Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 15 (1877-1878)

Heft: 80

Artikel: Étude élémentaire des courbes planes au moyen des coordonnées tangentielles

Autor: Amstein, H.

Kapitel: A: Coordonnées tangentielles rectilignes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-287517

coordonnées homogènes ou trimétriques. Cependant, pour satisfaire autant que possible aux lois de symétrie, il est, dans les formules suivantes, largement tenu compte de cette sorte de symétrie qui résulte de ce que les coordonnées d'un point ou d'une droite sont exprimées en fonction d'une troisième variable indépendante.

A. Coordonnées tangentielles rectilignes.

1. On suppose pour plus de simplicité des coordonnées rectangulaires. L'équation d'une droite déterminée par ses segments a et b sur les axes, est

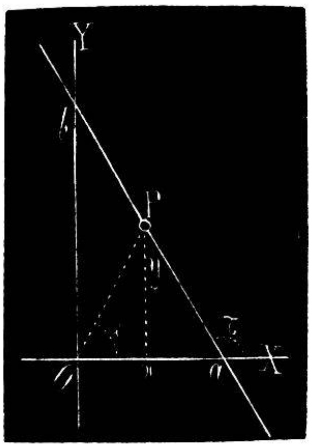

Fig. 1.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Si l'on pose

$$-\frac{1}{a} = u, \quad -\frac{1}{b} = v,$$

cette équation devient

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Les quantités a et b, par conséquent aussi u et v, déterminent complètement la droite, et c'est pour cela qu'on a appelé u et v les *coordonnées linéaires* ou, pour une raison qui trouve son explication dans la théorie des courbes, les *coordonnées tangentielles* de la droite. Les coordonnées tangentielles d'une droite sont donc les valeurs réciproques prises avec le signe contraire des segments faits par la droite sur les axes.

L'angle τ que fait la droite avec l'axe des X est donné par

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{u}{v}.$$

Exemples de droites particulières. — 1) La droite $u = a$, $v = a$ fait l'angle $-45°$ avec l'axe des X et ses segments sur les deux axes sont $-\frac{1}{a}$.

2) La droite $u = a$, $v = -a$ fait l'angle $+45°$ avec l'axe des X et ses segments sur les axes sont $-\frac{1}{a}$ et $+\frac{1}{a}$.

3) La droite $u = 0$, $v = a$ est parallèle à l'axe des X à la distance $-\frac{1}{a}$ de cet axe.

4) La droite $u = 0$, $v = \infty$ se confond avec l'axe des X.

5) La droite $u = b$, $v = 0$ est parallèle à l'axe des Y à la distance $-\frac{1}{b}$ de celui-ci.

6) La droite $u = \infty$, $v = 0$ est identique avec l'axe des Y.

7) $u = 0$, $v = 0$ signifie la droite à l'infini.

8) La droite $u = \infty$, $v = \infty$ passe par l'origine, et sa direction est donnée par $\operatorname{tg} \tau = \lim\left(-\frac{u}{v}\right)$ pour $\lim u = \infty$ et $\lim v = \infty$.

2. L'équation

$$ux + vy + 1 = 0$$

permet une double interprétation. Interprétée en coordonnées ponctuelles, elle représente la droite dont les coordonnées tangentielles sont u et v. Si, au contraire, on y regarde x et y comme constants, u et v comme variables, elle fournit une infinité de droites, et comme les valeurs constantes de x et y satisfont pour chaque couple de valeurs de u et v à l'équation (envisagée de nouveau comme équation d'une droite) toutes ces droites passent par le point dont les coordonnées ponctuelles sont x et y.

L'équation $ux + vy + 1 = 0$, interprétée en coordonnées tangentielles, représente par conséquent le point (x, y) et l'on voit sans difficulté qu'en général une équation du premier degré en u et v, telle que

$$\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C} = 0$$

représente le point dont les coordonnées ponctuelles sont

$$x = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}, \quad y = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}.$$

La forme particulière $ux + vy + 1 = 0$ de l'équation du premier degré a été appelée par *Hesse* la *forme normale* de l'équation du point (x, y).

L'angle α (fig. 1) que fait le rayon vecteur du point (x, y) avec l'axe des X, est donné par

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Exemples de points particuliers. — 1) Le point $u = a$ se trouve sur l'axe des X à la distance $-\dfrac{1}{a}$ de l'origine.

2) Le point $v = b$ est le point sur l'axe des Y dont l'ordonnée est $-\dfrac{1}{b}$.

3) L'équation $\mathrm{A}u + \mathrm{B}v = 0$ signifie le point qui se trouve à l'infini dans la direction déterminée par $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$.

4) $v = 0$ est le point à l'infini dans la direction de l'axe des Y.

5) Le point $u = 0$ se trouve à l'infini dans la direction de l'axe des X.

6) L'équation $\mathrm{C} = 0$, où $\mathrm{C} \gtrless 0$, qui paraît absurde, signifie l'origine. En effet, si dans l'équation $\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C} = 0$,

$C \gtrless 0$, A et B tendent vers zéro, les coordonnées du point représenté $x = \frac{A}{C}$, $y = \frac{B}{C}$ tendent vers zéro.

3. *Point d'intersection de deux droites données* (u_1, v_1) et (u_2, v_2). L'équation du point demandé sera de la forme

$$ux + vy + 1 = 0;$$

elle doit être satisfaite par les coordonnées des droites données, en sorte que

$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0,$$
$$u_2 x + v_2 y + 1 = 0.$$

En éliminant de ces trois équations les inconnues x et y, on obtient l'équation cherchée

$$u - u_1 = \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}(v - v_1).$$

Les coordonnées ponctuelles de ce point sont

$$x = -\frac{v_2 - v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \quad y = \frac{u_2 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

et l'angle α que fait son rayon vecteur avec l'axe des X est déterminé par

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}.$$

4. *Droite qui joint deux points donnés* (x_1, y_1) et (x_2, y_2). Les coordonnées u, v de la droite cherchée satisfont aux équations de condition

$$ux_1 + vy_1 + 1 = 0,$$
$$ux_2 + vy_2 + 1 = 0.$$

En résolvant ces équations par rapport à u et v, on trouve pour la droite demandée

$$u = \frac{y_1 - y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad v = -\frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

5. *Angle de deux droites données* (u_1, v_1) et (u_2, v_2). L'angle cherché γ est égal à $\pm(\tau_2 - \tau_1)$; donc

$$\operatorname{tg}\gamma = \pm \operatorname{tg}(\tau_2 - \tau_1) = \pm \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{u_1 u_2 + v_1 v_2}.$$

Condition de parallélisme des deux droites (u_1, v_1) et (u_2, v_2) :

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0.$$

Condition de perpendicularité des deux droites (u_1, v_1) et (u_2, v_2) :

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0.$$

6. *Distance* δ *du point* (ξ, η) *à la droite* (u, v). L'équation en coordonnées ponctuelles de la droite (u, v) étant

$$ux + vy + 1 = 0,$$

il s'ensuit qu'on trouve la distance demandée d'après la règle connue de la géométrie analytique. Cette distance

$$\delta = \frac{u\xi + v\eta + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

est considérée comme positive ou comme négative, suivant que le point donné (ξ, η) et l'origine se trouvent du même côté de la droite donnée ou de côtés différents.

