

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 15 (1877-1878)
Heft: 80

Artikel: Étude élémentaire des courbes planes au moyen des coordonnées tangentielles
Autor: Amstein, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-287517>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE
DES
COURBES PLANES
AU MOYEN DES
COORDONNÉES TANGENTIELLES

PAR LE

Dr H. AMSTEIN

professeur à l'Académie de Lausanne.

(Pl. 24, 25.)



Les coordonnées tangentielles ont été introduites dans l'analyse par Plücker. M. *Fiedler*, dans un mémoire intitulé : « Ueber die projektivischen Coordinaten (Vierteljahrsschrift der zürcherischen naturforschenden Gesellschaft, XV Jahrgang, pages 152-182), » fait remarquer que ces coordonnées ne sont, comme les coordonnées cartésiennes, qu'un cas particulier des coordonnées projectives. Plusieurs géomètres, entre autres MM. G. Salmon, Cayley, Hesse, etc., en ont fait une fréquente application à l'étude des courbes et des surfaces. Mais c'est surtout depuis l'apparition des excellents ouvrages sur la géométrie analytique de M. G. Salmon¹, que leur emploi est devenu à peu près général. Dans les ouvrages français, on les rencontre surtout dans l'excellent traité trop peu connu de *Painvin* : *Principes de la géométrie analytique*

¹ Comp. les éditions originales, la traduction française du *Traité de géométrie analytique (sections coniques)*, par H. Resal et V. Vaucheret, Paris, Gauthier-Villars, 1870, et les éditions allemandes des différents ouvrages de Salmon, par M. W. Fiedler.

(Paris, Gauthier-Villars, 1872), et dans le complément de géométrie analytique de *Briot et Bouquet* (Paris, Dunod, 1864).

Le rôle scientifique des coordonnées tangentielles dans l'analyse, s'il est permis de s'exprimer ainsi, consiste à mettre en relief la réciprocité ou la dualité qui règne dans toute la géométrie. En effet, les coordonnées tangentielles sont aux coordonnées ponctuelles comme la droite est au point, comme l'enveloppe est au lieu géométrique; elles forment le complément nécessaire et naturel des coordonnées cartésiennes.

Puisque chaque problème particulier nécessite en quelque sorte un système de coordonnées spéciales, il est clair que les coordonnées tangentielles s'appliqueront de préférence à un certain genre de problèmes, par exemple à l'étude des courbes d'une classe élevée, à la recherche des tangentes multiples, des asymptotes, etc. Cependant il n'est peut-être pas inutile de soumettre les courbes planes à une étude générale dans ce système de coordonnées, étude qui, à la connaissance de l'auteur de ce mémoire, n'a pas été faite jusqu'à présent d'une manière complète.

Les pages suivantes n'ont pas la prétention de combler cette lacune; elles ont uniquement pour but de faire voir comment on pourrait introduire ces coordonnées dans une première étude générale des courbes planes telle qu'elle se pratique en coordonnées ponctuelles, par exemple dans les cours élémentaires de calcul différentiel.

Dans la première partie de ce mémoire, il est question des coordonnées tangentielles rectilignes, et dans la seconde des coordonnées que nous proposons d'appeler coordonnées tangentielles polaires. Les formules générales de la première partie ne sont pour ainsi dire que la traduction des formules analogues en coordonnées cartésiennes, de sorte que pour traiter le sujet un peu complètement, il a fallu s'occuper de certaines questions qui n'ont pas pour le savant l'attrait de la nouveauté.

Le but de ce travail justifie suffisamment l'absence des

coordonnées homogènes ou trimétriques. Cependant, pour satisfaire autant que possible aux lois de symétrie, il est, dans les formules suivantes, largement tenu compte de cette sorte de symétrie qui résulte de ce que les coordonnées d'un point ou d'une droite sont exprimées en fonction d'une troisième variable indépendante.

A. Coordonnées tangentielles rectilignes.

1. On suppose pour plus de simplicité des coordonnées rectangulaires. L'équation d'une droite déterminée par ses segments a et b sur les axes, est

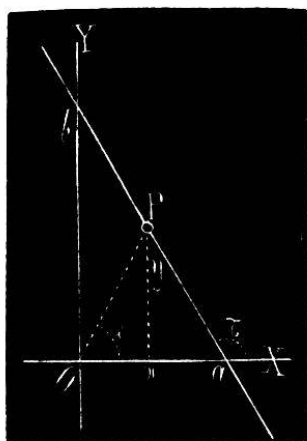


Fig. 1.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Si l'on pose

$$-\frac{1}{a} = u, \quad -\frac{1}{b} = v,$$

cette équation devient

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Les quantités a et b , par conséquent aussi u et v , déterminent complètement la droite, et c'est pour cela qu'on a appelé u et v les *coordonnées linéaires* ou, pour une raison qui trouve son explication dans la théorie des courbes, les *coordonnées tangentielles* de la droite. Les coordonnées tangentielles d'une droite sont donc les valeurs réciproques prises avec le signe contraire des segments faits par la droite sur les axes.

