Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 15 (1877-1878)
Heft: 80

Artikel: Étude élémentaire des courbes planes au moyen des coordonnées tangentielles
Autor: Amstein, H.
Kapitel: B: Coordonnées tangentielles polaires
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-287517

B. Coordonnées tangentielles polaires.

26. La longueur ϱ de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur une droite $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ et l'angle φ que fait cette perpendiculaire avec l'axe des X, déterminent complètement la droite. En raison de l'analogie qui existe entre cette manière de fixer la position d'une droite et celle qui consiste à déterminer un point par ses coordonnées polaires, il paraît convenable d'appeler ϱ et φ les *coordonnées tangentielles polaires* de la droite $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, savoir ϱ son *rayon vecteur* et φ sa *déviation.*

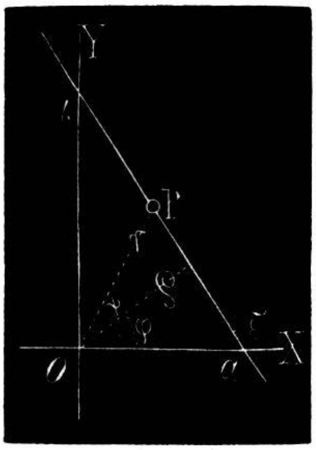
Fig. 10.

La transformation des coordonnées tangentielles rectilignes en coordonnées tangentielles polaires est donnée par les formules

$$a=\frac{\varrho}{\cos\varphi}=-\frac{1}{u},$$

$$b=\frac{\varrho}{\sin\varphi}=-\frac{1}{v},$$

d'où

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} u&=-\frac{\cos\varphi}{\varrho}\\ v&=-\frac{\sin\varphi}{\varrho}\end{aligned}\right.$$

et la transformation inverse par

$$(2)\qquad \varrho=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}},\cos\varphi=-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\sin\varphi=-\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},\ \mathrm{tg}\varphi=\frac{v}{u}.$$

L'équation $\varrho = \text{const.}$ représente une circonférence du rayon ϱ comme l'enveloppe de toutes ses tangentes. L'équation $\varphi = \text{const.}$ signifie un point à l'infini dans la direction perpendiculaire à φ. On peut envisager ce point comme l'enveloppe de toutes les droites perpendiculaires à la direction φ. Les deux équations ensemble déterminent par conséquent (le signe de ϱ étant donné) une tangente particulière de la circonférence.

En faisant les substitutions (1) dans l'équation

$$ux + vy + 1 = 0,$$

il vient

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varrho \tag{3}$$

et si l'on pose encore

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi,$$

où r et ψ sont les coordonnées ponctuelles polaires du point (x,y) :

$$r \cos (\psi - \varphi) = \varrho. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) représentent indifféremment soit en coordonnées tangentielles un point (x,y) ou (r,ψ), soit en coordonnées ponctuelles une droite (ϱ,φ), suivant qu'on y regarde x et y, r et ψ ou ϱ et φ comme constants.

Lorsqu'il existe entre ϱ et φ une équation $f(\varrho,\varphi) = 0$, les équations (3) et (4) représentent pour chaque couple de valeurs de ϱ et φ une droite; l'ensemble de ces droites enveloppe une courbe $F(x,y) = 0$ ou $\Phi(r,\psi) = 0$ dont l'équation en coordonnées tangentielles est précisément $f(\varrho,\varphi) = 0$.

Si, au contraire, on envisage x et y, r et ψ comme paramètres variables, liés entre eux par les équations $F(x,y) = 0$ ou $\Phi(r,\psi) = 0$, les équations (3) et (4) donnent pour chaque couple de valeurs de x et y ou de r et ψ, un point, et l'ensemble de ces points forme un lieu géométrique, savoir $F(x,y) = 0$ ou $\Phi(r,\psi) = 0$.

27. *Transformation des coordonnées ponctuelles en coordonnées tangentielles polaires et vice-versa.* Soit

$$f(\varrho, \varphi) = 0$$

l'équation d'une courbe. Une tangente quelconque de cette courbe est donnée en coordonnées ponctuelles par

$$(1) \qquad x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varrho.$$

En différentiant cette dernière équation par rapport à φ, on obtient pour la tangente infiniment voisine

$$(2) \qquad -x \sin \varphi + y \cos \varphi = \frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

De (1) et (2) on tire les formules de transformation

$$\left\{\begin{aligned} x &= r \cos \psi = \varrho \cos \varphi - \frac{d\varrho}{d\varphi} \sin \varphi, \\ y &= r \sin \psi = \varrho \sin \varphi + \frac{d\varrho}{d\varphi} \cos \varphi, \end{aligned}\right.$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \psi = \frac{\varrho \sin \varphi + \dfrac{d\varrho}{d\varphi} \cos \varphi}{\varrho \cos \varphi - \dfrac{d\varrho}{d\varphi} \sin \varphi},$$

$$r^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2.$$

Dans ces formules ϱ est considéré comme fonction de φ; en conséquence, il suffit d'éliminer des deux premières équations le paramètre φ pour obtenir l'équation de la courbe sous une des formes $F(x,y) = 0$ et $\Phi(r,\psi) = 0$.

Lorsque la courbe est donnée en coordonnées ponctuelles rectilignes

$$F(x,y) = 0$$

l'équation

$$(1) \qquad x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varrho,$$

interprétée en coordonnées tangentielles, représente un point de la courbe. Le point infiniment voisin satisfait à l'équation

$$(3) \qquad \cos\varphi + \sin\varphi \frac{dy}{dx} = 0.$$

De ces deux équations il suit

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho &= \frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}, \\ \operatorname{cotg}\varphi &= -\frac{dy}{dx}. \end{aligned} \right.$$

En éliminant x (y étant considéré comme fonction de x) de ces dernières équations, on arrive à l'équation $f(\varrho, \varphi) = 0$ de la courbe en coordonnées tangentielles polaires.

Enfin, si l'on veut passer des coordonnées ponctuelles polaires aux coordonnées tangentielles polaires, on partira des équations

$$r\cos(\psi - \varphi) = \varrho,$$

$$\frac{dr}{d\psi}\cos(\psi - \varphi) - r\sin(\psi - \varphi) = 0,$$

desquelles on tire

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho &= \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\psi}\right)^2}}, \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{r\sin\psi - \dfrac{dr}{d\psi}\cos\psi}{r\cos\psi + \dfrac{dr}{d\psi}\sin\psi}. \end{aligned} \right.$$

Pour les applications qui vont suivre, il sera utile d'établir les équations en coordonnées tangentielles polaires de quelques courbes bien connues.

Coord. ponct. **Coord. tg. pol.**

1) *Le point.*

$x = a,\ y = b$, ou

$au + bv + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad \varrho = a\cos\varphi + b\sin\varphi.$

2) *La circonférence.*

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2. \quad \ldots \quad \varrho = a + \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi.$

3) *La parabole.*

$y^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - x\right) \quad \ldots\ldots \quad \varrho\cos\varphi = \frac{1}{2}p.$

4) *L'ellipse.*

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad \varrho = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$

5) *L'hyperbole équilatère.*

$x^2 - y^2 = a^2 \quad \ldots\ldots \quad \varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$

6) *La spirale logarithmique.*

$r = e^{k\psi} \quad \ldots\ldots \quad \varrho = \cos\vartheta e^{(\vartheta+\varphi)\operatorname{tg}\vartheta},$

où $\vartheta = \operatorname{arctg} k$.

7) *La développante du cercle.*

$\begin{cases} x = a(\lambda\cos\lambda - \sin\lambda) \\ y = a(\lambda\sin\lambda + \cos\lambda) \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad \varrho = a\varphi.$

8) *La cycloïde.*

$\begin{cases} x = a(\cos\lambda - 1) \\ y = a(\lambda + \sin\lambda) \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad \varrho = 2a\varphi\sin\varphi.$

9) *L'épicycloïde.*

$\begin{cases} x = -a\sin\lambda + b\sin\frac{a}{b}\lambda \\ y = \quad a\cos\lambda - b\cos\frac{a}{b}\lambda \end{cases} \quad \ldots \quad \varrho = (a+b)\sin\left(\frac{a-b}{a+b}\varphi\right),$

où le rayon du cercle fixe $= (a-b)$ et celui du cercle mobile $= b$. Lorsque b est négatif, la courbe devient une hypocycloïde, par exemple pour $a = \frac{3}{4}c,\ b = -\frac{1}{4}c$

10) *L'astroïde.*

$\begin{cases} x = c\cos^3\lambda \\ y = c\sin^3\lambda \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad \varrho = \frac{1}{2}c\sin 2\varphi.$

Observation. On reconnaît immédiatement que si $f(\varrho,\varphi)=0$ est l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles polaires, $f(r,\psi)=0$ sera celle de sa podaire par rapport à l'origine. En d'autres termes : Le problème de trouver l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles polaires est identique avec celui de trouver en coordonnées ponctuelles polaires la podaire de cette courbe par rapport à l'origine.