La distance δ de l'origine à la droite (u, v) est

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Observation. On voit sans difficulté que, si le système de coordonnées adopté avait été oblique (avec l'angle des coordonnées ω), il suffirait de remplacer dans les formules précédentes $\operatorname{tg}\tau$ par $\dfrac{\sin\tau}{\sin(\omega - \tau)}$, $\operatorname{tg}\alpha$ par $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$, $\operatorname{tg}\gamma$ par $\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\omega - \gamma)}$. Les équations des points et des droites ne seraient pas changées, mais il faudrait substituer à la formule pour δ, la suivante :

$$\delta = \frac{u\xi + v\eta + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega}} \sin\omega.$$

7. *Transformation de coordonnées.* — 1) *Passage d'un système de coordonnées à un système parallèle.*

Soit ω l'angle des coordonnées, m et n les coordonnées ponctuelles et par conséquent $um + vn + 1 = 0$ l'équation de la nouvelle origine $0'$. Si u et v sont les coordonnées tangentielles d'une droite quelconque par rapport au système de coordonnées X, Y, u' et v' les coordonnées de la même droite par rapport au nouveau système X′, Y′ on a,

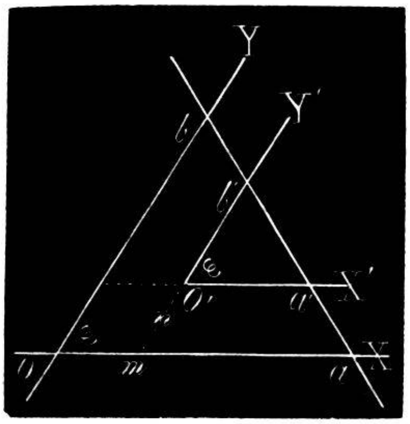

Fig. 2.

en posant $u = -\frac{1}{a}$, $v = -\frac{1}{b}$, $u' = -\frac{1}{a'}$, $v' = -\frac{1}{b'}$, (fig. 2) les relations

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a-m}{b'+n} = \frac{a'}{b'}.$$

De ces deux relations, il suit

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{u'}{-mu' - nv' + 1} \\ v &= \frac{v'}{-mu' - nv' + 1} \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} u' &= \frac{u}{mu + nv + 1} \\ v' &= \frac{v}{mu + nv + 1}. \end{aligned}\right.$$

2) *Passage d'un système à un autre de même origine.*

Soit ω l'angle des coordonnées du système donné X, Y, et soient α et β les angles que font les nouveaux axes X′, Y′ avec l'axe des X, en sorte que $\beta - \alpha = \omega'$ est le

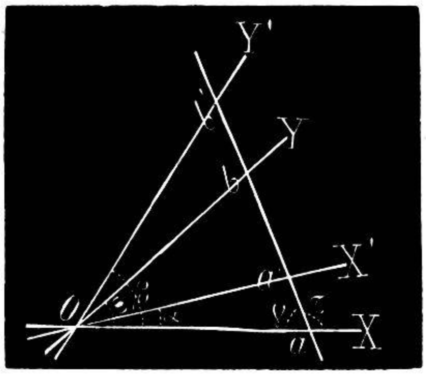

Fig. 3.

nouvel angle des coordonnées. Si, pour plus de brièveté, on introduit encore l'angle auxiliaire γ, c'est-à-dire l'angle supplémentaire de celui que fait une droite (u, v) quelconque avec l'axe des X, la figure 3 donne

$$\frac{a}{a'} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma},$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\omega+\gamma)} = \frac{\sin\beta + \cos\beta \operatorname{tg}\gamma}{\sin\omega + \cos\omega \operatorname{tg}\gamma}$$

Mais comme de

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\omega+\gamma)} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sin\omega + \cos\omega \operatorname{tg}\gamma},$$

l'on déduit

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{b\sin\omega}{a - b\cos\omega},$$

on a aussi

$$\frac{a}{a'} = \frac{a\sin\alpha + b\sin(\omega-\alpha)}{b\sin\omega}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{a\sin\beta + b\sin(\omega-\beta)}{a\sin\omega}.$$

De ces deux équations on tire immédiatement

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{v\sin\alpha + u\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega} \\ v' &= \frac{v\sin\beta + u\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}, \end{aligned}\right\}$$

et en résolvant par rapport à u et v :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{u'\sin\beta - v'\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}, \\ v &= \frac{v'\sin(\omega-\alpha) - u'\sin(\omega-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}. \end{aligned}\right\}$$

Remarque. S'il s'agissait de passer d'un système de coordonnées à un autre système d'origine et de directions d'axes différentes, il faudrait combiner les deux transformations qui viennent d'être indiquées.

ÉTUDE DES COURBES PLANES

8. Lorsqu'il existe entre u et v une relation telle que

$$\mathrm{F}(u, v) = 0 \quad \text{ou} \quad u = f(v),$$

chaque couple de valeurs de u et de v détermine une droite $ux + vy + 1 = 0$ et l'ensemble de ces droites enveloppe évidemment une courbe de sorte que $\mathrm{F}(u, v) = 0$ ou $u = f(v)$ peut être considérée comme l'équation de cette courbe en coordonnées tangentielles. Trouver l'équation de cette courbe en coordonnées ponctuelles, revient à trouver l'enveloppe des droites $ux + vy + 1 = 0$ sous la condition $\mathrm{F}(u, v) = 0$. Si, au contraire, les coordonnées x et y sont liées entre elles par une équation telle que

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad y = \varphi(x)$$

chaque couple de valeurs de x et de y détermine un point $ux + vy + 1 = 0$, et l'ensemble de ces points forme un lieu géométrique dont l'équation est évidemment $\Phi(x, y) = 0$ ou $y = \varphi(x)$. Trouver l'équation de ce lieu géométrique en coordonnées tangentielles, c'est trouver le lieu géométrique des points $ux + vy + 1 = 0$ sous la condition $\Phi(x, y) = 0$.

L'équation $ux + vy + 1 = 0$, comme on vient de voir, représente indifféremment un point ou une tangente de la courbe, suivant que son équation est donnée en coordonnées ponctuelles ou en coordonnées tangentielles.

9. *Problème de la tangente et de la transformation des coordonnées ponctuelles en coordonnées tangentielles.*

Supposons qu'on donne la courbe sous la forme symétrique

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

où t signifie une troisième variable indépendante, et désignons par

$$x' = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \quad y' = \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

les dérivées de x et de y par rapport à la variable t. La tangente en un point (x, y) d'une courbe, étant la droite qui joint ce point au point infiniment voisin, ses coordonnées (u, v) satisfont aux deux équations

$$\begin{aligned} ux + vy + 1 &= 0, \\ ux' + vy' \quad &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(1) \quad \begin{cases} u = -\dfrac{y'}{xy' - yx'}, \\ v = \quad \dfrac{x'}{xy' - yx'}. \end{cases}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation

$$u\xi + v\eta + 1 = 0,$$

où ξ et η désignent les coordonnées courantes, on obtient l'équation connue de la tangente

$$\eta - y = \frac{y'}{x'}(\xi - x).$$

La direction de la tangente est donnée par

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{u}{v} = \frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Les formules (1) qu'on modifiera facilement, si la courbe est donnée sous une autre forme, résolvent le problème de la transformation des coordonnées ponctuelles en coordonnées tangentielles. En effet, elles expriment u et v en fonction de t et dans la plupart des cas c'est sous cette forme que l'étude d'une courbe se fait le plus facilement. Si l'élimination de la variable t est possible, on obtient l'équation de la courbe sous une des formes ordinaires $F(u, v) = 0$ ou $u = f(v)$.

10. *Problème du point de contact et de la transformation des coordonnées tangentielles en coordonnées ponctuelles.*

Soit
$$u = \psi(t), \; v = \varphi(t),$$
la courbe donnée et u' et v' les dérivées de u et de v par rapport à t.