L'angle τ que fait la droite avec l'axe des X est donné par

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{u}{v}.$$

Exemples de droites particulières. — 1) La droite $u = a$, $v = a$ fait l'angle -45° avec l'axe des X et ses segments sur les deux axes sont $-\frac{1}{a}$.

2) La droite $u = a$, $v = -a$ fait l'angle $+45^\circ$ avec l'axe des X et ses segments sur les axes sont $-\frac{1}{a}$ et $+\frac{1}{a}$.

3) La droite $u = 0$, $v = a$ est parallèle à l'axe des X à la distance $-\frac{1}{a}$ de cet axe.

4) La droite $u = 0$, $v = \infty$ se confond avec l'axe des X.

5) La droite $u = b$, $v = 0$ est parallèle à l'axe des Y à la distance $-\frac{1}{b}$ de celui-ci.

6) La droite $u = \infty$, $v = 0$ est identique avec l'axe des Y.

7) $u = 0$, $v = 0$ signifie la droite à l'infini.

8) La droite $u = \infty$, $v = \infty$ passe par l'origine, et sa direction est donnée par $\operatorname{tg} \tau = \lim \left(-\frac{u}{v} \right)$ pour $\lim u = \infty$ et $\lim v = \infty$.

2. L'équation

$$ux + vy + 1 = 0$$

permet une double interprétation. Interprétée en coordonnées ponctuelles, elle représente la droite dont les coordonnées tangentielles sont u et v . Si, au contraire, on y regarde x et y comme constants, u et v comme variables, elle fournit une infinité de droites, et comme les valeurs constantes de x et y satisfont pour chaque couple de valeurs de u et v à l'équation (envisagée de nouveau comme équation d'une droite) toutes ces droites passent par le point dont les coordonnées ponctuelles sont x et y .

L'équation $ux + vy + 1 = 0$, interprétée en coordonnées tangentielles, représente par conséquent le point (x, y) et l'on voit sans difficulté qu'en général une équation du premier degré en u et v , telle que

$$Au + Bv + C = 0$$

représente le point dont les coordonnées ponctuelles sont

$$x = \frac{A}{C}, \quad y = \frac{B}{C}.$$

La forme particulière $ux + vy + 1 = 0$ de l'équation du premier degré a été appelée par *Hesse* la *forme normale* de l'équation du point (x, y) .

L'angle α (fig. 1) que fait le rayon vecteur du point (x, y) avec l'axe des X, est donné par

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Exemples de points particuliers. — 1) Le point $u = a$ se trouve sur l'axe des X à la distance $-\frac{1}{a}$ de l'origine.

2) Le point $v = b$ est le point sur l'axe des Y dont l'ordonnée est $-\frac{1}{b}$.

3) L'équation $Au + Bv = 0$ signifie le point qui se trouve à l'infini dans la direction déterminée par $\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A}$.

4) $v = 0$ est le point à l'infini dans la direction de l'axe des Y.

5) Le point $u = 0$ se trouve à l'infini dans la direction de l'axe des X.

6) L'équation $C = 0$, où $C \gtrless 0$, qui paraît absurde, signifie l'origine. En effet, si dans l'équation $Au + Bv + C = 0$,

$C \gtrless 0$, A et B tendent vers zéro, les coordonnées du point représenté $x = \frac{A}{C}$, $y = \frac{B}{C}$ tendent vers zéro.

3. *Point d'intersection de deux droites données* (u_1, v_1) et (u_2, v_2) . L'équation du point demandé sera de la forme

$$ux + vy + 1 = 0;$$

elle doit être satisfaite par les coordonnées des droites données, en sorte que

$$u_1 x + v_1 y + 1 = 0,$$

$$u_2 x + v_2 y + 1 = 0.$$

En éliminant de ces trois équations les inconnues x et y , on obtient l'équation cherchée

$$u - u_1 = \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} (v - v_1).$$

Les coordonnées ponctuelles de ce point sont

$$x = -\frac{v_2 - v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \quad y = \frac{u_2 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

et l'angle α que fait son rayon vecteur avec l'axe des X est déterminé par

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}.$$

4. *Droite qui joint deux points donnés* (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . Les coordonnées u, v de la droite cherchée satisfont aux équations de condition

$$ux_1 + vy_1 + 1 = 0,$$

$$ux_2 + vy_2 + 1 = 0.$$

En résolvant ces équations par rapport à u et v , on trouve pour la droite demandée

$$u = \frac{y_1 - y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad v = -\frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