Interprété à ce point de vue, le tableau précédent donne les podaires des courbes dont il y est question.

28. *Interprétation géométrique de la dérivée* $\frac{d\varrho}{d\varphi}$. *Asymptotes.* De l'équation

$$r^2=\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2$$

il suit que la valeur absolue de $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ est un côté d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le rayon vecteur r du point de contact et l'autre côté le rayon vecteur ϱ de la tangente (ϱ,φ) (fig. 10). La dérivée $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ mesure par conséquent sur la tangente la distance du pied de la perpendiculaire ϱ au point de contact. Vu de l'origine, le point de contact se trouve à gauche ou à droite de la perpendiculaire ϱ, suivant que la valeur absolue de ϱ augmente ou diminue avec les angles croissants.

La tangente (ϱ,φ) est une *asymptote* toutes les fois que $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ devient infiniment grand, sans qu'on ait en même temps $\varrho=\infty$.

29. Les coordonnées tangentielles se prêtent facilement à la résolution de certains problèmes élémentaires tels que les suivants : 1) On demande une courbe pour laquelle la distance du point de contact d'une tangente quelconque au pied de la perpendiculaire, abaissée de l'origine sur cette tangente, soit une fonction donnée $F(\varrho,\varphi)$ de ϱ et φ.

L'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = F(\varrho,\varphi)$$

fournit la solution.

2) On cherche une courbe telle que le rayon vecteur du point de contact d'une tangente (ϱ,φ) fasse avec celui de la tangente un angle qui soit une fonction donnée $F(\varrho,\varphi)$ de ϱ et φ.

Comme $\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}$, ce problème conduit à l'équation différentielle

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi} = \operatorname{tg}[F(\varrho,\varphi)].$$

3) On demande une courbe telle que le rayon vecteur du point de contact d'une tangente (ϱ,φ) soit une fonction donnée $F(\varrho,\varphi)$ de ϱ et φ. Ce problème exige la résolution de l'équation différentielle

$$F(\varrho,\varphi) = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}.$$

Etc.

Exemple 1. Trouver une courbe pour laquelle la distance du point de contact d'une tangente quelconque au pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette tangente soit constante $= a$.

On obtient immédiatement

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = a,$$

d'où $\varrho = a\varphi + C$. (Développante du cercle.)

Exemple 2. On veut que cette distance soit toujours $= n\varrho$. Alors il vient

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = n\varrho,$$

$$\varrho = Ce^{n\varphi}. \quad \text{(Spirale logarithmique).}$$

Exemple 3. On cherche une courbe pour laquelle $\psi = n\varphi$. Dans ce cas on est conduit à l'équation différentielle

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi} = \operatorname{tg}(n-1)\varphi,$$

dont l'intégrale est

$$\varrho = \frac{C}{\sqrt[n-1]{\cos(n-1)\varphi}}.$$

Pour $n = 1$ cette équation représente la circonférence $\varrho = C$, pour $n = 2$ une parabole, rapportée à son foyer.

Exemple 4. Quelle est la courbe qui satisfait à la relation $r = n\varrho$?

La réponse est donnée par l'intégrale de l'équation différentielle

$$n\varrho = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2},$$

savoir par

$$\varrho = Ce^{\varphi\sqrt{n^2-1}}. \quad \text{(Spirale logarithmique).}$$

30. *Différentielle de l'arc. Angle de contingence. Rayon de courbure.* En différentiant les équations (Cf. n° 27)

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi - \dfrac{d\varrho}{d\varphi}\sin\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi + \dfrac{d\varrho}{d\varphi}\cos\varphi, \end{cases}$$

par rapport à φ, on obtient

$$\begin{cases} dx = -\left(\varrho + \dfrac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right) \sin\varphi \, d\varphi, \\ dy = \quad \left(\varrho + \dfrac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right) \cos\varphi \, d\varphi, \end{cases}$$

d'où il suit pour la *différentielle de l'arc*

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right) d\varphi.$$

Comme $\tau = 90^\circ + \varphi$ (fig. 10), *l'angle de contingence* est

$$d\tau = d\varphi.$$

Pour le *rayon de courbure* R, enfin, on trouve l'expression simple

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\tau} = \varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}.$$

Un observateur, placé au point de contact d'une tangente (ϱ,φ) de manière à avoir le point infiniment voisin devant lui, aura toujours le centre de courbure à sa gauche. En d'autres termes : Le centre de courbure se trouve du même côté de la tangente que l'origine ou de l'autre côté, suivant que ϱ et R sont du même signe ou de signes différents.

Exemple 1. On demande une courbe dont la longueur de l'arc s, compté à partir de $\varphi = 0$, soit proportionnelle au rayon vecteur ϱ avec la condition que pour $\varrho = 0$, $\dfrac{d\varrho}{d\varphi} = a$.

Comme $s = \displaystyle\int_0^\varphi \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right) d\varphi$, on a

$$\int_0^\varphi \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right) d\varphi = n\varrho,$$

d'où par différentiation

$$\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = n\,\frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

Pour intégrer cette équation différentielle linéaire, nous distinguons trois cas :

1) $n > 2$. Dans ce cas l'intégrale devient

$$\varrho = Ae^{\lambda_1\varphi} + Be^{\lambda_2\varphi},$$

où $$\lambda_1 = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2}.$$

Les conditions initiales donnent pour la détermination des constantes arbitraires A et B

$$A + B = 0, \quad \lambda_1 A + \lambda_2 B = a,$$

d'où $$A = -B = \frac{a}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

en sorte que l'équation de la courbe demandée est

$$\varrho = \frac{a}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{\lambda_1\varphi} - e^{\lambda_2\varphi}).$$

2) $n < 2$. L'intégrale générale de l'équation différentielle est dans ce cas

$$\varrho = e^{\frac{1}{2}n\varphi}\left[A \cos \frac{\sqrt{4 - n^2}}{2}\varphi + B \sin \frac{\sqrt{4 - n^2}}{2}\varphi\right].$$

En introduisant les conditions initiales, il vient

$$A = 0, \quad B = \frac{2a}{\sqrt{4 - n^2}}.$$

La courbe demandée a donc l'équation

$$\varrho = \frac{2a}{\sqrt{4 - n^2}} \cdot e^{\frac{1}{2}n\varphi} \sin \frac{\sqrt{4 - n^2}}{2}\varphi.$$

3) $n = 2$. Dans ce cas la résolvante de l'équation différentielle possède une racine double. Par conséquent l'intégrale est de la forme

$$\varrho = e^{\varphi}(A + B\varphi);$$

par suite des conditions initiales on a

$$A = 0, \quad B = a,$$

de sorte que

$$\varrho = a\varphi e^{\varphi}.$$

Exemple 2. On cherche une courbe pour laquelle $s = \frac{1}{2} a\varphi^2$, avec les conditions initiales $\varphi = 0$, $\varrho = \frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$.

Ce problème conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \varrho = a\varphi,$$

dont l'intégrale générale est

$$\varrho = a\varphi + A\cos\varphi + B\sin\varphi.$$

Pour qu'elle satisfasse aux conditions initiales, on doit avoir

$$A = 0, \quad B = -a.$$

Par conséquent la courbe demandée a pour équation

$$\varrho = a(\varphi - \sin\varphi). \quad \text{(Développante du cercle.)}$$

Exemple 3. Trouver une courbe dont le rayon de courbure soit proportionnel au rayon vecteur ϱ. ($R = n\varrho$).

Comme $R = \varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}$, il s'agit de résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = (n-1)\varrho.$$

Suivant que 1) $n > 1$, 2) $n < 1$, 3) $n = 1$, l'intégrale devient

1) $\varrho = Ae^{\varphi\sqrt{n-1}} + Be^{-\varphi\sqrt{n-1}}$,

2) $\varrho = A\cos(\varphi\sqrt{1-n}) + B\sin(\varphi\sqrt{1-n})$,

3) $\varrho = A\varphi + B$.

Dans le second cas la courbe est une épicycloïde, par exemple pour $n = \frac{8}{9}$ une cardioïde, pour $n = -3$ une astroïde, dans le troisième une développante du cercle et pour $A = 0$ une circonférence.

31. *Relations entre une courbe et sa podaire.* Si $f(\varrho,\varphi) = 0$ est l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles polaires, on sait que $f(\varrho,\varphi) = 0$ peut aussi être envisagée comme l'équation en coordonnées ponctuelles polaires de la podaire par rapport à l'origine de la courbe considérée. (Cf. n° 27.) Or, la normale N et la sous-normale S_n polaires d'une courbe sont respectivement

$$N = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}, \quad S_n = \frac{d\varrho}{d\varphi},$$

d'où il résulte le théorème : La normale polaire en un point quelconque P de la podaire d'une courbe est égale au rayon vecteur r du point correspondant P′ de cette courbe et la sous-normale de la podaire au point P est égale à $\frac{d\varrho}{d\varphi}$, savoir égale à la distance PP′ (Cf. n° 28).