Le point de contact d'une tangente donnée n'est autre chose que le point d'intersection de cette tangente avec la tangente infiniment voisine; par conséquent ses coordonnées x, y doivent satisfaire aux deux équations

$$\begin{aligned} ux + vy + 1 &= 0, \\ u'x + v'y \quad &= 0, \end{aligned}$$

qui donnent

$$(2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{v'}{vu' - uv'}, \\[2ex] y = -\dfrac{u'}{vu' - uv'}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation

$$Ux + Vy + 1 = 0,$$

où U et V signifient les coordonnées courantes, on obtient pour l'équation du point de contact

$$U - u = \frac{u'}{v'}(V - v).$$

Le point de contact se construit avec la même facilité que la tangente en coordonnées cartésiennes, car on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{u'}{v'} = -\frac{du}{dv} = -\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Cette construction n'est en défaut que lorsque la tangente passe par l'origine, c'est-à-dire dans le cas où $u = \infty$ et $v = \infty$.

Les équations (2) permettent de passer de l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles à son équation en coordonnées ponctuelles. Il suffit d'en éliminer la variable t pour arriver à une des formes $F(x, y) = 0$ ou $y = f(x)$. (Cf. Salmon : Treatise on the higher plane curves.)

11. *Asymptotes.* Si l'on considère les asymptotes d'une courbe comme des tangentes dont le point de contact se trouve à l'infini, elles sont comprises dans les tangentes données par les formules (1). En effet, si

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

est la courbe donnée, on cherchera les valeurs de t, pour lesquelles x ou y ou les deux deviennent infinis, et on obtiendra les segments que déterminent les tangentes correspondantes sur les axes, en introduisant tour-à-tour les valeurs trouvées dans les équations

$$-\frac{1}{u} = \frac{xy' - yx'}{y'}, \quad -\frac{1}{v} = -\frac{xy' - yx'}{x'}.$$

On aura une asymptote parallèle à un axe coordonné ou une asymptote oblique, suivant que par ces substitutions l'une des expressions $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$ ou les deux prendront des valeurs finies.

Exemple. — *Le folium de Descartes.* L'équation de cette courbe

$$x^3 + y^3 - axy = 0$$

est identiquement satisfaite, si l'on pose

$$x = a\frac{t}{1+t^3}, \quad y = a\frac{t^2}{1+t^3}.$$

Comme x et y deviennent infiniment grands pour $t = -1$ et que la substitution de cette valeur dans

$$-\frac{1}{u} = a\frac{t}{2-t^3}, \quad -\frac{1}{v} = -a\frac{t^2}{1-2t^3}$$

donne $$-\frac{1}{u} = -\frac{a}{3}, \quad -\frac{1}{v} = -\frac{a}{3},$$ la tangente

$$x + y + \frac{a}{3} = 0$$

est une asymptote de la courbe.

Lorsque la courbe est donnée en coordonnées tangentielles

$$v = \varphi(t), \quad u = \psi(t),$$

les formules (2) montrent immédiatement que pour les asymptotes on doit avoir

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}.$$

Cette condition est nécessaire, mais non suffisante, car elle exprime seulement que la tangente et le rayon vecteur de son point de contact sont parallèles. Si cette condition ne peut être satisfaite que par $u = v = 0$, la tangente correspondante se trouve tout entière à l'infini et par suite elle n'est pas une asymptote proprement dite. Si, au contraire, une valeur de t, tirée de cette équation de condition, rend $u = \infty$ et $v = \infty$, on a une tangente passant par l'origine.

Dans ce cas, il s'agit de vérifier si le point de contact, donné par x et y, se trouve ou ne se trouve pas à l'infini. Dans tous les autres cas, une valeur t_0 de t, qui satisfait à l'équation $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$, fournit une asymptote $v = \varphi(t_0)$, $u = \psi(t_0)$.

Exemple. Choisissons encore le *folium de Descartes,* qui cette fois sera donné par

$$u = -\frac{1}{a}\frac{2 - t^3}{t}, \quad v = \frac{1}{a}\frac{1 - 2t^3}{t^2}.$$

De l'équation $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$ on tire $t = -1$. Par conséquent $u = \frac{3}{a}$, $v = \frac{3}{a}$ est une asymptote de la courbe.

12. *Equation du point de la tangente* (u, v), *dont le rayon vecteur fait un angle droit avec le rayon vecteur du point de contact. Courbe correspondante à la développée.* Le point en question joue par rapport au point de contact d'une tangente le même rôle qu'en coordonnées ponctuelles la normale par rapport à la tangente. Son équation est, en désignant par U et V les coordonnées courantes,

$$U - u = -\frac{v'}{u'}(V - v).$$

De même qu'on traite en coordonnées cartésiennes la question de la développée, on peut, en coordonnées tangentielles, se poser le problème : Trouver le lieu géométrique des points situés sur les tangentes d'une courbe donnée, tels que leurs rayons vecteurs fassent avec les rayons vecteurs des points de contact un angle droit. En d'autres termes : Une courbe étant donnée, on demande une autre courbe telle que si un observateur se place à l'origine et regarde simultanément le point de contact d'une tangente de la courbe donnée et sur cette tangente le point correspondant de la courbe cherchée, l'angle des deux rayons visuels soit toujours un angle droit. Ou encore : Un triangle rectangle à côtés variables dont le sommet de l'angle droit est placé à l'origine se mouvant de manière que le second sommet demeure sur une courbe donnée et qu'en ce point l'hypoténuse soit tangente à la courbe, on demande le lieu géométrique du troisième sommet.

Soit

$$v = \varphi(t),\ u = \psi(t)$$

la courbe donnée. Le point de la courbe cherchée qui correspond au point de contact de la tangente (u, v) de la courbe donnée, a pour équation

$$\mathrm{U} - u = -\frac{v'}{u'}(\mathrm{V} - v).$$

Les coordonnées U, V de la tangente en ce point doivent satisfaire à cette équation et à celle qu'on obtient en la différentiant par rapport à t. On a donc pour déterminer U et V les deux équations

$$u'(\mathrm{U} - u) + v'(\mathrm{V} - v) = 0$$
$$u''(\mathrm{U} - u) + v''(\mathrm{V} - v) = u'^2 + v'^2,$$

d'où

$$\begin{cases} \mathrm{V} - v = \dfrac{u'^2 + v'^2}{u'v'' - v'u''} \cdot u', \\ \mathrm{U} - u = -\dfrac{u'^2 + v'^2}{u'v'' - v'u''} \cdot v'. \end{cases}$$

En éliminant la variable t de ces deux équations on obtient l'équation de la courbe cherchée sous la forme $\mathrm{F}(u, v) = 0$.

Exemple 1. La parabole. L'équation en coordonnées tangentielles de la parabole $y^2 = 2px$ est

$$v^2 = \frac{2}{p}\,u.$$

Elle est identiquement satisfaite, si l'on pose

$$v = t,\ u = \frac{p}{2}\,t^2.$$

En appliquant les formules ci-dessus, on trouve pour les coordonnées U, V d'une tangente quelconque de la courbe cherchée

$$\begin{cases} \mathrm{V} = -\,p^2 t^3, \\ \mathrm{U} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{3}{2}\,pt^2, \end{cases}$$

d'où, en éliminant t,

$$\left(\mathrm{U} - \frac{1}{p}\right)^3 = \frac{27}{8}\,\frac{\mathrm{V}^2}{p}.$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée. En passant aux coordonnées ponctuelles, il vient

$$xy^2 + \frac{1}{2}\,x^3 + py^2 = 0.$$

(Courbe en affinité avec la cissoïde.) (Pl. 24, fig. 1.)

Observation. Il est clair qu'il aurait suffi de changer dans l'équation de la développée de la parabole x en U, y en V et p en $\frac{1}{p}$ pour arriver à l'équation demandée.