5. Angle de deux droites données (u_1, v_1) et (u_2, v_2) . L'angle cherché γ est égal à $\pm (\tau_2 - \tau_1)$; donc

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \operatorname{tg} (\tau_2 - \tau_1) = \pm \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{u_1 u_2 + v_1 v_2}.$$

Condition de parallélisme des deux droites (u_1, v_1) et (u_2, v_2) :

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0.$$

Condition de perpendicularité des deux droites (u_1, v_1) et (u_2, v_2) :

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0.$$

6. Distance δ du point (ξ, η) à la droite (u, v) . L'équation en coordonnées ponctuelles de la droite (u, v) étant

$$ux + vy + 1 = 0,$$

il s'ensuit qu'on trouve la distance demandée d'après la règle connue de la géométrie analytique. Cette distance

$$\delta = \frac{u\xi + v\eta + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

est considérée comme positive ou comme négative, suivant que le point donné (ξ, η) et l'origine se trouvent du même côté de la droite donnée ou de côtés différents.

La distance δ de l'origine à la droite (u, v) est

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Observation. On voit sans difficulté que, si le système de coordonnées adopté avait été oblique (avec l'angle des coordonnées ω), il suffirait de remplacer dans les formules précédentes $\operatorname{tg} \tau$ par $\frac{\sin \tau}{\sin (\omega - \tau)}$, $\operatorname{tg} \alpha$ par $\frac{\sin \alpha}{\sin (\omega - \alpha)}$, $\operatorname{tg} \gamma$ par $\frac{\sin \gamma}{\sin (\omega - \gamma)}$. Les équations des points et des droites ne se-

raient pas changées, mais il faudrait substituer à la formule pour δ , la suivante :

$$\delta = \frac{u\xi + v\eta + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \omega}} \sin \omega.$$

7. Transformation de coordonnées.— 1) *Passage d'un système de coordonnées à un système parallèle.*

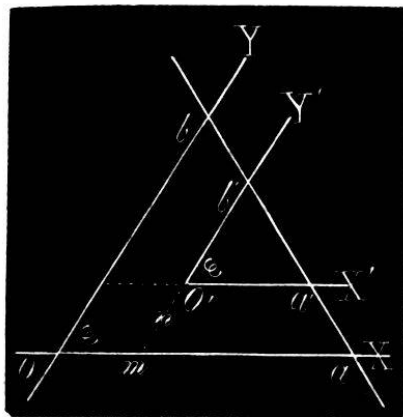


Fig. 2.

Soit ω l'angle des coordonnées, m et n les coordonnées ponctuelles et par conséquent $um + vn + 1 = 0$ l'équation de la nouvelle origine O' . Si u et v sont les coordonnées tangentielles d'une droite quelconque par rapport au système de coordonnées X, Y , u' et v' les coordonnées de la même droite par rapport au nouveau système X', Y' on a, en posant $u = -\frac{1}{a}$, $v = -\frac{1}{b}$, $u' = -\frac{1}{a'}$, $v' = -\frac{1}{b'}$, (fig. 2) les relations

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a-m}{b'+n} = \frac{a'}{b'}.$$

De ces deux relations, il suit

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{u'}{-mu' - nv' + 1} \\ v &= \frac{v'}{-mu' - nv' + 1} \end{aligned} \right\} \quad \text{et} \quad \left. \begin{aligned} u' &= \frac{u}{mu + nv + 1} \\ v' &= \frac{v}{mu + nv + 1} \end{aligned} \right\}$$

2) *Passage d'un système à un autre de même origine.*

Soit ω l'angle des coordonnées du système donné X, Y , et soient α et β les angles que font les nouveaux axes X', Y' avec l'axe des X , en sorte que $\beta - \alpha = \omega'$ est le

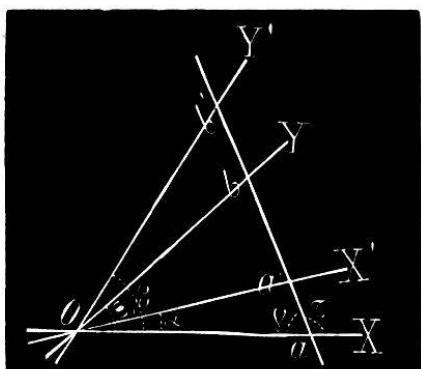


Fig. 3.