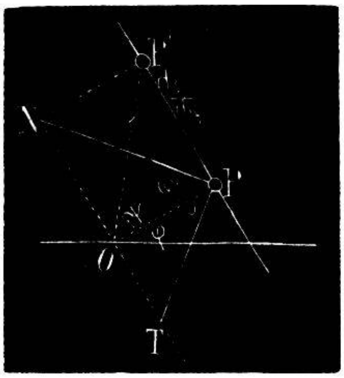

Fig. 11.

En appelant ω l'angle que fait la normale au point P de la podaire avec le rayon vecteur ϱ de ce point, il vient

$$\omega = \psi - \varphi, \ \operatorname{cotg} \omega = \operatorname{cotg} (\psi - \varphi) = \varrho \frac{d\varphi}{d\varrho}.$$

Moyennant ces théorèmes la normale et la tangente de la podaire peuvent facilement être construites.

Le rayon de courbure R au point P′ de la courbe proposée étant (Cf. n° 30)

$$\mathrm{R} = \varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}$$

et celui de la podaire au point correspondant P

$$\mathrm{R}' = \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho\,\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}} =$$

$$= \frac{r^3}{2\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right] - \varrho\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right)} = \frac{r^3}{2r^2 - \varrho\mathrm{R}}\,,$$

il existe entre les deux rayons de courbure la relation linéaire

$$\mathrm{R}' = \frac{r^3}{2r^2 - \varrho\mathrm{R}} = \frac{r.\,\frac{r^2}{\varrho}}{2\,\frac{r^2}{\varrho} - \mathrm{R}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{R}'}{r} = \frac{\frac{r^2}{\varrho}}{2\frac{r^2}{\varrho} - \mathrm{R}}\,.$$

Par conséquent, R étant connu, R′ pourra être construit moyennant une quatrième proportionnelle et réciproquement.

Observation. On peut remarquer que R′ devient infiniment grand, lorsque $2\,\frac{r^2}{\varrho} - \mathrm{R} = 0$. Une courbe qui satisferait en tous ses points à cette dernière condition, aurait pour podaire une droite. Or, on sait que la parabole, rapportée à son foyer, est une pareille courbe. Afin de savoir s'il n'existe pas encore d'autres courbes jouissant de la même propriété, intégrons l'équation différentielle $2\,\frac{r^2}{\varrho} - \mathrm{R} = 0$ ou

$$2.\ \frac{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}{\varrho} = \varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}.$$

En la mettant sous la forme

$$d\varphi = \frac{d\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)}{1 + \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2}, \text{ où } \varrho' = \frac{d\varrho}{d\varphi},$$

on obtient d'abord l'intégrale première

$$\varphi - \varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right) \text{ ou } \frac{\varrho'}{\varrho} = \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0),$$

et ensuite l'intégrale seconde

$$\log\frac{\varrho}{C} = -\log\cos(\varphi - \varphi_0)$$

qui peut s'écrire

$$\varrho = \frac{C}{\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

On reconnaît par là que la parabole est la seule courbe qui jouisse de la propriété indiquée.

L'équation $\frac{R}{2} = \frac{r^2}{\varrho}$ permet une construction très simple du rayon de courbure de la parabole. (Pl. 24, fig. 10).

32. *Aire d'une courbe.* En différentiant l'équation

$$\cos(\psi - \varphi) = \frac{\varrho}{r} \text{ (Cf. n° 27)},$$

il vient

$$-\sin(\psi - \varphi)(d\psi - d\varphi) = d\left(\frac{\varrho}{r}\right),$$

d'où l'on tire

$$d\psi - d\varphi = -\frac{d\left(\frac{\varrho}{r}\right)}{\sin(\psi-\varphi)} = -r.\frac{d\left(\frac{\varrho}{r}\right)}{\frac{d\varrho}{d\varphi}} = -\frac{r\frac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho\frac{dr}{d\varphi}}{r\frac{d\varrho}{d\varphi}}\,d\varphi,$$

$$d\psi = \frac{\varrho}{r}\,\frac{\frac{dr}{d\varphi}}{\frac{d\varrho}{d\varphi}}\,d\varphi = \frac{\varrho}{r}.\frac{\varrho\frac{d\varrho}{d\varphi} + \frac{d\varrho}{d\varphi}.\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}}{r\frac{d\varrho}{d\varphi}}\,d\varphi = \frac{\varrho\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right)}{r^2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\varrho R}{r^2}\,d\varphi.$$

La différentielle de l'aire A d'une courbe en coordonnées ponctuelles polaires étant $dA = \frac{1}{2}r^2 d\psi$, on a

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\psi = \frac{1}{2}\varrho R\, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varrho^2 + \varrho\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right)d\varphi.$$

Si l'on désigne par A_1 l'aire de la podaire de la courbe considérée, en sorte que

$$dA_1 = \frac{1}{2}\varrho^2 d\varphi,$$

il suit

$$\frac{dA}{dA_1} = \frac{R}{\varrho}.$$

Lorsque ce rapport est constant $= n$ (Cf. n° 30) et qu'on a soin de prendre les intégrales entre les mêmes limites, il est évident que le rapport des aires des deux courbes est le même, savoir $\frac{A}{A_1} = n$.

C'est ainsi qu'on trouve par exemple que l'aire de la développante du cercle $\varrho = a\varphi$ est égale à celle de la spirale d'Archimède $\varrho = a\varphi$, si toutefois on compte ces surfaces à partir d'une couple de points correspondants jusqu'à une autre couple de points correspondants. (Pl. 25, fig. 11.)

33. *Polaires réciproques.* On a vu (Cf n° 22) que le pôle d'une droite (ϱ, φ) par rapport à la circonférence $\varrho = 1$ est situé à la distance $\frac{1}{\varrho}$ de l'origine sur la perpendiculaire, abaissée de l'origine sur cette droite. Par conséquent, si $f(\varrho, \varphi) = 0$ est l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles polaires, $f\left(\frac{1}{\varrho}, \varphi\right) = 0$ sera l'équation en coordonnées ponctuelles polaires de la polaire réciproque de cette courbe par rapport à la circonférence $\varrho = 1$.

EXEMPLES.

Courbe donnée en coord. tg. pol.	Polaire réciproque en coord. ponct. pol.

1) *La circonférence.*

$\varrho = a$ . . . . $\varrho = \frac{1}{a}$. (Circonf. du rayon $\frac{1}{a}$).

2) *L'ellipse.*

$\varrho = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$. $\varrho = \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$

(Ellipse aux axes $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$).

3) *La parabole.*

$\varrho \cos \varphi = \frac{1}{2} p$ . . . . . . $\varrho = \frac{2}{p} \cos \varphi$. (Circ. du rayon $\frac{1}{p}$ passant par l'origine.)

4) *L'hyperbole équilatère.*

$\varrho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$ . . . . . . $\varrho = \frac{1}{a\sqrt{\cos 2\varphi}}$. (Autre hyp. équil.)

5) *La développante du cercle.*

$\varrho = a\varphi$ . . . . $\varrho = \frac{1}{a\varphi}$ (Spir. hyperbolique.)

6) *Courbe dont la podaire est une spirale hyperbolique.*

$\varrho = \frac{a}{\varphi}$ . . . . $\varrho = \frac{\varphi}{a}$. (Spir. d'Archimède.)

7) *Spirale logarithmique.*

$\varrho = ae^{\varphi}$ . . . . $\varrho = \frac{1}{a} e^{-\varphi}$. (Autre spir. log.)

34. *Courbes équidistantes.* Soit $f(\varrho, \varphi) = 0$ l'équation d'une courbe. De la définition des courbes équidistantes (Cf. n° 24) il suit immédiatement que l'équation d'une courbe équidistante s'obtient en remplaçant dans $f(\varrho, \varphi) = 0$ le rayon vecteur ϱ par $\varrho \pm k$, en sorte que $f(\varrho \pm k, \varphi) = 0$ sera l'équation cherchée.

Si R est le rayon de courbure en un point quelconque de la courbe $f(\varrho, \varphi) = 0$, $R \pm k$ sera celui de la courbe équidistante au point correspondant.

La longueur de la courbe $f(\varrho, \varphi) = 0$ étant

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R d\varphi,$$

celle de l'arc correspondant de la courbe équidistante sera

$$s' = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (R \pm k) d\varphi = s \pm k(\varphi_2 - \varphi_1),$$

ce qui démontre une des propriétés principales des courbes équidistantes.