Exemple 2. L'ellipse. L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation en coordonnées tangentielles

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1.$$

Une tangente quelconque de cette ellipse est donnée par

$$u = \frac{\sin t}{a}, \ v = \frac{\cos t}{b}.$$

La tangente correspondante de la courbe demandée se trouve par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} V = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 b} \cos^3 t \\ U = -\dfrac{a^2 - b^2}{a b^2} \sin^3 t, \end{cases}$$

d'où, par l'élimination du paramètre t, il résulte comme équation de la courbe cherchée

$$(2) \quad (aV)^{\frac{2}{3}} + (bU)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Traduites en coordonnées cartésiennes, les équations (1) et (2) deviennent

$$(1^a) \quad \begin{cases} x = \dfrac{a b^2}{a^2 - b^2} \cdot \dfrac{1}{\sin t} \\ y = -\dfrac{a^2 b}{a^2 - b^2} \cdot \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$$

et
$$(2^a) \quad a^2 x^2 + b^2 y^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^2 x^2 y^2.$$

(Pl. 24, fig. 2.)

13. *Normale et développée.* Soient u et v les coordonnées d'une tangente quelconque de la courbe donnée, U et V celles de la normale correspondante. On a pour déterminer U et V les deux équations

$$Uu + Vv = 0 \quad \text{ou} \quad u(U - u) + v(V - v) = -(u^2 + v^2),$$
$$v'(U - u) - u'(V - v) = 0$$

exprimant que la normale est perpendiculaire à la tangente et qu'elle passe par le point de contact.

De là

$$\begin{cases} U = v.\dfrac{uv' - vu'}{uu' + vv'}, \\ V = -u.\dfrac{uv' - vu'}{uu' + vv'}. \end{cases}$$

Or, si u et v sont exprimés en fonction d'une troisième variable t, U et V le seront aussi. Par conséquent ces équations résolvent le problème de la développée. Il suffit d'en éliminer t pour avoir l'équation de la développée sous la forme $F(u,v) = 0$.

Exemple. L'ellipse. L'ellipse étant donnée comme précédemment par

$$u = \frac{\sin t}{a}, \quad v = \frac{\cos t}{b},$$

on trouve en appliquant les formules ci-dessus

$$U = -\frac{a}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\sin t}, \quad V = \frac{b}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\cos t},$$

d'où il résulte pour l'équation de la développée

$$(a^2 - b^2)^2 U^2 V^2 = a^2 V^2 + b^2 U^2.$$

14. *Classe d'une courbe algébrique.* Lorsqu'on combine avec l'équation d'un point $u = \alpha v + \beta$, l'équation en coordonnées tangentielles d'une courbe $F(u,v) = 0$, où F signifie une fonction entière de u et v du degré n, on obtient n couples de valeurs (réelles ou imaginaires) qui satisfont aux deux équations. Cela revient à dire que la courbe admet n tangentes (réelles ou imaginaires) émanant d'un point quelconque. Par conséquent, la classe d'une courbe est identique avec le degré de son équation en coordonnées tangentielles.

On peut encore remarquer qu'il sera toujours possible de disposer de l'une des constantes arbitraires α et β en sorte que la résolvante des équations $F(u, v) = 0$ et $u = \alpha v + \beta$ possède une racine double. Dans ce cas, le point $u = \alpha v + \beta$ est le point de contact de la tangente (u, v) correspondante. Le problème : Etant donné α, déterminer β de la manière indiquée, revient à trouver tous les points de la courbe qui sont situés sur une droite passant par l'origine. En déterminant les deux constantes α et β de manière à ce que la résolvante admette deux couples de racines égales, ce qui en général est toujours possible, le point ainsi obtenu sera un point double ou un point de rebroussement. On en conclut que les courbes de la classe n possèdent en général des points doubles et des points de rebroussement, tandis que les courbes de l'ordre n admettent des tangentes doubles et des tangentes stationnaires comme singularités habituelles. (Cf. Salmon : Higher pl. curves.)

Exemple. Cherchons les points doubles de la courbe

$$(u^2 + v^2)^2 - u^2 + v^2 = 0.$$

En éliminant de cette équation et de

$$\alpha u + \beta v + 1 = 0$$

la variable v, on obtient

$$u^4 + \frac{4\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} u^3 + \frac{6\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 + 2\beta^2 - \beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} u^2 + \frac{2\alpha(2 + \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} u + \\ + \frac{1 + \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = 0.$$

Comme la courbe est symétrique par rapport aux axes coordonnés, il est évident que ses points doubles seront symétriques par rapport aux axes. Par conséquent, si les points doubles existent, il doit être possible de donner à α, β, p

des valeurs telles que le premier membre de cette équation devienne identique avec

$$(u^2 - p^2)^2 = 0,$$

ce qui donne les quatre conditions

$$\frac{4\alpha}{\alpha^2+\beta^2} = 0, \quad \frac{6\alpha^2+\alpha^2\beta^2+2\beta^2-\beta^4}{(\alpha^2+\beta^2)^2} = -2p^2,$$

$$\frac{2\alpha(2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2} = 0, \quad \frac{1+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} = p^4,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 0, \ \beta = \pm\sqrt{8}, \ p = \pm\sqrt{\tfrac{3}{8}}.$$

Les deux points doubles de la courbe possèdent donc les coordonnées $\alpha = 0$, $\beta = \pm\sqrt{8}$; les tangentes principales en ces points sont données par

$$u = \pm\sqrt{\tfrac{3}{8}}, \ v = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

(Pl. 24, fig. 3.)

15. *Angle de contingence.* L'angle de contingence $d\tau$ en un point donné d'une courbe est l'angle que fait la tangente (u,v) en ce point avec la tangente consécutive. Comme (Cf. n° 9)

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{u}{v} \text{ ou } \tau = -\operatorname{arctg}\frac{u}{v},$$

l'angle de contingence est donné par

$$d\tau = -\frac{vdu - udv}{u^2+v^2}.$$

16. *Interprétation de la dérivée seconde.* Soit

$$u = f(v)$$

l'équation d'une courbe. On sait que (Cf. n° 10)

$$\operatorname{tg} \alpha = -f'(v),$$

où α désigne l'angle que fait le rayon vecteur du point de contact de la tangente (u,v) avec l'axe des X. De cette équation on tire

$$\alpha = -\operatorname{arctg} f'(v)$$

et par différentiation

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{f''(v)}{1+[f'(v)]^2}.$$

Par conséquent l'angle α croît ou décroît, suivant que $f''(v)$ est négatif ou positif.

17. *Concavité et convexité d'une courbe.* Soit v la variable indépendante à laquelle on convient de donner des accroissements positifs dv. Vue de l'origine, la courbe $u = f(v)$ sera convexe ou concave en un point dont la tangente possède les coordonnées u et v, suivant que pour ces valeurs u et v les quantités $d\tau$ et $f''(v)$ sont de même signe ou de signes contraires.

Cette règle est en défaut : 1° lorsque la tangente au point considéré passe par l'origine ou qu'elle est une asymptote, c'est-à-dire dans les cas où $d\tau$ s'annule ; 2° lorsque $f''(v) = 0$. Dans les deux cas, savoir $d\tau = 0$ et $f''(v) = 0$, le point considéré est un point singulier qui demande une étude spéciale.

18. *Contact des courbes.* Lorsque deux courbes

$$u = f(v) \quad \text{et} \quad u_1 = \varphi(v)$$

ont en commun une tangente (u,v) et son point de contact, on dit qu'elles possèdent en ce point un certain contact. Ce contact est évidemment d'autant plus intime que les tangentes des deux courbes qui suivent immédiatement la tangente commune, s'écartent moins l'une de l'autre. En effet, si trois courbes sont en contact et que la seconde courbe passe entre la première et la troisième, il est clair que le contact de cette courbe avec une des deux autres courbes sera plus intime que celui des deux autres courbes entre elles. Afin d'obtenir une définition plus précise du contact de deux courbes, il faut calculer leurs angles de contingence au point considéré.