nouvel angle des coordonnées. Si, pour plus de brièveté, on introduit encore l'angle auxiliaire γ , c'est-à-dire l'angle supplémentaire de celui que fait une droite (u, v) quelconque avec l'axe des X, la figure 3 donne

$$\frac{a}{a'} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \gamma},$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\omega + \gamma)} = \frac{\sin \beta + \cos \beta \operatorname{tg} \gamma}{\sin \omega + \cos \omega \operatorname{tg} \gamma}$$

Mais comme de

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\omega + \gamma)} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sin \omega + \cos \omega \operatorname{tg} \gamma},$$

l'on déduit

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b \sin \omega}{a - b \cos \omega},$$

on a aussi

$$\frac{a}{a'} = \frac{a \sin \alpha + b \sin(\omega - \alpha)}{b \sin \omega}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{a \sin \beta + b \sin(\omega - \beta)}{a \sin \omega}.$$

De ces deux équations on tire immédiatement

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{v \sin \alpha + u \sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega} \\ v' &= \frac{v \sin \beta + u \sin(\omega - \beta)}{\sin \omega} \end{aligned} \right\}$$

et en résolvant par rapport à u et v :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{u' \sin \beta - v' \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}, \\ v &= \frac{v' \sin(\omega - \alpha) - u' \sin(\omega - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}. \end{aligned} \right\}$$

Remarque. S'il s'agissait de passer d'un système de coordonnées à un autre système d'origine et de directions d'axes différentes, il faudrait combiner les deux transformations qui viennent d'être indiquées.

ÉTUDE DES COURBES PLANES

8. Lorsqu'il existe entre u et v une relation telle que

$$F(u, v) = 0 \quad \text{ou} \quad u = f(v),$$

chaque couple de valeurs de u et de v détermine une droite $ux + vy + 1 = 0$ et l'ensemble de ces droites enveloppe évidemment une courbe de sorte que $F(u, v) = 0$ ou $u = f(v)$ peut être considérée comme l'équation de cette courbe en coordonnées tangentielles. Trouver l'équation de cette courbe en coordonnées ponctuelles, revient à trouver l'enveloppe des droites $ux + vy + 1 = 0$ sous la condition $F(u, v) = 0$. Si, au contraire, les coordonnées x et y sont liées entre elles par une équation telle que

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad y = \varphi(x)$$

chaque couple de valeurs de x et de y détermine un point $ux + vy + 1 = 0$, et l'ensemble de ces points forme un lieu géométrique dont l'équation est évidemment $\Phi(x, y) = 0$ ou $y = \varphi(x)$. Trouver l'équation de ce lieu géométrique en coordonnées tangentielles, c'est trouver le lieu géométrique des points $ux + vy + 1 = 0$ sous la condition $\Phi(x, y) = 0$.

L'équation $ux + vy + 1 = 0$, comme on vient de voir, représente indifféremment un point ou une tangente de la courbe, suivant que son équation est donnée en coordonnées ponctuelles ou en coordonnées tangentielles.

9. Problème de la tangente et de la transformation des coordonnées ponctuelles en coordonnées tangentielles.

Supposons qu'on donne la courbe sous la forme symétrique

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

où t signifie une troisième variable indépendante, et désignons par

$$x' = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \quad y' = \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

les dérivées de x et de y par rapport à la variable t . La tangente en un point (x, y) d'une courbe, étant la droite qui joint ce point au point infiniment voisin, ses coordonnées (u, v) satisfont aux deux équations

$$ux + vy + 1 = 0,$$

$$ux' + vy' = 0,$$

d'où l'on tire

$$(1) \quad \begin{cases} u = -\frac{y'}{xy' - yx'}, \\ v = \frac{x'}{xy' - yx'}. \end{cases}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation

$$u\xi + v\eta + 1 = 0,$$

où ξ et η désignent les coordonnées courantes, on obtient l'équation connue de la tangente

$$\eta - y = \frac{y'}{x'} (\xi - x).$$

La direction de la tangente est donnée par

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{u}{v} = \frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Les formules (1) qu'on modifiera facilement, si la courbe est donnée sous une autre forme, résolvent le problème de la transformation des coordonnées ponctuelles en coordonnées tangentielles. En effet, elles expriment u et v en fonction de t et dans la plupart des cas c'est sous cette forme que l'étude d'une courbe se fait le plus facilement. Si l'élimination de la variable t est possible, on obtient l'équation de la courbe sous une des formes ordinaires $F(u, v) = 0$ ou $u = f(v)$.

10. *Problème du point de contact et de la transformation des coordonnées tangentielles en coordonnées ponctuelles.*

Soit $u = \psi(t), v = \varphi(t),$

la courbe donnée et u' et v' les dérivées de u et de v par rapport à t .

