui serait une spéculation ordinaire et médiocre, faite pour des particuliers. Il s'agirait, pour lui, d'acheter toutes ces terres au prix normal, en comptant pour effectuer l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage sur l'augmentation de la plus-value, sur la diminution de la moins-value et sur la transformation de la moins-value en plus-value, et en s'attachant à produire lui-même ces changements par l'habileté de ses mesures et la sagesse de sa conduite. Voilà ce qui serait une belle et grande opération vraiment digne de l'Etat.

36. Il serait donc, en principe, possible à l'Etat de racheter toutes les terres sans bourse délier. C'est une vérité que Gossen n'a pas établie sur une démonstration parfaitement rigoureuse, mais qu'il a pourtant pressentie et discernée avec une sagacité extraordinaire. Comme conception théorique, son plan, une fois rectifié et complété, est de beaucoup supérieur à celui de Mill. Il accorde plus aux propriétaires, puisqu'il reconnaît leur droit à toute la plus-value actuelle, en faisant seulement réserve des plus-values futures; et il accorde plus à l'Etat, puisqu'il le remet en possession de la totalité du sol. Dans cette combinaison grandiose, l'Etat reprendrait les terres aux propriétaires au prix courant; il les paierait en obligations de sa dette au taux courant; il les affermerait soit à des entrepreneurs pour y exercer l'agri-

culture, l'industrie ou le commerce, soit à des consommateurs pour y construire ou y entretenir des maisons d'habitation, des châteaux, des jardins ou des parcs, sans autre condition, pour les uns et pour les autres, que de payer le fermage le plus élevé. Théoriquement, on peut soutenir que les terres seraient, après l'opération, entre les mêmes mains qu'auparavant. Pour les terres détenues par des entrepreneurs ou des consommateurs non antérieurement propriétaires, ces entrepreneurs ou ces consommateurs paieraient le fermage à l'Etat au lieu de le payer aux propriétaires, et les propriétaires toucheraient les intérêts de leurs obligations au lieu de toucher le fermage de leurs terres. Et, pour les terres détenues par des entrepreneurs ou des consommateurs antérieurement propriétaires, ces entrepreneurs ou ces consommateurs paieraient d'une main à l'Etat le fermage des terres et recevraient de l'autre main de l'Etat l'intérêt des obligations. Pratiquement, il est à croire qu'il se ferait de grands changements dans l'emploi des terres; mais ces changements seraient lents, et, comme ils seraient déterminés par la condition de la plus grande valeur possible de la rente, ils le seraient par la condition de la plus grande utilité possible de la terre. Pendant un certain nombre d'années, le montant total des fermages des terres ne suffirait pas à payer le montant total des intérêts des obligations. La dette de l'Etat s'accroîtrait tous les ans de la différence, sans toutefois jamais excéder la valeur normale des terres. A un certain moment, grâce à l'augmentation du taux de la plus-value, à la diminution du taux de la moins-value, ou à la transformation de la moins-value en plus-value, changements qu'il dépendrait de l'Etat lui-même, nous le répétons, de provoquer ou de hâter par un système de législation et d'administration tendant tout entier au progrès économique, c'est-à-dire à l'augmentation du capital et de la population, le montant

des fermages suffirait à payer le montant des intérêts, et la dette cesserait de s'accroître. Enfin, le montant des fermages arrivant à dépasser le montant des intérêts, l'amortissement commencerait et, comme on le voit par la forme des courbes, s'effectuerait dès lors avec rapidité. Quand il serait terminé, le montant des fermages des terres serait disponible pour les dépenses publiques et l'on supprimerait tous les impôts. L'intérêt social et la justice sociale seraient absolument satisfaits, l'idéal social serait réalisé. Tel est ce plan dont la critique la plus approfondie et la plus minutieuse ne fait que mettre en relief la solidité et la grandeur et qui, publié en 1854, n'a pas trouvé, pendant trente-cinq ans, un lecteur ni parmi les socialistes ni parmi les économistes.

Gossen a indiqué des moyens et dressé des formules et des tableaux en vue de faire participer les générations présentes au bienfait de cette opération. Nous ne le suivrons pas dans cette voie qui d'ailleurs reste ouverte. L'histoire nous apprend que les changements essentiels et radicaux dans l'organisation des sociétés ne s'effectuent presque jamais régulièrement et pacifiquement. Pour amener la suppression de l'esclavage, il a fallu l'effondrement de la société antique qui le pratiquait et son remplacement par la société féodale. Le servage n'a disparu, et la société féodale n'a fait place à la société moderne, qu'à la faveur d'une révolution violente. Il semble de plus en plus qu'il en doive être de même pour la transformation de la propriété foncière individuelle en propriété collective; car, bien loin qu'on songe nulle part à faire rentrer l'Etat en possession de la totalité de la terre, on le dépouille partout de plus en plus de la jouissance de cette portion de la rente qui lui avait été réservée par l'impôt foncier. Dans le canton de Vaud, où l'impôt foncier avait été établi, au commencement du siècle, sur le pied d'une quotité proportionnelle, on s'est bien gardé de constater l'augmen-