Si par un accroissement positif h de la variable indépendante v la fonction u passe en $u + \Delta u = f(v+h)$, u_1 en $u_1 + \Delta u_1 = \varphi(v+h)$, les angles de contingence $\Delta\tau$ et $\Delta\tau_1$ deviennent (Cf. n° 15)

$$\Delta\tau = -\frac{v\Delta u - uh}{u^2+v^2}, \quad \Delta\tau_1 = -\frac{v\Delta u_1 - uh}{u^2+v^2},$$

et leur différence est

$$\Delta\tau_1 - \Delta\tau = -v.\frac{\Delta u_1 - \Delta u}{u^2+v^2},$$

d'où l'on tire

$$\mp\frac{\Delta\tau_1 - \Delta\tau}{k} = \Delta u_1 - \Delta u,$$

expression dans laquelle la projection sur l'axe des Y de la perpendiculaire, abaissée de l'origine sur la tangente considérée, est représentée par

$$\frac{v}{u^2+v^2} = \pm k.$$

Or, le développement de $(\Delta u_1 - \Delta u)$ suivant des puissances ascendantes de h commencera en général par un terme d'un ordre supérieur au premier. Divisant encore par h et posant

$$\mp\frac{\Delta\tau_1 - \Delta\tau}{hk} = \frac{\Delta u_1 - \Delta u}{h} = \mathrm{A}h^m + \mathrm{B}h^{m+n} + \ldots\ldots,$$

le plus petit des exposants, savoir m, sera appelé *l'ordre du contact des deux courbes.*

Cette définition est en défaut lorsque le point de contact de la tangente considérée se trouve sur l'axe des Y. Dans ce cas, il suffit de regarder u comme variable indépendante et de chercher le développement de $\frac{\Delta v_1 - \Delta v}{h}$ correspondant à un accroissement h de u.

En général, on aura soin de choisir la variable indépendante de façon que le développement de $(\Delta u_1 - \Delta u)$, ou de $(\Delta v_1 - \Delta v)$ commence par une puissance supérieure à la première. Alors la définition ne subit aucune exception.

Exemple 1. Les deux courbes

$$u-1=(v-1)^{\frac{4}{3}},$$

$$u_1-1=(v-1)^{\frac{5}{4}}$$

ont en commun la tangente $u=u_1=1$, $v=1$ et son point de contact $x=-1$, $y=0$. Pour trouver l'ordre de leur contact, posons $v=1+h$, d'où il suit

$$\Delta u = h^{\frac{4}{3}} + \ldots..$$

$$\Delta u_1 = h^{\frac{5}{4}} + \ldots..$$

$$\frac{\Delta u_1 - \Delta u}{h} = h^{\frac{1}{4}} - h^{\frac{1}{3}} \ldots..$$

L'ordre de contact est par conséquent $=\frac{1}{4}$.

Exemple 2. Les courbes

$$u-1=(v-1)^{\frac{3}{4}},$$

$$u_1-1=(v-1)^{\frac{4}{5}}$$

ont en commun la tangente $u=u_1=1$, $v=1$ et son point de contact. Ce point de contact $x=0$, $y=-1$ étant situé sur l'axe des Y, il convient de regarder u comme variable indépendante. Il va sans dire qu'on trouvera encore par là l'ordre de contact $= \frac{1}{4}$.

Exemple 3. Les courbes

$$u = v^{\frac{4}{3}}, \quad u_1 = v^{\frac{5}{4}}$$

se touchent à l'origine. Dans ce cas on a

$$\frac{\Delta u_1 - \Delta u}{h} = h^{\frac{1}{4}} - h^{\frac{1}{3}}.$$

Par conséquent l'ordre du contact des deux courbes à l'origine est encore $= \frac{1}{4}$.

Lorsque les deux fonctions

$$u = f(v) \text{ et } u_1 = \varphi(v)$$

permettent dans le voisinage des valeurs communes $v = v_0$, $u = u_1 = u_0$ le développement suivant le théorème de Taylor, en sorte que

$$u_0 + \Delta u = f(v_0) + f'(v_0) \cdot \frac{h}{1} + f''(v_0) \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$
$$+ f^n(v_0) \cdot \frac{h^n}{1.2\ldots n} + f^{n+1}(v_0) \cdot \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots\ldots$$

$$u_0 + \Delta u_1 = \varphi(v_0) + \varphi'(v_0) \cdot \frac{h}{1} + \varphi''(v_0) \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$
$$+ \varphi^n(v_0) \cdot \frac{h^n}{1.2\ldots n} + \varphi^{n+1}(v_0) \cdot \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots\ldots$$

la définition indiquée ci-dessus peut s'énoncer comme il suit: Les deux courbes $u = f(v)$ et $u_1 = \varphi(v)$ possèdent en une tangente commune (u_0, v_0), qui n'est pas une tangente singulière pour chacune d'elles, un contact de l'ordre n, lorsque pour $v = v_0$ les fonctions $f(v)$ et $\varphi(v)$, ainsi que leurs n premières dérivées, affectent les mêmes valeurs, tandis que les dérivées $(n+1)^{\text{ième}}$ $f^{n+1}(v)$ et $\varphi^{n+1}(v)$ prennent des valeurs différentes. En un tel endroit, les courbes ont $(n+1)$ tangentes consécutives communes et le contact se fait avec ou sans intersection suivant que n est un nombre pair ou impair.

Toutefois cette définition exige que le point de contact commun ne soit pas situé sur l'axe des Y.

Exemple. De quel ordre est le contact de la parabole

$$1 + 4u + 3u^2 = v^2 \quad \text{ou} \quad u = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{1 + 3v^2}$$

et de la circonférence

$$2u_1^2 + 2u_1 = v^2 \text{ ou } u_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2v^2}$$

au point $x = 1$, $y = 0$, c'est-à-dire au point de contact de la tangente commune $u = -1$, $v = 0$?

Pour $v = 0$, il vient $u = -1$,

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_0 = 0, \ \left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)_0 = -1, \ \left(\frac{d^3u}{dv^3}\right)_0 = 0, \ \left(\frac{d^4u}{dv^4}\right) = 9;$$

$$u_1 = -1, \left(\frac{du_1}{dv}\right)_0 = 0, \left(\frac{d^2u_1}{dv^2}\right)_0 = -1, \left(\frac{d^3u_1}{dv^3}\right)_0 = 0, \left(\frac{d^4u_1}{dv^4}\right)_0 = 6.$$

Les trois premières dérivées des fonctions u et u_1 étant égales, les dérivées quatrièmes différentes pour $v = 0$, il s'ensuit que l'ordre du contact des deux courbes $= 3$.