Le point de contact d'une tangente donnée n'est autre chose que le point d'intersection de cette tangente avec la tangente infiniment voisine; par conséquent ses coordonnées x, y doivent satisfaire aux deux équations

$$\begin{aligned} ux + vy + 1 &= 0, \\ u'x + v'y &= 0, \end{aligned}$$

qui donnent

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{v'}{vu' - uv'}, \\ y = -\frac{u'}{vu' - uv'}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation

$$Ux + Vy + 1 = 0,$$

où U et V signifient les coordonnées courantes, on obtient pour l'équation du point de contact

$$U - u = \frac{u'}{v'} (V - v).$$

Le point de contact se construit avec la même facilité que la tangente en coordonnées cartésiennes, car on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{u'}{v'} = -\frac{du}{dv} = -\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Cette construction n'est en défaut que lorsque la tangente passe par l'origine, c'est-à-dire dans le cas où $u = \infty$ et $v = \infty$.

Les équations (2) permettent de passer de l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles à son équation en coordonnées ponctuelles. Il suffit d'en éliminer la variable t pour arriver à une des formes $F(x, y) = 0$ ou $y = f(x)$. (Cf. Salmon : *Treatise on the higher plane curves*.)

11. Asymptotes. Si l'on considère les asymptotes d'une courbe comme des tangentes dont le point de contact se trouve à l'infini, elles sont comprises dans les tangentes données par les formules (1). En effet, si

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

est la courbe donnée, on cherchera les valeurs de t , pour lesquelles x ou y ou les deux deviennent infinis, et on obtiendra les segments que déterminent les tangentes correspondantes sur les axes, en introduisant tour-à-tour les valeurs trouvées dans les équations

$$-\frac{1}{u} = \frac{xy' - yx'}{y'}, \quad -\frac{1}{v} = -\frac{xy' - yx'}{x'}.$$

On aura une asymptote parallèle à un axe coordonné ou une asymptote oblique, suivant que par ces substitutions l'une des expressions $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$ ou les deux prendront des valeurs finies.

Exemple. — Le folium de Descartes. L'équation de cette courbe

$$x^3 + y^3 - axy = 0$$

est identiquement satisfaite, si l'on pose

$$x = a \frac{t}{1+t^3}, \quad y = a \frac{t^2}{1+t^3}.$$

Comme x et y deviennent infiniment grands pour $t = -1$ et que la substitution de cette valeur dans

$$-\frac{1}{u} = a \frac{t}{2-t^3}, \quad -\frac{1}{v} = -a \frac{t^2}{1-2t^3}$$

donne $-\frac{1}{u} = -\frac{a}{3}, \quad -\frac{1}{v} = -\frac{a}{3}$, la tangente

$$x + y + \frac{a}{3} = 0$$

est une asymptote de la courbe.

Lorsque la courbe est donnée en coordonnées tangentielles

$$v = \varphi(t), \quad u = \psi(t),$$

les formules (2) montrent immédiatement que pour les asymptotes on doit avoir

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}.$$

Cette condition est nécessaire, mais non suffisante, car elle exprime seulement que la tangente et le rayon vecteur de son point de contact sont parallèles. Si cette condition ne peut être satisfaite que par $u = v = 0$, la tangente correspondante se trouve tout entière à l'infini et par suite elle n'est pas une asymptote proprement dite. Si, au contraire, une valeur de t , tirée de cette équation de condition, rend $u = \infty$ et $v = \infty$, on a une tangente passant par l'origine.

Dans ce cas, il s'agit de vérifier si le point de contact, donné par x et y , se trouve ou ne se trouve pas à l'infini. Dans tous les autres cas, une valeur t_0 de t , qui satisfait à l'équation $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$, fournit une asymptote $v = \varphi(t_0)$, $u = \psi(t_0)$.

Exemple. Choisissons encore le *folium de Descartes*, qui cette fois sera donné par

$$u = -\frac{1}{a} \frac{2-t^3}{t}, \quad v = \frac{1}{a} \frac{1-2t^3}{t^2}.$$

De l'équation $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$ on tire $t = -1$. Par conséquent

$u = \frac{3}{a}$, $v = \frac{3}{a}$ est une asymptote de la courbe.