tation de la valeur de la terre, pour n'avoir pas à remettre à l'Etat une fraction plus considérable de la rente. En France, où l'impôt foncier a été institué par la Révolution sur le pied d'une quotité fixe, on a fait mieux : on a si bien dégrevé au profit des propriétaires fonciers que la part de l'Etat, fixée à 240 millions à une époque où la valeur totale annuelle de la rente était estimée à 1 200 millions, se trouve réduite, aujourd'hui que cette valeur totale atteint environ 4 milliards, à moins de 180 millions. Evidemment, notre démocratie parlementaire manque de cette notion de l'Etat que certains gouvernements aristocratiques ou monarchiques de l'antiquité et du Moyen-Age ont possédée à un si haut degré. Elle incline à prendre pour l'intérêt public, qui est l'intérêt de la totalité des individus, des coalitions d'intérêts particuliers assez nombreux et assez forts pour constituer une majorité électorale. Ce serait d'ailleurs une grande illusion que de compter sur elle pour faire les études préparatoires, pour établir le plan d'ensemble, pour effectuer la subordination des détails au but qu'exigerait une opération financière aussi colossale que celle que nous venons d'esquisser.

Et pourtant, il ne faut pas tomber dans un pessimisme excessif. Les égarements que nous venons de signaler sont moins imputables à la démocratie elle-même qu'à l'économie politique qui devrait être son guide et qui se fait sa complice dans l'abandon du patrimoine de tous aux convoitises de quelques-uns. Les idées venant à s'éclaircir et à se rectifier, les faits pourraient changer du tout au tout. Une opération comme celle dont il s'agit ne serait pas, après tout, dans l'ordre social, plus difficile et plus compliquée que ne l'ont été, dans l'ordre industriel, le percement du tunnel du Mont-Cenis ou l'ouverture du canal de l'isthme de Suez. Ce qui a rendu ces dernières entreprises possibles, c'est l'avancement des sciences physiques et naturelles, pures

et appliquées; et ce qui rend la première impossible, c'est le fait que les sciences morales et politiques, pures et appliquées, ne sont guère autre chose, à l'heure qu'il est, qu'un bavardage. En réalité, les sciences morales et politiques en sont aujourd'hui au point où en étaient les sciences physiques et naturelles il y a trois cents ans. Le fait cardinal de la science sociale, le fait qui ressort de toute l'économie politique pure et qui commande toute l'économie sociale, c'est le fait de la plus-value, et de la plus-value croissante, de la rente foncière dans une société progressive. Ce fait une fois constaté par la théorie de la richesse sociale, la théorie de la propriété n'a plus qu'à subir l'écrasante évidence du rapport qui existe entre la valeur de la rente foncière et les exigences des services publics, par conséquent du droit de la communauté ou de l'Etat sur la terre et sur les fermages. Eh bien, ce fait est méconnu par l'économie politique contemporaine comme le fait du mouvement de la terre était méconnu par l'astronomie du XVI^e siècle. De même qu'au temps de Galilée, les conséquences du fait du mouvement de la terre dérangent dans leurs croyances religieuses un certain nombre d'individus en possession du pouvoir, de même aujourd'hui les conséquences du fait de la valeur de la rente contrarient dans leurs opinions politiques certaines personnes influentes qui savent parfaitement s'opposer à son énonciation et favoriser celle du fait contraire. Gossen nous apprend, dans la préface de son livre, que la divulgation de ses idées lui a fait perdre sa position, et mon père, qui avait besoin de la sienne pour élever sa famille, a toujours dû garder inédits les deux derniers chapitres de sa *Théorie de la richesse sociale* dans lesquels sa théorie de la propriété est exposée. Au contraire, on arrive à tout en se persuadant à soi-même et en tâchant de persuader aux autres que des terrains qui se vendent 1 000, 1 500, 2 000 francs le

mètre carré n'ont pas de valeur. On peut, à la rigueur, espérer que la vérité triomphera en économie politique comme elle a triomphé en astronomie, et que la science sociale, dans un siècle ou deux, aura passé des mains des socialistes, qui ne sauraient avoir à son égard qu'un rôle exclusivement critique et négatif, et des mains de ces savants officiels qui sont chargés de ne pas la faire et qui s'acquittent de ce soin avec une conscience admirable, aux mains d'hommes de science dignes de ce nom, en possession d'une instruction première et d'une instruction spéciale suffisantes et jouissant de toute l'indépendance et de toute la liberté nécessaires. Peut-être, en conséquence, le progrès social se fera-t-il, dans un avenir plus ou moins rapproché, d'une façon régulière et pacifique et non plus brutale et désordonnée, tout comme, de nos jours, le progrès industriel se fait déjà d'une façon rationnelle et non plus empirique. Peut-être l'abolition du prolétariat, par la suppression des impôts qui pèsent sur le salaire du travail, s'effectuera-t-elle autrement que ne se sont effectuées l'abolition de l'esclavage et celle du servage. Peut-être, en un mot, la révolution sociale pourra-t-elle se ramener aux proportions de l'opération de trésorerie ci-dessus décrite. Il faut le désirer, et, qu'on l'espère ou non, il faut agir comme si cela pouvait et devait avoir lieu. C'est pourquoi la science, après avoir formulé l'idéal de la justice et de l'intérêt, doit indiquer en outre des voies et moyens pour sa réalisation. Cela fait, sa tâche est remplie, sa responsabilité dégagée; et le reste est affaire à la politique.