19. *Cercle osculateur, différentielle de l'arc, rayon de courbure.* Le cercle osculateur en une tangente donnée (u,v) d'une courbe a trois tangentes consécutives communes avec la courbe. Par là ce cercle est défini uniformément; car trois tangentes consécutives étant données, le sens de courbure l'est en même temps. Si donc α et β sont les coordonnées cartésiennes de son centre, ϱ son rayon, l'équation du cercle osculateur aura la forme

$$(\alpha U + \beta V + 1)^2 = \varrho^2 (U^2 + V^2),$$

et les constantes α, β et ϱ seront déterminées par les trois conditions

$$(\alpha u + \beta v + 1)^2 = \varrho^2 (u^2 + v^2),$$

$$(\alpha u + \beta v + 1)\left(\alpha \frac{du}{dv} + \beta\right) = \varrho^2 \left(u \frac{du}{dv} + v\right),$$

$$(\alpha u + \beta v + 1)\, \alpha \frac{d^2 u}{dv^2} + \left(\alpha \frac{du}{dv} + \beta\right)^2 = \varrho^2 \left[1 + \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + u \frac{d^2 u}{dv^2}\right]$$

qui indiquent que la circonférence admet la tangente (u,v) et les deux tangentes qui la suivent immédiatement. Au lieu de résoudre ces équations, ce qui n'offre aucune difficulté, on se borne à chercher l'expression du rayon de courbure par la voie suivante :

Supposons la courbe donnée sous la forme

$$v = \varphi(t), \quad u = \psi(t).$$

Alors on tire des formules

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{v'}{vu' - uv'} \\ y &= -\frac{u'}{vu' - uv'} \end{aligned} \right. \qquad \text{(Cf. n° 10.)}$$

par différentiation

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \cdot \frac{u'v'' - v'u''}{(vu' - uv')^2} \\ \frac{dy}{dt} &= -u \cdot \frac{u'v'' - v'u''}{(vu' - uv')^2} \end{aligned} \right.$$

d'où pour la différentielle de l'arc :

$$ds = \pm \frac{u'v'' - v'u''}{(vu' - uv')^2} \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Le signe du radical sera toujours choisi en sorte que ds soit positif.

Or, comme $\varrho = \dfrac{ds}{d\tau}$, il vient

$$\varrho = \frac{u'v'' - v'u''}{(vu' - uv')^3} \sqrt{(u^2 + v^2)^3}.$$

D'après ce qui vient d'être établi relativement au signe de ds, il est clair que ϱ aura toujours le signe de $d\tau$. En d'autres termes : Un observateur placé au point considéré de manière à avoir le point infiniment voisin (correspondant à un accroissement positif de la variable indépendante) devant lui, verra le centre de courbure à sa gauche ou à sa droite, suivant que ϱ sera positif ou négatif.

20. *Tangentes multiples.* Soit $f(\mathrm{U},\mathrm{V}) = 0$ l'équation de la courbe. D'après le théorème de Maclaurin on peut écrire

$$\begin{aligned} f(\mathrm{U},\mathrm{V}) &= \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1(\mathrm{V} - v) + \mathrm{A}_2(\mathrm{U} - u) + \\ &+ \frac{1}{2}[\mathrm{A}_{11}(\mathrm{V} - v)^2 + 2\mathrm{A}_{12}(\mathrm{V} - v)(\mathrm{U} - u) + \mathrm{A}_{22}(\mathrm{U} - u)^2] + \\ &+ \frac{1}{6}[\mathrm{A}_{111}(\mathrm{V} - v)^3 + 3\mathrm{A}_{112}(\mathrm{V} - v)^2(\mathrm{U} - u) + \\ &\qquad + 3\mathrm{A}_{122}(\mathrm{V} - v)(\mathrm{U} - u)^2 + \mathrm{A}_{222}(\mathrm{U} - u)^3] + \ldots\ldots, \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{A}_0 = f(u,v),\ \mathrm{A}_1 = \left(\frac{df}{d\mathrm{V}}\right)_{u,v},\ \mathrm{A}_2 = \left(\frac{df}{d\mathrm{U}}\right)_{u,v},$$

$$\mathrm{A}_{11} = \left(\frac{d^2f}{d\mathrm{V}^2}\right)_{u,v},\ \mathrm{A}_{12} = \left(\frac{d^2f}{d\mathrm{V}\,d\mathrm{U}}\right)_{u,v},\ \mathrm{A}_{22} = \left(\frac{d^2f}{d\mathrm{U}^2}\right)_{u,v} \text{ etc.}$$

Or, si $A_0 = 0$, la droite $V = v$, $U = u$ est une tangente de la courbe et son point de contact est donné par l'équation

$$A_1(V - v) + A_2(U - u) = 0.$$

Si on a simultanément $A_0 = 0$ et $A_1 = A_2 = 0$, la droite $V = v$, $U = u$ est une tangente double de la courbe. Ses deux points de contact s'obtiennent par l'équation

$$A_{11}(V - v)^2 + 2A_{12}(V - v)(U - u) + A_{22}(U - u)^2 = 0.$$

Pour que la courbe possède une tangente multiple, il faut, comme on vient de le voir, que $f(U,V)$ satisfasse aux conditions

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0;$$

la tangente est double, si les dérivées secondes de $f(U,V)$, savoir A_{11}, A_{12}, A_{22} ne sont pas toutes égales à zéro, et ses points de contact sont réels ou imaginaires, suivant que

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} \gtrless 0;$$

ils sont réels et ils coïncident, lorsque $A_{12}^2 = A_{11}A_{22}$. Dans ce dernier cas, la tangente considérée est une tangente singulière de la courbe. Pour reconnaître la singularité qui a lieu, il faudrait tenir compte des premiers termes d'un ordre supérieur au second, qui ne s'annulent pas. Comme cette étude est en général assez pénible, elle ne sera pas poussée plus loin, attendu que l'on va déterminer les singularités d'une courbe par un autre procédé qui, le plus souvent, présente moins de longueur.

On voit facilement quelles sont les conditions qui amènent une tangente triple, quadruple, etc.

Exemple 1. Pour la courbe

$$(u^2 + v^2)^2 - (u^2 - v^2) = 0$$

la droite à l'infini ($v = u = 0$) est une tangente double. Ses points de contact $u = \pm v$ se trouvent dans les directions $\alpha = \pm 45^\circ$. (Pl. 24, fig.3 .)

Exemple 2. La courbe

$$(v-1)^4 + (u-1)^4 - 2a(v-1)^3 + 2b(u-1)^2(v-1) = 0$$

possède une tangente triple $u = 1$, $v = 1$. Les trois points de contact sont déterminés par les équations

$$v = 1, \frac{u-1}{v-1} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

21. *Éléments singuliers.* Soit $u = u_0$, $v = v_0$ une tangente singulière, (x_0, y_0) son point de contact. Pour trouver la forme qu'affecte la courbe en ce point, on prend ce point pour origine, la tangente considérée pour axe des abscisses et la normale correspondante pour axe des ordonnées d'un nouveau système de coordonnées, et l'on développe u et v suivant les puissances ascendantes d'une troisième variable t. Ces développements permettent de reconnaître l'ordre dont u et v deviennent infiniment grands à la nouvelle origine. On aura par exemple

$$u = at^{-m} + a_1 t^{-m+m'} + \ldots\ldots,$$
$$v = bt^{-n} + b_1 t^{-n+n'} + \ldots\ldots,$$

où $a, a_1, b, b_1 \ldots$ sont des constantes différentes de zéro, m et n des nombres entiers, et puisque l'axe des abscisses est une tangente de la courbe évidemment $n > m$. Alors quatre cas peuvent se présenter :

1. Si m est un nombre *impair* et n un nombre *pair*, l'élément de courbe se trouve des deux côtés de la normale et en entier du même côté de la tangente. La singularité en question tient à ce que le contact de la tangente avec la courbe est d'un ordre différent du premier.

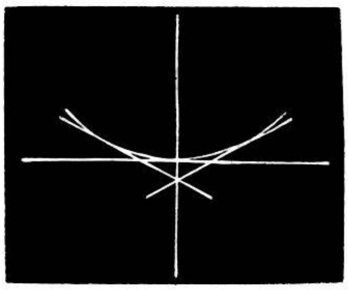

Fig. 4.

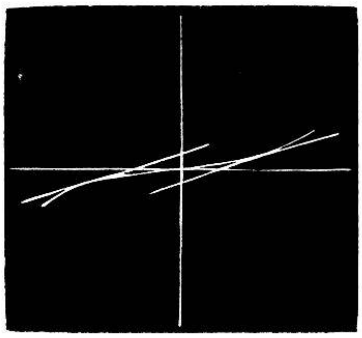

Fig. 5.