35. *Développée $n^{\text{ième}}$.* Les normales d'une courbe donnée $\varrho = f(\varphi)$ étant les tangentes de la développée de cette courbe, on peut envisager la développée comme l'enveloppe de toutes les normales de la courbe proposée. Or, la normale en un point quelconque P de la courbe $\varrho = f(\varphi)$ est parallèle à la perpendiculaire, abaissée de

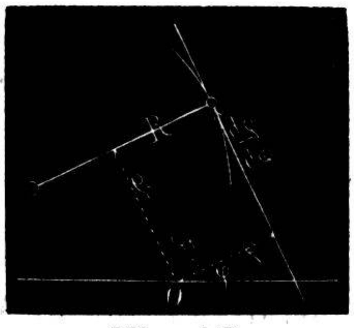

Fig. 12.

l'origine sur la tangente en ce point et la distance entre ces deux parallèles est égale à $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ (Cf. n° 28). De là il résulte qu'en appelant ϱ_1 et φ_1 les coordonnées tangentielles polaires de la normale en question, savoir d'une tangente de la développée, on aura

$$\varrho_1 = \frac{d\varrho}{d\varphi}, \; \varphi_1 = \varphi + \frac{1}{2}\pi.$$

Afin d'obtenir l'équation de la développée cherchée, il suffit d'éliminer le paramètre φ de ces deux équations.

En répétant ce procédé on arrive aux équations suivantes remarquables par leur simplicité

$$\varrho_n = \frac{d^n\varrho}{d\varphi^n}, \; \varphi_n = \varphi + n.\frac{\pi}{2},$$

où ϱ_n et φ_n désignent les coordonnées de celle des tangentes de la développée $n^{\text{ième}}$ qui correspond à la tangente (ϱ, φ) de la courbe proposée. Par l'élimination de l'angle φ de ces deux équations il vient pour l'équation de la développée $n^{\text{ième}}$ correspondant à la courbe $\varrho = f(\varphi)$

$$\varrho_n = f^n\left(\varphi_n - n\frac{\pi}{2}\right).$$

Exemple 1. Le fait que la développée $n^{\text{ième}}$ de la courbe

$$\varrho = a + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \ldots\ldots + a_n\varphi^n$$

est évidemment la circonférence $\varrho = a$, permet de reconnaître qu'en ce système de coordonnées toute courbe pour laquelle ϱ est une fonction entière de φ du degré n, représente une développante $n^{\text{ième}}$ du cercle.

Exemple 2. Soit la *spirale logarithmique*

$$\varrho = \mathrm{A}e^{a\varphi}.$$

La développée $n^{\text{ième}}$ de cette courbe, savoir

$$\varrho_n = A a^n e^{a(\varphi_n - n\frac{\pi}{2})}$$

est identique avec la courbe donnée, mais placée différemment. On peut obtenir la coïncidence des deux courbes en choisissant convenablement la constante a. En effet, si m désigne un nombre entier, il suffit de tirer a de l'équation

$$A e^{a(\varphi - 2m\pi)} = A a^n e^{a(\varphi - n\frac{\pi}{2})}$$

ou

$$0 = n \log a + a\left(2m - \frac{n}{2}\right)\pi$$

qui exprime que $\varrho_n = \varrho$ et en même temps $\frac{d\varrho_n}{d\varphi_n} = \frac{d\varrho}{d\varphi}$ pour $\varphi_n = \varphi$. Pourvu que $m > 0$ et $4m > n$ cette équation admet toujours une racine réelle. (Pl. 25, fig. 12.)

Exemple 3. Soit la *cycloïde*

$$\varrho = 2a[\sin\varphi + (\pi - \varphi)\cos\varphi].$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de ϱ devient

$$\frac{d^n\varrho}{d\varphi^n} = 2a\left[(1-n)\sin\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) + (\pi - \varphi)\cos\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

En remplaçant φ par $(\varphi_n - n\frac{\pi}{2})$ dans cette équation, il suit pour la développée $n^{\text{ième}}$

$$\varrho_n = 2a\left[(1-n)\sin\varphi_n + \left(\frac{n+2}{2}\pi - \varphi_n\right)\cos\varphi_n\right].$$

On reconnaît sans difficulté que cette courbe ne diffère de la proposée que par la position.

Exemple 4. Soit l'*épicycloïde*

$$\varrho = (a+b)\sin\left(\frac{a+b}{a-b}\varphi\right).$$

De cette équation on tire

$$\frac{d^n\varrho}{d\varphi^n} = (a+b)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^n \sin\left(\frac{a+b}{a-b}\varphi + n\frac{\pi}{2}\right),$$

et en substituant pour φ sa valeur $(\varphi_n - n\frac{\pi}{2})$, il vient

$$\varrho_n = (a+b)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^n \sin\left[\frac{(a+b)\,\varphi_n - nb\pi}{a-b}\right].$$

Cette dernière équation montre que la développée $n^{\text{ième}}$ de l'épicycloïde est une courbe semblable à la proposée.

36. *Développante $n^{\text{ième}}$.* Par le procédé inverse de celui qui a servi à déterminer la développée $n^{\text{ième}}$ d'une courbe donnée $\varrho = f(\varphi)$, on peut établir l'équation de la développante $n^{\text{ième}}$ de cette courbe.

Soient, en effet, ϱ_{-1} et φ_{-1} les coordonnées tangentielles polaires de celle des tangentes de la développante $n^{\text{ième}}$ qui correspond à la tangente (ϱ, φ) de la proposée.

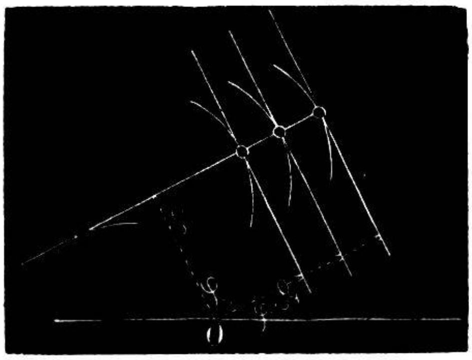

Fig. 13.

Alors on doit avoir

$$\frac{d\varrho_{-1}}{d\varphi_{-1}} = \varrho, \quad \varphi_{-1} = \varphi - \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire en observant que $d\varphi_{-1} = d\varphi$

$$\varrho_{-1} = \int \varrho d\varphi + C_1.$$

En continuant ce procédé on obtient pour la tangente $(\varrho_{-n}, \varphi_{-n})$ de la développante $n^{\text{ième}}$ correspondant à la tangente (ϱ, φ) de la courbe donnée

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_{-n} &= \overbrace{\int d\varphi \int d\varphi \ldots\ldots \int}^{n} \varrho d\varphi + C_1\varphi^{n-1} + C_2\varphi^{n-2} + \ldots \\ &\qquad + C_{n-1}\varphi + C_n, \\ \varphi_{-n} &= \varphi - n\frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right.$$

L'élimination du paramètre variable φ de ces deux équations conduit à l'équation cherchée.

Exemple 1. Cherchons la développante $n^{\text{ième}}$ du point

$$\varrho = a\cos\varphi + b\sin\varphi.$$

On trouve successivement :

Pour la développante première

$$\begin{cases} \varrho_{-1} = a\sin\varphi - b\cos\varphi + C_1, \\ \varphi_{-1} = \varphi - \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

d'où $\qquad \varrho_{-1} = a\cos\varphi_{-1} + b\sin\varphi_{-1} + C_1.$ (Circonférence du centre (a,b) et du rayon C_1.)

Pour la développante seconde

$$\begin{cases} \varrho_{-2} = a\sin\varphi_{-1} - b\cos\varphi_{-1} + C_1\varphi_{-1} + C_2, \\ \varphi_{-2} = \varphi_{-1} - \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

d'où $\quad \varrho_{-2} = a\cos\varphi_{-2} + b\sin\varphi_{-2} + C_1\varphi_{-2} + C_2.$ (Développante du cercle.)

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Enfin pour la développante $n^{\text{ième}}$

$$\varrho_{-n} = a\cos\varphi_{-n} + b\sin\varphi_{-n} + C_1\varphi_{-n}^{n-1} + C_2\varphi_{-n}^{n-2} + \dots$$
$$+ C_{n-1}\varphi_{-n} + C_n.$$

Exemple 2. La développante première de l'ellipse

$$\varrho = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$$

est déterminée par

$$\varrho_{-1} = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi + C_1 = a\,E(k,\varphi) + C_1,$$

où $E(k,\varphi)$ signifie, d'après Legendre, l'intégrale elliptique de la seconde espèce en question et $k = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$,

$$\varphi_{-1} = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

De ces deux équations il suit :

$$\varrho_{-1} = a\,\mathrm{E}(k, \varphi_{-1} + \frac{\pi}{2}) + \mathrm{C}_1.$$

Exemple 3. Pour la développante première de la parabole

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi}$$

il vient

$$\varrho_{-1} = a \log \operatorname{tg}\,(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi_{-1}) + \mathrm{C}_1.$$

37. *Podaire $n^{\text{ième}}$ d'une courbe par rapport à l'origine.* Bien que renonçant à l'emploi des coordonnées tangentielles polaires pour la solution du problème des podaires $n^{\text{ièmes}}$, le problème lui-même a paru assez important pour justifier son insertion dans ce mémoire. La solution pourrait d'ailleurs se donner avec la même facilité en coordonnées tangentielles.