12. *Equation du point de la tangente (u, v) , dont le rayon vecteur fait un angle droit avec le rayon vecteur du point de contact. Courbe correspondante à la développée.* Le point en question joue par rapport au point de contact d'une tangente le même rôle qu'en coordonnées ponctuelles la normale par rapport à la tangente. Son équation est, en désignant par U et V les coordonnées courantes,

$$U - u = -\frac{v'}{u'} (V - v).$$

De même qu'on traite en coordonnées cartésiennes la question de la développée, on peut, en coordonnées tangentielles, se poser le problème : Trouver le lieu géométrique des points situés sur les tangentes d'une courbe donnée, tels que leurs rayons vecteurs fassent avec les rayons vecteurs des points de contact un angle droit. En d'autres termes : Une courbe étant donnée, on demande une autre courbe telle que si un observateur se place à l'origine et regarde simultanément le point de contact d'une tangente

de la courbe donnée et sur cette tangente le point correspondant de la courbe cherchée, l'angle des deux rayons visuels soit toujours un angle droit. Ou encore : Un triangle rectangle à côtés variables dont le sommet de l'angle droit est placé à l'origine se mouvant de manière que le second sommet demeure sur une courbe donnée et qu'en ce point l'hypoténuse soit tangente à la courbe, on demande le lieu géométrique du troisième sommet.

Soit

$$v = \varphi(t), \quad u = \psi(t)$$

la courbe donnée. Le point de la courbe cherchée qui correspond au point de contact de la tangente (u, v) de la courbe donnée, a pour équation

$$U - u = -\frac{v'}{u'} (V - v).$$

Les coordonnées U, V de la tangente en ce point doivent satisfaire à cette équation et à celle qu'on obtient en la différentiant par rapport à t . On a donc pour déterminer U et V les deux équations

$$\begin{aligned} u' (U - u) + v' (V - v) &= 0 \\ u'' (U - u) + v'' (V - v) &= u'^2 + v'^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} V - v = \frac{u'^2 + v'^2}{u'v'' - v'u''} \cdot u', \\ U - u = -\frac{u'^2 + v'^2}{u'v'' - v'u''} \cdot v'. \end{cases}$$

En éliminant la variable t de ces deux équations on obtient l'équation de la courbe cherchée sous la forme $F(u, v) = 0$.

Exemple 1. La parabole. L'équation en coordonnées tangentiellles de la parabole $y^2 = 2px$ est

$$v^2 = \frac{2}{p} u.$$

Elle est identiquement satisfaite, si l'on pose

$$v = t, u = \frac{p}{2} t^2.$$

En appliquant les formules ci-dessus, on trouve pour les coordonnées U, V d'une tangente quelconque de la courbe cherchée

$$\begin{cases} V = -p^2 t^3, \\ U = \frac{1}{p} + \frac{3}{2} p t^2, \end{cases}$$

d'où, en éliminant t ,

$$\left(U - \frac{1}{p}\right)^3 = \frac{27}{8} \frac{V^2}{p}.$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée. En passant aux coordonnées ponctuelles, il vient

$$xy^2 + \frac{1}{2} x^3 + py^2 = 0.$$

(Courbe en affinité avec la cissoïde.) (Pl. 24, fig. 1.)

Observation. Il est clair qu'il aurait suffi de changer dans l'équation de la développée de la parabole x en U , y en V et p en $\frac{1}{p}$ pour arriver à l'équation demandée.

Exemple 2. L'ellipse. L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation en coordonnées tangentiellles

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1.$$

Une tangente quelconque de cette ellipse est donnée par

$$u = \frac{\sin t}{a}, \quad v = \frac{\cos t}{b}.$$

La tangente correspondante de la courbe demandée se trouve par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} V = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b} \cos^3 t \\ U = -\frac{a^2 - b^2}{a b^2} \sin^3 t, \end{cases}$$

d'où, par l'élimination du paramètre t , il résulte comme équation de la courbe cherchée

$$(2) \quad (aV)^{\frac{2}{3}} + (bU)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Traduites en coordonnées cartésiennes, les équations (1) et (2) deviennent

$$(1^a) \quad \begin{cases} x = \frac{ab^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\sin t} \\ y = -\frac{a^2 b}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

et $(2^a) \quad a^2 x^2 + b^2 y^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^2 x^2 y^2.$

(Pl. 24, fig. 2.)

13. Normale et développée. Soient u et v les coordonnées d'une tangente quelconque de la courbe donnée, U et V celles de la normale correspondante. On a pour déterminer U et V les deux équations

$$Uu + Vv = 0 \quad \text{ou} \quad u(U - u) + v(V - v) = -(u^2 + v^2), \\ v'(U - u) - u'(V - v) = 0$$

exprimant que la normale est perpendiculaire à la tangente et qu'elle passe par le point de contact.