2. Soient m et n des nombres *impairs*. Alors l'élément de courbe possède des points des deux côtés de la normale et en même temps des deux côtés de la tangente. Le point considéré est un *point d'inflexion.*

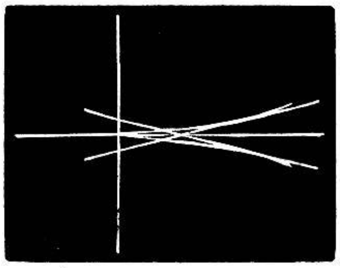

Fig. 6.

3. Lorsque m est un nombre *pair*, n un nombre *impair*, l'élément de courbe se trouve des deux côtés de la tangente et en entier du même côté de la normale et le point singulier est un *point de rebroussement de la première espèce.*

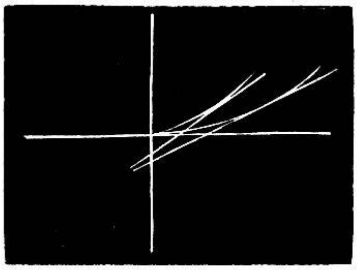

Fig. 7.

4. Si enfin m et n sont des nombres *pairs*, l'élément reste en entier non-seulement du même côté de la tangente, mais aussi du même côté de la normale. Le point critique est alors un *point de rebroussement de la seconde espèce.*

Exemples. L'origine est un point singulier pour les quatre courbes

$$1)\quad u = v^{\frac{1}{3}} \text{ ou } \begin{cases} u = t^{-1} \\ v = t^{-3} \end{cases}; \quad 2)\quad u = v^{\frac{2}{3}} \text{ ou } \begin{cases} u = t^{-2} \\ v = t^{-3} \end{cases},$$

$$3)\ v = u^2 + u^{\frac{3}{2}} \text{ ou } \begin{cases} u = t^{-2} \\ v = t^{-4} + t^{-3} \end{cases}, \ 4)\ u = v^{\frac{3}{4}} \text{ ou } \begin{cases} u = t^{-3} \\ v = t^{-4} \end{cases},$$

savoir un point d'inflexion pour la première, un point de rebroussement de la première espèce pour la seconde et un point de rebroussement de la seconde espèce pour la troisième. La singularité de la quatrième courbe consiste en ce qu'à l'origine la courbe forme un contact de l'ordre $\frac{1}{3}$ avec l'axe des X. (Pl. 24, fig. 4-7.)

Exemple 5. On propose de chercher les singularités de la courbe

$$(u+1)^3 = -(v+1)^2.$$

En posant

$$\begin{cases} u = -(1+t^2) \\ v = -\ 1+t^3 \end{cases}$$

cette équation est identiquement satisfaite. On reconnaît facilement que l'origine est un point de rebroussement de la première espèce et que la tangente $u = -1$, $v = -1$ avec le point de contact $x = 0$, $y = 1$ est une tangente singulière. Pour trouver la forme qu'affecte la courbe en ce dernier point, on transporte d'abord l'origine du système de coordonnées au point $x = 0$, $y = 1$, ce qui donne (Cf. n° 7, 1.)

$$u_1 = -\frac{1+t^2}{t^3}, \quad v_1 = \frac{-1+t^3}{t^3}$$

et l'on tourne ensuite les axes coordonnés d'un angle de $-45°$. (Cf. n° 7, 2.). Alors il vient

$$u_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(t^{-1}+1); \; v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2t^{-3} - t^{-1} + 1).$$

Comme dans ce cas $m = 1$, $n = 3$, le point considéré est un point d'inflexion. (Pl. 24, fig. 8.)

22. *Polaires réciproques.* L'équation de la polaire du point (ξ, η) par rapport à la circonférence $x^2 + y^2 = 1$ est

$$\xi x + \eta y = 1.$$

Si l'on pose $\xi = -u$. $\eta = -v$, on obtient l'équation

$$ux + vy + 1 = 0$$

qui a servi de point de départ au présent mémoire. Suivant qu'on l'interprète en coordonnées ponctuelles ou en coordonnées tangentielles, elle représente soit la polaire du point (ξ, η), soit le pôle de la droite $\xi x + \eta y = 1$. La polaire d'un point figure ainsi comme lieu géométrique des pôles de toutes les droites passant par ce point, et le pôle d'une droite est l'enveloppe de toutes les polaires des points de cette droite.

Lorsque le point (ξ, η) décrit une courbe $f(\xi, \eta) = 0$, la droite (u, v), polaire du point (ξ, η), enveloppe une seconde courbe $f(-u, -v) = 0$. Deux courbes, liées entre elles de la manière indiquée, ont été appelées des *polaires réciproques* par rapport à la circonférence $x^2 + y^2 = 1$. Les substitutions

$$\xi = -u, \quad \eta = -v$$

dans l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ et

$$u = -\xi, \quad v = -\eta$$

dans l'équation $f(u, v) = 0$ résolvent par conséquent le problème de trouver en coordonnées $\left.\begin{matrix}\text{tangentielles}\\ \text{ponctuelles}\end{matrix}\right\}$ la polaire réciproque d'une courbe donnée en coordonnées $\left.\begin{matrix}\text{ponctuelles}\\ \text{tangentielles}\end{matrix}\right\}$. En même temps ces considérations permettent de reconnaître la nature intime des coordonnées tangentielles.

Les relations $\xi = -u$, $\eta = -v$ entraînent les autres qui suivent :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dv}{du}, \quad \frac{\eta}{\xi} = \frac{v}{u}, \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{u^2 + v^2},$$

d'où il résulte que la tangente au point (ξ, η) de la courbe $f(\xi, \eta) = 0$ est perpendiculaire au rayon vecteur du point de contact de la tangente $(-u, -v)$ de la courbe $f(-u, -v) = 0$ et réciproquement, et que le rayon vecteur du point (ξ, η) est la valeur réciproque de la distance de l'origine à la tangente $(-u, -v)$. (Cf. n° 6.)

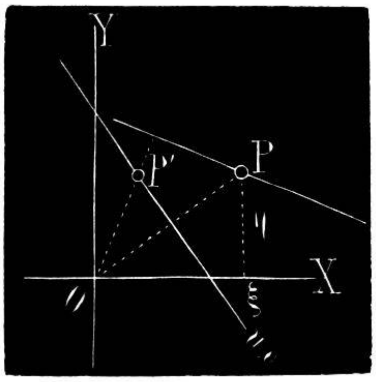

Fig. 8.

Le principe de la dualité que l'on rencontre ici, règne dans toute la géométrie. Aussi les géomètres se sont-ils servis de ce puissant instrument pour doubler en quelque sorte les résultats de leurs recherches. Il serait inutile d'insister plus longuement sur ce principe qu'on trouve développé dans tous les bons ouvrages sur la géométrie analytique, notamment dans les excellents ouvrages de M. Salmon. Qu'il suffise d'avoir montré le rapport qui existe entre les coordonnées ponctuelles et les coordonnées tangentielles.

23. *Podaire d'une courbe par rapport à l'origine.* Si d'un point donné A on abaisse des perpendiculaires sur toutes les tangentes d'une courbe donnée, le lieu géométrique des pieds de ces perpendiculaires est une courbe qu'on appelle *la podaire* de la courbe donnée par rapport au point A. On va chercher les relations qui existent entre les coordonnées tangentielles (u,v) d'une tangente quelconque d'une courbe et les coordonnées ponctuelles (x,y) du point correspondant de sa podaire par rapport à l'origine. Soit

$$ux + vy + 1 = 0$$

la tangente considérée,

$$uy - vx = 0$$

la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette tangente. De ces deux équations on tire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{u}{u^2 + v^2}, \\ y &= -\frac{v}{u^2 + v^2}, \end{aligned} \right.$$

et réciproquement :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{x}{x^2 + y^2}, \\ v &= -\frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules résolvent le problème de la podaire et le problème réciproque. En effet, si $f(u,v) = 0$ est la courbe donnée, $f\left(-\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 0$ est l'équation de sa podaire, et si $\varphi(x,y) = 0$ est l'équation de la courbe donnée, $\varphi\left(-\frac{u}{u^2+v^2}, -\frac{v}{u^2+v^2}\right) = 0$ sera celle de la courbe dont la proposée est la podaire.