Soient r, ψ les coordonnées polaires d'un point P quelconque de la courbe proposée $r = f(\psi)$, r_1, ψ_1; r_2, ψ_2; ..... r_n, ψ_n les coordonnées des points homologues P_1, P_2, ... P_n respectivement de la 1re, 2de, ... $n^{\text{ième}}$ podaire de la courbe donnée et soit ϑ l'angle que fait la tangente au point P avec le rayon vecteur r. Alors on sait que d'une part

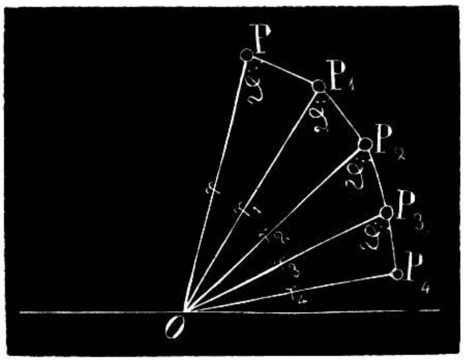

Fig. 14.

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{r\,d\psi}{dr}$$

et d'autre part (Cf. n° 31)

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{r_1\,d\psi_1}{dr_1},$$

en sorte que

$$r\frac{d\psi}{dr} = r_1\frac{d\psi_1}{dr_1}.$$

En continuant ce même raisonnement, on obtient les égalités

$$r\frac{d\psi}{dr} = r_1\frac{d\psi_1}{dr_1} = r_2\frac{d\psi_2}{dr_2} = \ldots\ldots = \frac{r_n\,d\psi_n}{dr_n}$$

qui démontrent le théorème : En des points homologues les tangentes des podaires successives d'une courbe donnée font avec les rayons vecteurs correspondants des angles égaux. De ce théorème on déduit immédiatement

$$\begin{aligned} r_1 &= r\sin\vartheta, \\ r_2 &= r_1\sin\vartheta = r\sin^2\vartheta, \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ r_n &= r_{n-1}\sin\vartheta = r\sin^n\vartheta \end{aligned}$$

et

$$\psi_n = \psi - n\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right).$$

Les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} r_n &= \frac{r}{\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{dr}{rd\psi}\right)^2}\,\right]^n} \\ \psi_n &= \psi - n\operatorname{arctg}\left(\frac{dr}{rd\psi}\right) \end{aligned}\right.$$

résolvent le problème proposé. Dans les cas où l'élimination du paramètre ψ est possible, on obtient l'équation de la podaire $n^{\text{ième}}$ sous la forme $F(r_n, \psi_n) = 0$.

Ces équations restent encore applicables, lorsque n est zéro ou un nombre entier négatif. Pour une valeur négative de n la courbe donnée figure elle-même comme podaire $n^{\text{ième}}$ de la courbe cherchée. Dans le cas de $n = 0$ on retombe sur la courbe donnée.

Exemple. Appliquons les formules précédentes au cas

$$r = \frac{a}{\sqrt[m]{\cos m\psi}},$$

où m signifie un nombre positif ou négatif, entier ou fractionnaire. On obtient pour la podaire $n^{\text{ième}}$

$$\left\{\begin{array}{l} r_n = \dfrac{a}{\sqrt[m]{\cos m\psi}\left[\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 m\psi}\right]^n} = a\,(\cos m\psi)^{n-\frac{1}{m}} \\ \psi_n = \psi - n\,.\operatorname{arctg}\,(\operatorname{tg} m\psi) = (1-nm)\,\psi, \end{array}\right.$$

d'où en éliminant l'angle ψ

$$r_n = a\left[\cos\frac{m\psi_n}{1-nm}\right]^{n-\frac{1}{m}}.$$

Cet exemple donne lieu à de nombreux cas particuliers. Considérons-en quelques-uns.

1er cas particulier. Soit $m = 1$; alors la courbe donnée

$$r = \frac{a}{\cos\psi}$$

est une droite parallèle à l'axe des Y. Sa podaire $n^{\text{ième}}$ a l'équation

$$r_n = a\left[\cos\frac{\psi_n}{1-n}\right]^{n-1}.$$

Cette formule devenant inapplicable pour $n = 1$, ce cas doit se traiter directement. On trouve

$$\psi_1 = 0,\ \ r_1 = a.$$

La podaire première de la droite est par conséquent un point sur l'axe des X.

$n = 2$, $r_2 = a\cos\psi_2$. (Circonférence du rayon $\frac{1}{2}a$ passant par le pôle.)

$n = 3$, $r_3 = \frac{1}{2}a(1+\cos\psi_3)$. (Cardioïde.)

$$n = 4,\ r_4 = a\left(\cos\frac{1}{3}\psi_4\right)^3,$$

$$n = -1,\ r_{-1} = \frac{a}{\left(\cos\frac{1}{2}\psi_{-1}\right)^2} = \frac{2a}{1+\cos\psi_{-1}}. \quad \text{(Parabole.)}$$

$$n = -2,\ r_{-2} = \frac{a}{\left(\cos\frac{1}{3}\psi_{-2}\right)^3}. \quad \text{(Pl. 25, fig. 13.)}$$

2d cas particulier. $m = 2$.

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\psi}}. \quad \text{(Hyperbole équilatère.)}$$

$$r_n = a\left[\cos\left(\frac{2\psi_n}{1-2n}\right)\right]^{n-\frac{1}{2}}.$$

$$n = 1,\ r_1 = a\sqrt{\cos 2\psi_1}. \quad \text{(Lemniscate.)}$$

$$n = 2,\ r_2 = a\left(\cos\frac{2}{3}\psi_2\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$n = -1,\ r_{-1} = \frac{a}{\left(\cos\frac{2}{3}\psi_{-1}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{(Pl. 25, fig. 14.)}$$

On peut remarquer que deux hypothèses $m = \mu$ et $m = \nu$ amènent les mêmes suites de courbes, lorsque $n = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu}$ est un nombre entier. Par exemple $\mu = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$; $\mu = 3$, $\nu = \frac{4}{3}$.

Remarque. Les rayons vecteurs $r, r_1, r_2, \ldots r_n$ formant une progression géométrique, et les angles correspondant $\psi,\ \psi - \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right),\ \psi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right),\ \ldots\ \psi - n\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$ une progression arithmétique, il est évident que les points $P, P_1, \dots P_n$ d'une courbe donnée $r = f(\psi)$ et de ses n podaires successives sont situés sur une spirale logarithmique dont l'équation est

$$R = r.e^{\frac{(\psi - \Psi)\log\sin\vartheta}{\frac{1}{2}\pi - \vartheta}}$$

où R et Ψ désignent les coordonnées courantes et où

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{rd\psi}{dr}\right).$$

38. On propose de trouver une courbe dont la podaire $n^{\text{ième}}$ soit une courbe semblable par rapport à l'origine prise pour centre de similitude.

Il y a trois cas à distinguer.

1er cas. La similitude est telle que les rayons vecteurs des points homologues sont proportionnels, savoir $r_n = mr$. Dans cette équation m doit évidemment être un nombre fractionnaire.

Soit $r = f(\psi)$ l'équation de la courbe cherchée. La fonction $f(\psi)$ doit alors satisfaire à l'équation différentielle

$$mr = \frac{r}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{rd\psi}\right)^2}\right]^n},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dr}{r} = \sqrt{m^{-\frac{2}{n}} - 1}\ d\psi.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\log\frac{r}{C} = \psi\sqrt{m^{-\frac{2}{n}} - 1}.$$

ou

$$r = Ce^{\psi\sqrt{m^{-\frac{2}{n}} - 1}}.$$

En posant pour simplifier $\sqrt{m^{-\frac{2}{n}}-1}=\operatorname{tg}\omega$, l'équation de la courbe cherchée devient

$$r = Ce^{\psi \operatorname{tg}\omega},$$

celle de sa podaire $n^{\text{ième}}$

$$r_n = C\cos^n\omega\, e^{(\psi_n + n\omega)\operatorname{tg}\omega}.$$

Ces deux courbes sont des spirales logarithmiques identiques, mais placées différemment. En tournant la première d'un angle

$$\psi_0 = n\operatorname{cotg}\omega\,[\omega\operatorname{tg}\omega + \log\cos\omega]$$

autour de l'origine dans le sens des angles décroissants, on peut amener la coïncidence.

Il est presque inutile d'ajouter que pour $m=1$ on obtient la circonférence $r=C$.

2^d *cas.* On demande que la similitude soit directe avec correspondance arbitraire des rayons vecteurs proportionnels.