De là

$$\begin{cases} U = v \cdot \frac{uv' - vu'}{uu' + vv'}, \\ V = -u \cdot \frac{uv' - vu'}{uu' + vv'}. \end{cases}$$

Or, si u et v sont exprimés en fonction d'une troisième variable t , U et V le seront aussi. Par conséquent ces équations résolvent le problème de la développée. Il suffit d'en éliminer t pour avoir l'équation de la développée sous la forme $F(u, v) = 0$.

Exemple. L'ellipse. L'ellipse étant donnée comme précédemment par

$$u = \frac{\sin t}{a}, \quad v = \frac{\cos t}{b},$$

on trouve en appliquant les formules ci-dessus

$$U = -\frac{a}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\sin t}, \quad V = \frac{b}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{\cos t},$$

d'où il résulte pour l'équation de la développée

$$(a^2 - b^2)^2 U^2 V^2 = a^2 V^2 + b^2 U^2.$$

14. Classe d'une courbe algébrique. Lorsqu'on combine avec l'équation d'un point $u = \alpha v + \beta$, l'équation en coordonnées tangentielles d'une courbe $F(u, v) = 0$, où F signifie une fonction entière de u et v du degré n , on obtient n couples de valeurs (réelles ou imaginaires) qui satisfont aux deux équations. Cela revient à dire que la courbe admet n tangentes (réelles ou imaginaires) émanant d'un point quelconque. Par conséquent, la classe d'une courbe est identique avec le degré de son équation en coordonnées tangentielles.

On peut encore remarquer qu'il sera toujours possible de

disposer de l'une des constantes arbitraires α et β en sorte que la résolvante des équations $F(u, v) = 0$ et $u = \alpha v + \beta$ possède une racine double. Dans ce cas, le point $u = \alpha v + \beta$ est le point de contact de la tangente (u, v) correspondante. Le problème : Etant donné α , déterminer β de la manière indiquée, revient à trouver tous les points de la courbe qui sont situés sur une droite passant par l'origine. En déterminant les deux constantes α et β de manière à ce que la résolvante admette deux couples de racines égales, ce qui en général est toujours possible, le point ainsi obtenu sera un point double ou un point de rebroussement. On en conclut que les courbes de la classe n possèdent en général des points doubles et des points de rebroussement, tandis que les courbes de l'ordre n admettent des tangentes doubles et des tangentes stationnaires comme singularités habituelles. (Cf. Salmon : Higher pl. curves.)

Exemple. Cherchons les points doubles de la courbe

$$(u^2 + v^2)^2 - u^2 + v^2 = 0.$$

En éliminant de cette équation et de

$$\alpha u + \beta v + 1 = 0$$

la variable v , on obtient

$$u^4 + \frac{4\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} u^3 + \frac{6\alpha^2 + \alpha^2 \beta^2 + 2\beta^2 - \beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} u^2 + \frac{2\alpha(2 + \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} u + \frac{1 + \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = 0.$$

Comme la courbe est symétrique par rapport aux axes coordonnés, il est évident que ses points doubles seront symétriques par rapport aux axes. Par conséquent, si les points doubles existent, il doit être possible de donner à α , β , p

des valeurs telles que le premier membre de cette équation devienne identique avec

$$(u^2 - p^2)^2 = 0,$$

ce qui donne les quatre conditions

$$\frac{4\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = 0, \quad \frac{6\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 + 2\beta^2 - \beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = -2p^2,$$

$$\frac{2\alpha(2 + \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = 0, \quad \frac{1 + \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = p^4,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pm\sqrt{8}, \quad p = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Les deux points doubles de la courbe possèdent donc les coordonnées $\alpha = 0, \beta = \pm\sqrt{8}$; les tangentes principales en ces points sont données par

$$u = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \quad v = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

(Pl. 24, fig. 3.)

15. *Angle de contingence.* L'angle de contingence $d\tau$ en un point donné d'une courbe est l'angle que fait la tangente (u, v) en ce point avec la tangente consécutive. Comme (Cf. n° 9)

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{u}{v} \quad \text{ou} \quad \tau = -\operatorname{arctg} \frac{u}{v},$$

l'angle de contingence est donné par

$$d\tau = -\frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2}.$$

16. *Interprétation de la dérivée seconde.* Soit

$$u = f(v)$$

l'équation d'une courbe. On sait que (Cf. n° 10)

$$\operatorname{tg} \alpha = -f'(v),$$

où α désigne l'angle que fait le rayon vecteur du point de contact de la tangente (u, v) avec l'axe des X. De cette équation on tire

$$\alpha = -\operatorname{arctg} f'(v)$$

et par différentiation

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{f''(v)}{1 + [f'(v)]^2}.$$

Par conséquent l'angle α croît ou décroît, suivant que $f''(v)$ est négatif ou positif.