Exemple 1. Si l'on fait les substitutions (2) dans l'équation de l'ellipse

$$a^2u^2 + b^2v^2 = 1,$$

il vient pour la podaire par rapport à l'origine

$$a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Exemple 2. Pour la parabole

$$p(u^2 + v^2) = 2u,$$

rapportée à son foyer, on obtient la podaire

$$p.\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2x}{x^2+y^2}, \text{ ou } x = -\frac{p}{2}.$$

Exemple 3. La lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

est la podaire de l'hyperbole équilatère

$$a^2(u^2 - v^2) = 1.$$

24. *Courbes équidistantes.* Lorsqu'on porte des deux côtés des points d'une courbe donnée sur les normales une longueur constante k, l'ensemble des points ainsi obtenus forme une nouvelle courbe (qui dans certains cas peut dégénérer en deux courbes différentes) qu'on appelle *courbe équidistante* de la courbe proposée. Elle peut aussi être considérée comme l'enveloppe d'un cercle de rayon k dont le centre se meut le long de la courbe donnée. De ces définitions il suit immédiatement que les tangentes en des points correspondants des deux courbes sont parallèles. C'est cette propriété qui servira à établir l'équation de la courbe équidistante en coordonnées tangentielles.

Soit $f(u,v)=0$ la courbe donnée. Si $\varrho=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$ est la distance de l'origine à une tangente quelconque (u,v) de cette courbe

$$(1)\qquad \varrho \pm k = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \pm k = \frac{1}{\sqrt{U^2+V^2}}$$

sera la distance de l'origine à la tangente correspondante (U,V) de la courbe équidistante. Comme ces tangentes sont parallèles, on a de plus

$$(2)\qquad \frac{U}{V}=\frac{u}{v}\,.$$

En résolvant les équations (1) et (2) par rapport à u et v on trouve

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{U}{1\mp k\sqrt{U^2+V^2}}\,,\\ v &= \frac{V}{1\mp k\sqrt{U^2+V^2}}\,. \end{aligned}\right.$$

En conséquence, pour obtenir l'équation de la courbe équidistante, il suffit de remplacer dans l'équation donnée u et v par les valeurs trouvées.

Exemple 1. Si l'on fait les substitutions indiquées dans l'équation de la circonférence de rayon r et du centre (α,β),

$$(\alpha u+\beta v+1)^2 = r^2(u^2+v^2)\,,$$

il vient

$$(\alpha U + \beta V + 1 \mp k \sqrt{U^2 + V^2})^2 = r^2 (U^2 + V^2)$$

ou

$$(\alpha U + \beta V + 1)^2 = (r \pm k)^2 (U^2 + V^2),$$

ce qui représente deux circonférences concentriques des rayons $(r \pm k)$.

Exemple 2. Pour l'ellipse $a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1$ ou

$$u = \frac{\cos \varphi}{a}, \quad v = \frac{\sin \varphi}{b},$$

on trouve

$$\frac{U}{1 \mp k \sqrt{U^2 + V^2}} = \frac{\cos \varphi}{a}, \quad \frac{V}{1 \mp k \sqrt{U^2 + V^2}} = \frac{\sin \varphi}{b},$$

d'où, en éliminant l'angle φ

$$a^2 U^2 + b^2 V^2 = (1 \mp k \sqrt{U^2 + V^2})^2.$$

Remarque. Afin de faire un travail un peu complet, tout en conservant le cadre limité de ce mémoire, il a fallu aborder le problème des courbes équidistantes, bien que cette partie du mémoire, comme du reste plusieurs autres qui ont été ajoutées dans le même but, n'offre absolument rien de nouveau. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à l'ouvrage, cité déjà plusieurs fois : Salmon, Higher pl. curves.

25. *Problème analogue à celui des trajectoires.* La traduction du problème des trajectoires isogonales en coordonnées tangentielles donne lieu au problème suivant qui ne manque pas d'intérêt : Etant donné un système de courbes $f(u,v;a) = 0$, où a signifie un paramètre variable, trouver un autre système $F(u,v;C) = 0$ tel que chaque courbe de l'un des systèmes ait au moins une tangente (réelle ou imaginaire) commune à chaque courbe de l'autre système et que les rayons vecteurs des points de contact (ou le prolongement de l'un d'eux) fassent entre eux un angle constant β, en sorte que pour un observateur à l'origine qui regarderait simultanément les deux points de contact des tangentes communes, l'angle des rayons visuels soit toujours le même.

Soit
$$F\left(u,v,\frac{du}{dv}\right)=0$$

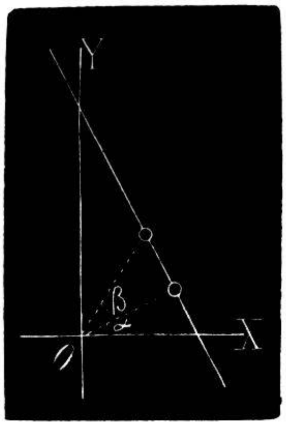

Fig. 9.

l'équation différentielle du système de courbes donné. On en tire

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{du}{dv}=-\varphi(u,v).$$

Or, pour les courbes cherchées on doit avoir

$$-\frac{du}{dv}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\varphi(u,v)+\operatorname{tg}\beta}{1+\varphi(u,v).\operatorname{tg}\beta}.$$

L'équation différentielle du système de courbes cherché est par conséquent

$$\frac{du}{dv}=\frac{\varphi(u,v)-\operatorname{tg}\beta}{1+\varphi(u,v).\operatorname{tg}\beta}.$$

L'intégrale générale de cette équation résout le problème proposé.

Dans le cas particulier $\beta=90^\circ$, l'équation différentielle des courbes cherchées prend la forme simple

$$\frac{du}{dv}=-\frac{1}{\varphi(u,v)}.$$

Exemple. On demande de résoudre le problème énoncé pour les paraboles confocales avec l'origine comme foyer commun

$$(1) \qquad u^2 + v^2 = \frac{2u}{a}$$

et $\beta = 90°$.

L'équation différentielle du système donné étant

$$\frac{du}{dv} = \frac{2uv}{v^2 - u^2},$$

celle des courbes cherchées devient

$$\frac{du}{dv} = -\frac{v^2 - u^2}{2uv}.$$

L'intégrale générale de cette dernière est

$$(2) \qquad u^2 + v^2 = \frac{2v}{C}.$$

On reconnaît aisément que ces courbes sont identiques, à l'inversion des axes près, avec les courbes données.

Comme les équations (1) et (2) sont satisfaites pour $u = v = 0$, la droite à l'infini est une tangente commune à toutes les courbes. Deux courbes quelconques des deux systèmes possèdent en outre la tangente commune

$$u = \frac{2a}{a^2 + C^2}, \quad v = \frac{2C}{a^2 + C^2};$$

sa direction est donnée par

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{u}{v} = -\frac{a}{C}.$$

Lorsque $a = C$, il vient $u = v$, c'est-à-dire la tangente commune à deux courbes correspondant à la même valeur des paramètres a et C, fait l'angle $\tau = -45°$ avec l'axe des X. On peut observer encore que ses points de contact se trouvent sur les axes coordonnés. (Pl. 25, fig. 9.)