Si dans ce cas $r=f(\psi)$ est l'équation de la courbe cherchée, celle de sa podaire $n^{\text{ième}}$ aura la forme

$$r_n = mf(\psi_n + \mu),$$

où m et μ sont des nombres réels quelconques. Pour la première de ces courbes on a

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{f(\psi)}{f'(\psi)}$$

et pour la seconde

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{f(\mu+\psi_n)}{f'(\mu+\psi_n)}.$$

Or, en des points homologues qui correspondent à

$$\psi=\psi,\ \ \psi_n = \psi - n.\operatorname{arctg}\frac{f'(\psi)}{f(\psi)},$$

on doit avoir $\vartheta' = \vartheta$ (Cf. n° 37), d'où il suit l'équation

$$\frac{f(\psi)}{f'(\psi)} = \frac{f\left[\mu + \psi - n \operatorname{arctg} \frac{f'(\psi)}{f(\psi)}\right]}{f'\left[\mu + \psi - n \operatorname{arctg} \frac{f'(\psi)}{f(\psi)}\right]},$$

à laquelle on peut satisfaire par l'hypothèse

$$\frac{f(\psi)}{f'(\psi)} = \pm \frac{1}{k},$$

où k désigne une constante. L'intégrale générale de cette dernière équation différentielle étant

$$\log \frac{f(\psi)}{C} = \pm k\psi \quad \text{ou} \quad r = f(\psi) = Ce^{\pm k\psi},$$

on reconnaît que la courbe cherchée sera encore une spirale logarithmique. La constante k se détermine moyennant la condition qu'en des points homologues on ait (Cf. n° 37)

$$r_n = \frac{r}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{rd\psi}\right)^2}\right]^n} = \frac{Ce^{\pm k\psi}}{\sqrt{(1+k^2)}^n}$$

ou

$$m\,Ce^{\pm k\,[\mu + \psi - n \operatorname{arctg}(\pm k)]} = \frac{Ce^{\pm k\psi}}{\sqrt{(1+k^2)}^n},$$

d'où il suit

$$m\,e^{\pm k\,[\mu - n \operatorname{arctg}(\pm k)]} = \frac{1}{\sqrt{(1+k)^2}^n},$$

et en prenant les logarithmes

$$\log m \pm k\,(\mu \mp n \operatorname{arctg} k) + \frac{n}{2} \log(1+k^2) = 0.$$

Si l'on convient de prendre le radical $\sqrt{1+k^2}$ positivement, m devra aussi être un nombre positif.

Discussion des deux équations

$$(1)\quad \log m + k\,(\mu - n \operatorname{arctg} k) + \frac{n}{2} \log (1 + k^2) = 0,$$

$$(2)\quad \log m - k\,(\mu + n \operatorname{arctg} k) + \frac{n}{2} \log (1 + k^2) = 0.$$

Comme (2) s'obtient de (1) en changeant k en $-k$, il est clair que si les deux équations possèdent des racines positives, elles admettront aussi des racines négatives. Il suffira, en conséquence, de constater dans les différents cas l'existence ou l'absence de racines positives.

Considérons d'abord l'équation (1)

$$f(k) = \log m + k\,(\mu - n \operatorname{arctg} k) + \frac{n}{2} \log (1 + k^2) = 0,$$

en n'admettant que des valeurs positives de n. Comme

$$f'(k) = \mu - n \operatorname{arctg} k$$

s'annule pour $k = \operatorname{tg} \frac{\mu}{n}$ et que

$$f''(k) = -\frac{n}{1 + k^2},$$

la fonction $f(k)$ possède un maximum pour $k = \operatorname{tg} \frac{\mu}{n}$.

Soit maintenant 1) $m > 1$, $\mu > 0$. La valeur initiale $f(0) = \log m$ étant positive, le maximum

$$\log m + \frac{n}{2} \log \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{n}\right)$$

le sera aussi. Pour que la fonction puisse devenir négative, μ doit satisfaire à la condition $\mu < n\,\frac{\pi}{2}$. Alors l'équation possède une seule racine positive.

2) $m < 1$, $\mu > 0$. La valeur initiale est négative. Pour que le maximum soit positif, il faut que

$$\frac{n}{2} \log \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{\mu}{n}\right) > -\log m, \text{ ou } \mu > n \arccos \sqrt[n]{m}.$$

Si on prend encore $\mu < n \frac{\pi}{2}$ en sorte que

$$\frac{\pi}{2} > \frac{\mu}{n} > \arccos \sqrt[n]{m},$$

ce qui est toujours possible, l'équation possède deux racines positives qui dans le cas limite $\mu = n \arccos \sqrt[n]{m}$ coïncident.

3) $m > 1$, $\mu < 0$. La valeur initiale est positive. La fonction décroît jusqu'à $-\infty$. Par conséquent il existe une seule racine positive, sans que μ soit soumis à une condition de limite.

4) $m < 1$, $\mu < 0$. Ce cas diffère du précédent en ce que la valeur initiale est négative, d'où il suit que l'équation (1) n'admet point de racine positive.

Si l'on applique le même raisonnement à l'équation

$$(2)\ f(k) = \log m - k(\mu + n \operatorname{arctg} k) + \frac{n}{2} \log(1 + k^2) = 0,$$

on trouve

1) $m > 1$, $\mu > 0$. Une racine positive; μ sans condition.

2) $m < 1$, $\mu > 0$. Point de racine positive.

3) $m > 1$, $\mu < 0$, $-\mu < n \frac{\pi}{2}$. Une racine positive.

4) $m < 1$, $\mu < 0$, $\frac{\pi}{2} > -\frac{\mu}{n} > \arccos \sqrt[n]{m}$. Deux racines positives qui coïncident à la limite $-\mu = n \arccos \sqrt[n]{m}$.

Remarque. Afin d'obtenir, pour la construction, des courbes dont on connaisse la forme à l'avance, il est plus simple de choisir k et de calculer μ. C'est ainsi que pour

$$n = 1, \, m = \frac{1}{2}, \, k = -1$$

on a trouvé $\mu = -1{,}1319718\ldots = -64^\circ 51' 26''$ et par la suite

$$r = Ce^{-\psi}, \, r_1 = \frac{1}{2} Ce^{(1{,}1319\ldots - \psi)}, \quad \text{(Pl. 25, fig. 15.)}$$

tandis que les hypothèses

$$n = 2, \, m = 4, \, k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

donnaient

$$\mu = -1{,}8522151\ldots = -106^\circ 7' 27'',$$

$$r = Ce^{\frac{\psi}{\sqrt{3}}}, \, r_2 = 4\,Ce^{\frac{\psi - 1{,}8522\ldots}{\sqrt{3}}}. \quad \text{(Pl. 25, fig. 16.)}$$

3me cas. On demande que la similitude soit inverse.

En suivant un raisonnement analogue à celui qui a été employé dans le second cas, on trouvera que la circonférence seule répond à toutes les conditions du problème.

39. Comme dernière application des coordonnées tangentielles polaires on pose le problème : Trouver une courbe dont la développée $n^{\text{ième}}$ soit une courbe semblable par rapport à l'origine prise pour centre de similitude.

Ce problème a beaucoup d'analogie avec un problème plus général concernant les développoïdes qui a été traité récemment par M. *Haton de la Goupillière* dans son mémoire : *Recherche sur les développoïdes des divers ordres.* (Annales de la Soc. sc. de Bruxelles, 2e année, 1877.) Aussi n'en donnons-nous ici la solution qu'à titre d'application intéressante des coordonnées tangentielles polaires. La perte de généralité provenant de ce qu'on a disposé d'avance du centre de similitude, trouve en quelque sorte une compensation dans l'avantage que la solution proposée se prête à la construction sans intégration préalable. Quant au mode de solution, nous ne saurions mieux faire que de suivre l'analyse élégante de M. *H. de la Goupillière.*

Il convient de distinguer les cas de la similitude inverse et de la similitude directe, tout en laissant arbitraire la correspondance des rayons vecteurs proportionnels.

I. *Similitude inverse.* Soit $\varrho = f(\varphi)$ l'équation de la courbe cherchée. Celle de sa développée $n^{\text{ième}}$ aura la forme

$$\varrho_n = m f(\mu - \varphi_n),$$

où m et μ signifient des nombres quelconques positifs ou négatifs. Or, on sait (Cf. n° 35) qu'en des points correspondants on doit avoir

$$\varrho_n = \frac{d^n \varrho}{d\varphi^n}, \quad \varphi_n = \varphi + n\frac{\pi}{2}.$$

Si donc on donne à φ_n la valeur $\varphi + n\frac{\pi}{2}$, il vient

$$(1) \quad \varrho_n = f^n(\varphi) = m f\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

et en différentiant cette équation encore n fois

$$(2) \quad f^{2n}(\varphi) = \varepsilon^n m f^n\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

où ε est mis pour -1. C'est une équation aux différences mêlées. Pour la ramener à une équation différentielle ordinaire, remplaçons φ par $\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi$, ce qui donne

$$f^{2n}\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varepsilon^n m f^n(\varphi)$$

et moyennant (1)

$$f^{2n}\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varepsilon^n m^2 f\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

En remplaçant de nouveau $\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi$ par φ, on obtient l'équation différentielle linéaire de l'ordre $2n$

$$(3) \quad f^{2n}(\varphi) = \varepsilon^n m^2 f(\varphi),$$

dont l'intégration n'offre aucune difficulté.

En effet, la résolvante de (3) est

$$\lambda^{2n} = \varepsilon^n m^2 = e^{n\pi i} m^2, \text{ où } i = \sqrt{-1}.$$

On en tire

$$\lambda_k = re^{\alpha_k i},\ r = \sqrt[n]{[m]},$$

où $[m]$ désigne la valeur absolue de m et

$$\alpha_k = \frac{n + 2(k-1)}{2n}\pi.$$

L'intégrale générale de l'équation (3) est par conséquent

$$\varrho = f(\varphi) = \sum_1^{2n} A_k e^{\lambda_k \varphi}.$$

En observant que $\lambda_{k''} = -\lambda_{k'}$, lorsque $k'' = n + k'$, on peut écrire

$$(4) \quad \varrho = \sum_1^{n} (A_k e^{\lambda_k \varphi} + B_k e^{-\lambda_k \varphi}).$$

Or, l'intégrale (4) devant satisfaire non-seulement à l'équation (3), mais aussi à l'équation différentielle (1) qui est de l'ordre n, il s'ensuit que n des constantes A_k et B_k ne sont pas arbitraires. L'équation (1) servira à les déterminer. En y remplaçant $f(\varphi)$ par la valeur trouvée, il vient

$$\sum_1^{n} \lambda_k^n (A_k e^{\lambda_k \varphi} + \varepsilon^n B_k e^{-\lambda_k \varphi}) =$$

$$= m \sum_1^{n} \left[A_k e^{\lambda_k (\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi)} + B_k e^{-\lambda_k (\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi)}\right].$$

Dans ces deux sommes les termes d'indices différents ne permettent plus de réduction entre eux, on peut donc se borner à comparer les termes généraux, ce qui donne

$$\lambda_k^n (A_k e^{\lambda_k \varphi} + \varepsilon^n B_k e^{-\lambda_k \varphi}) =$$

$$= m[A_k e^{\lambda_k (\mu - n\frac{\pi}{2})} e^{-\lambda_k \varphi} + B_k e^{-\lambda_k (\mu - n\frac{\pi}{2})} e^{\lambda_k \varphi}],$$

$$\lambda_k^n A_k = m B_k e^{-\lambda_k (\mu - n\frac{\pi}{2})}$$

$$\lambda_k^n \varepsilon^n B_k = m A_k e^{\lambda_k (\mu - n\frac{\pi}{2})}.$$

De l'une ou de l'autre de ces dernières équations il suit

$$B_k = \frac{\lambda_k^n}{m} e^{\lambda_k (\mu - n\frac{\pi}{2})} . A_k .$$

Comme
$$\frac{\lambda_k^n}{m} = \frac{[m]}{m} e^{n\alpha_k i},$$

on a maintenant

$$\varrho = \sum_1^n A_k [e^{\lambda_k \varphi} \pm e^{n\alpha_k i + \lambda_k (\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi)}],$$

où l'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que m est positif ou négatif.

Afin de faire disparaître l'imaginaire de l'intégrale ϱ, il faut distinguer les cas de n pair et de n impair.

a) Lorsque n est un nombre *pair*, chaque terme de la somme $\sum_1^n$ est accompagné d'un terme conjugué, sauf toutefois les deux qui correspondent à $k = 1$ et à $k = \frac{n}{2} + 1$. Si l'on considère ces deux termes en premier lieu, on a

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi, \quad \lambda_1 = re^{\frac{1}{2}\pi i} = ri$$

et
$$\alpha_{\frac{1}{2}n+1} = \pi, \ \lambda_{\frac{1}{2}n+1} = re^{\pi i} = -r.$$

Par conséquent, le premier terme de la somme devient

$$
\begin{aligned}
& A_1 \left[e^{r\varphi i} \pm e^{\beta i} e^{-r\varphi i}\right] = \\
&= 2 A_1 \left[(\cos r\varphi + i \sin r\varphi) \pm e^{\beta i} (\cos r\varphi - i \sin r\varphi)\right] = \\
&= 2 A_1 \left[(1 \pm e^{\beta i}) \cos r\varphi + i (1 \mp e^{\beta i}) \sin r\varphi\right],
\end{aligned}
$$

où $$\beta = n\frac{\pi}{2} + r\left(\mu - n\frac{\pi}{2}\right).$$

Soit, pour simplifier

$$2 A_1 (1 \pm e^{\beta i}) = C,$$

d'où

$$2 A_1 = \frac{C}{1 \pm e^{\beta i}}, \quad 2 i A_1 (1 \mp e^{\beta i}) = i C . \frac{1 \mp e^{\beta i}}{1 \pm e^{\beta i}} =$$

$$= i C . \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta i} \mp e^{\frac{1}{2}\beta i}}{e^{-\frac{1}{2}\beta i} \pm e^{\frac{1}{2}\beta i}} = \left\{ \begin{array}{c} C \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \\ - C \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta \end{array} \right. ,$$

suivant qu'il s'agit des signes supérieurs ou des signes inférieurs.

En introduisant ces valeurs, le premier terme prend la forme

$$C \left[\cos r\varphi \left. \begin{array}{c} + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \\ - \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta \end{array} \right\} \sin r\varphi \right] = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{C}{\cos \frac{1}{2}\beta} \cos\left(r\varphi - \frac{1}{2}\beta\right) \\ - \dfrac{C}{\sin \frac{1}{2}\beta} \sin\left(r\varphi - \frac{1}{2}\beta\right), \end{array} \right.$$

ou si l'on modifie encore la constante arbitraire

$$= C_1 \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(r\varphi - \frac{1}{2}\beta\right) \\ \sin\left(r\varphi - \frac{1}{2}\beta\right). \end{array} \right.$$

Le terme correspondant à l'indice $(\frac{1}{2}n+1)$ se présente sans transformation préalable sous la forme réelle

$$C_{\frac{1}{2}n+1}\left[e^{-r\varphi} \pm e^{-r(\mu-n\frac{\pi}{2})}\, e^{r\varphi}\right].$$

Quant aux autres $(n-2)$ termes, il suffira pour amener la forme réelle de faire la somme et la différence de deux termes conjugués (abstraction faite des constantes arbitraires), tels que

$$e^{\lambda_k\varphi} \pm e^{n\alpha_k i+\lambda_k(\mu-n\frac{\pi}{2}-\varphi)} =$$

$$= e^{r\varphi(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)} \pm e^{n\alpha_k i+r(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)(\mu-n\frac{\pi}{2}-\varphi)}$$

$$e^{\lambda'_k\varphi} \pm e^{-n\alpha_k i+\lambda'_k(\mu-n\frac{\pi}{2}-\varphi)} =$$

$$= e^{r\varphi(\cos\alpha_k-i\sin\alpha_k)} \pm e^{-n\alpha_k i+r(\cos\alpha_k-i\sin\alpha_k)(\mu-n\frac{\pi}{2}-\varphi)},$$

où
$$\lambda'_k = re^{-\alpha_k i}$$

signifie le nombre conjugué de λ_k. En changeant encore convenablement les constantes, on aura remplacé les termes complexes aux indices k et $n-(k-2)$ par l'expression réelle

$$C_k\left\{e^{r\varphi\cos\alpha_k}\cos(r\varphi\sin\alpha_k) \pm e^{r\cos\alpha_k(\mu-n\frac{\pi}{2}-\varphi)}.\right.$$
$$\left.\cos\left[n\alpha_k+r\left(\mu-n\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\sin\alpha_k\right]\right\} +$$

$$+ D_k\left\{e^{r\varphi\cos\alpha_k}\sin(r\varphi\sin\alpha_k) \pm e^{r\cos\alpha_k(\mu-n\frac{\pi}{2}-\varphi)}.\right.$$
$$\left.\sin\left[n\alpha_k+r\left(\mu-n\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\sin\alpha_k\right]\right\}.$$

Si l'on désigne, pour abréger, cette expression par $F(\varphi,k)$, la forme définitive de ϱ devient

$$(5)\quad \varrho = C_1 \left\{ \begin{matrix} \cos(r\varphi - \frac{1}{2}\beta) \\ \\ \sin(r\varphi - \frac{1}{2}\beta) \end{matrix} \right. + C_{\frac{1}{2}n+1}\left[e^{-r\varphi} \pm e^{-r(\mu - n\frac{\pi}{2})}\, e^{r\varphi} \right] +$$

$$+ \sum_{2}^{\frac{1}{2}n} F(\varphi, k).$$

Dans cette équation, où les lettres r, α_k et β ont la signification suivante

$$r = \sqrt[n]{[m]}\,,\ \alpha_k = \frac{n + 2(k-1)}{2n}\pi,\ \beta = r\mu + (1 - r)\, n\,\frac{\pi}{2}$$

on prend les signes supérieurs ou inférieurs, suivant que m est positif ou négatif.

b) Lorsque n est un nombre *impair*, chaque terme de la somme $\sum\limits_{1}^{n}$ se trouve accompagné d'un terme conjugué et il n'y a que le premier qui doive être considéré séparément. En procédant de la même manière que dans le cas *a)* et en maintenant la signification des lettres r, α_k et $F(\varphi, k)$, on obtient

$$(6)\quad \varrho = C_1 \left\{ \begin{matrix} \cos(r\varphi - \frac{1}{2}\beta) \\ \\ \sin(r\varphi - \frac{1}{2}\beta) \end{matrix} \right. + \sum_{2}^{\frac{1}{2}(n+1)} F(\varphi, k).$$

Dans le cas le plus simple, $n = 1$, $r = 1$, la courbe se réduit à un point; pour $n = 1$, $r \gtrless 1$ elle devient une épicycloïde.

II. *Similitude directe.* Si dans ce cas $\varrho = f(\varphi)$ est l'équation de la courbe cherchée, celle de la développée $n^{\text{ième}}$ de cette courbe sera

$$\varrho_n = mf(\mu + \varphi_n).$$

Or, comme

$$\varrho_n = \frac{d^n \varrho}{d\varphi^n} \text{ pour } \varphi_n = \varphi + n\frac{\pi}{2},$$

on est conduit à l'équation différentielle de l'ordre n

$$(1) \quad f^n(\varphi) = mf(\mu + n\frac{\pi}{2} + \varphi).$$

La résultante de (1) étant une équation transcendante

$$\lambda^n = m.e^{\lambda(\mu + n\frac{\pi}{2})},$$

elle ne pourra en général être résolue que par approximation. Cependant, cela n'arrive pas lorsque $\mu = -n\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsqu'on admet que les rayons vecteurs proportionnels ϱ et ϱ_n appartiennent à des points homologues des deux courbes. En effet, dans cette hypothèse la résolvante prend la forme

$$\lambda^n = m,$$

et l'intégrale générale de (1) devient

$$(2) \quad \varrho = \sum_1^n \mathrm{A_k} e^{\lambda_k \varphi},$$

où pour une valeur positive de m

$$r = \sqrt[n]{m},\ \alpha_k = \frac{2(k-1)}{n}\pi,\ \lambda_k = re^{\alpha_k i}$$

et pour une valeur négative de m

$$r = \sqrt[n]{[m]},\ \alpha_k = \frac{2k-1}{n}\pi,\ \lambda_k = re^{\alpha_k i}.$$

Pour débarrasser l'intégrale (2) des imaginaires, il faudra distinguer entre les valeurs paires et impaires de n. Moyennant le procédé connu que nous venons d'appliquer sous I) et en désignant, pour plus de brièveté, l'expression

$$\mathrm{C_k} e^{r\varphi \cos\alpha_k} \cos(r\varphi \sin \alpha_k) + \mathrm{D_k} e^{r\varphi \cos \alpha_k} \sin(r\varphi \sin\alpha_k)$$

par $F(\varphi,k)$, on trouvera

1) pour $m>0$ et n pair

$$\varrho = C_1 e^{r\varphi} + C_{\frac{1}{2}n+1}\, e^{-r\varphi} + \sum_{2}^{\frac{1}{2}n} F(\varphi,k);$$

2) pour $m>0$ et n impair

$$\varrho = C_1 e^{r\varphi} + \sum_{2}^{\frac{1}{2}(n+1)} F(\varphi,k);$$

3) pour $m<0$, n pair

$$\varrho = \sum_{1}^{\frac{1}{2}n} F(\varphi,k);$$

4) pour $m<0$, n impair

$$\varrho = C_{\frac{1}{2}(n+1)}\, e^{-r\varphi} + \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} F(\varphi,k).$$

Parmi les courbes représentées par ces quatre équations se trouvent comme cas particuliers le point, la spirale logarithmique, l'épicycloïde, etc.

40. Si l'on demande une courbe dont la développée $n^{\text{ième}}$ soit une courbe semblable, en faisant abstraction du centre de similitude, quelques légères modifications dans la méthode employée au numéro précédent, suffiront pour résoudre ce problème plus général.

Une première modification consiste à rapporter les deux courbes, savoir la courbe cherchée et sa développée $n^{\text{ième}}$, à deux systèmes différents de coordonnées tangentielles polaires dont les axes sont parallèles.

Soit alors, par exemple, dans le cas de la similitude inverse $\varrho = f(\varphi)$ l'équation de la courbe cherchée, rapportée au premier système de coordonnées et

$$\varrho^*{}_n = mf(\mu - \varphi_n)$$

celle de sa développée $n^{\text{ième}}$ rapportée au second système de coordonnées. L'équation de la courbe cherchée, transformée dans le nouveau système, sera

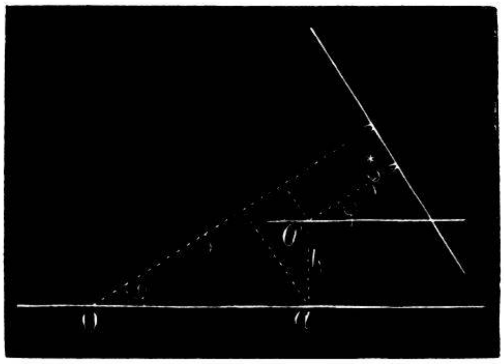

Fig. 15.

$$\varrho^* = f(\varphi) - a\cos\varphi - b\sin\varphi,$$

où a et b signifient les coordonnées rectangulaires de l'origine du second système de coordonnées par rapport au premier.

Or, comme les deux courbes sont maintenant rapportées au même système de coordonnées, en des points homologues on doit avoir (Cf n° 35)

$$\varrho^*_n = \frac{d^n \varrho^*}{d\varphi^n} \text{ et } \varphi_n = \varphi + n\frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$(1)\ mf\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = f^n(\varphi) - a\cos\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) - b\sin\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right).$$

En différentiant cette équation deux fois

$$(2)\ mf''\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = f^{n+2}(\varphi) + a\cos\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) + b\sin\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right)$$

et en ajoutant (1) et (2), il vient

$$(3)\ m\left[f\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + f''\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] = f^n(\varphi) + f^{n+2}(\varphi).$$

Si l'on différentie (3) encore n fois

$$m\varepsilon^n\left[f^n\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + f^{n+2}\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] = f^{2n}(\varphi) + f^{2n+2}(\varphi)$$

et que l'on remplace φ par $\left(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ on obtient moyennant (1) et (2) l'équation différentielle linéaire de l'ordre $(2n+2)$

$$(4) \quad m^2\varepsilon^n[f(\varphi)+f''(\varphi)]=f^{2n+2}(\varphi)+f^{2n}(\varphi).$$

La résolvante de cette équation étant

$$(5) \quad (\lambda^2+1)\ (\lambda^{2n}-m^2\varepsilon^n)=0$$

on voit que l'intégration n'offre aucune difficulté. L'intégrale générale contiendra $(2n+2)$ constantes, dont $(n+2)$ peuvent être déterminées à l'aide des équations (1) et (3).

Exemple. Dans le cas le plus simple

$$m=1\,,\ n=1\,,\ \mu=0\,,$$

où l'on exige que la développée première soit égale à la courbe cherchée, les équations (1), (3), (4), (5) prennent la forme

$$(1^a) \quad f(-\frac{\pi}{2}-\varphi)=f'(\varphi)+a\sin\varphi-b\cos\varphi,$$

$$(3^a) \quad f'''(\varphi)+f'(\varphi)-f''(-\frac{\pi}{2}-\varphi)-f(-\frac{\pi}{2}-\varphi)=0,$$

$$(4^a) \quad f^{\mathrm{IV}}(\varphi)+2f''(\varphi)+f(\varphi)=0,$$

$$(5^a) \qquad (\lambda^2+1)^2=0.$$

La résolvante (5^a) possède les racines doubles

$$\lambda=+i \ \text{ et } \ \lambda=-i.$$

Par conséquent l'intégrale générale de (4^a) sera

$$\varrho=f(\varphi)=(\mathrm{A}+\mathrm{B}\varphi)\cos\varphi+(\mathrm{C}+\mathrm{D}\varphi)\sin\varphi.$$

En substituant cette valeur de $f(\varphi)$ dans l'équation (3^a) on trouve $\mathrm{B}=0$ et (1^a) donne encore

$$\mathrm{D}=-a,\ \mathrm{C}=\frac{1}{2}(b-\frac{1}{2}a\pi),$$

en sorte que l'équation de la courbe cherchée devient

$$\varrho=\mathrm{A}\cos\varphi+\left[\frac{1}{2}(b-\frac{1}{2}a\pi)-a\varphi\right]\sin\varphi$$