17. Concavité et convexité d'une courbe. Soit v la variable indépendante à laquelle on convient de donner des accroissements positifs dv . Vue de l'origine, la courbe $u = f(v)$ sera convexe ou concave en un point dont la tangente possède les coordonnées u et v , suivant que pour ces valeurs u et v les quantités $d\tau$ et $f''(v)$ sont de même signe ou de signes contraires.

Cette règle est en défaut : 1° lorsque la tangente au point considéré passe par l'origine ou qu'elle est une asymptote, c'est-à-dire dans les cas où $d\tau$ s'annule; 2° lorsque $f''(v) = 0$. Dans les deux cas, savoir $d\tau = 0$ et $f''(v) = 0$, le point considéré est un point singulier qui demande une étude spéciale.

18. Contact des courbes. Lorsque deux courbes

$$u = f(v) \text{ et } u_1 = \varphi(v)$$

ont en commun une tangente (u, v) et son point de contact, on dit qu'elles possèdent en ce point un certain contact. Ce contact est évidemment d'autant plus intime que les tangentes des deux courbes qui suivent immédiatement la tan-

gente commune, s'écartent moins l'une de l'autre. En effet, si trois courbes sont en contact et que la seconde courbe passe entre la première et la troisième, il est clair que le contact de cette courbe avec une des deux autres courbes sera plus intime que celui des deux autres courbes entre elles. Afin d'obtenir une définition plus précise du contact de deux courbes, il faut calculer leurs angles de contingence au point considéré.

Si par un accroissement positif h de la variable indépendante v la fonction u passe en $u + \Delta u = f(v + h)$, u_1 en $u_1 + \Delta u_1 = \varphi(v + h)$, les angles de contingence $\Delta\tau$ et $\Delta\tau_1$ deviennent (Cf. n° 15)

$$\Delta\tau = -\frac{v\Delta u - uh}{u^2 + v^2}, \quad \Delta\tau_1 = -\frac{v\Delta u_1 - u_1h}{u^2 + v^2},$$

et leur différence est

$$\Delta\tau_1 - \Delta\tau = -v \cdot \frac{\Delta u_1 - \Delta u}{u^2 + v^2},$$

d'où l'on tire

$$\mp \frac{\Delta\tau_1 - \Delta\tau}{h} = \Delta u_1 - \Delta u,$$

expression dans laquelle la projection sur l'axe des Y de la perpendiculaire, abaissée de l'origine sur la tangente considérée, est représentée par

$$\frac{v}{u^2 + v^2} = \pm k.$$

Or, le développement de $(\Delta u_1 - \Delta u)$ suivant des puissances ascendantes de h commencera en général par un terme d'un ordre supérieur au premier. Divisant encore par h et posant

$$\mp \frac{\Delta\tau_1 - \Delta\tau}{hk} = \frac{\Delta u_1 - \Delta u}{h} = Ah^m + Bh^{m+n} + \dots,$$

le plus petit des exposants, savoir m , sera appelé *l'ordre du contact des deux courbes*.

Cette définition est en défaut lorsque le point de contact de la tangente considérée se trouve sur l'axe des Y . Dans ce cas, il suffit de regarder u comme variable indépendante et de chercher le développement de $\frac{\Delta v_1 - \Delta v}{h}$ correspondant à un accroissement h de u .

En général, on aura soin de choisir la variable indépendante de façon que le développement de $(\Delta u_1 - \Delta u)$, ou de $(\Delta v_1 - \Delta v)$ commence par une puissance supérieure à la première. Alors la définition ne subit aucune exception.

Exemple 1. Les deux courbes

$$u - 1 = (v - 1)^{\frac{4}{3}},$$

$$u_1 - 1 = (v - 1)^{\frac{5}{4}}$$

ont en commun la tangente $u = u_1 = 1$, $v = 1$ et son point de contact $x = -1$, $y = 0$. Pour trouver l'ordre de leur contact, posons $v = 1 + h$, d'où il suit

$$\Delta u = h^{\frac{4}{3}} + \dots$$

$$\Delta u_1 = h^{\frac{5}{4}} + \dots$$

$$\frac{\Delta u_1 - \Delta u}{h} = h^{\frac{1}{4}} - h^{\frac{1}{3}} \dots$$

L'ordre de contact est par conséquent $= \frac{1}{4}$.

Exemple 2. Les courbes

$$u - 1 = (v - 1)^{\frac{3}{4}},$$

$$u_1 - 1 = (v - 1)^{\frac{4}{5}}$$

ont en commun la tangente $u = u_1 = 1$, $v = 1$ et son point de contact. Ce point de contact $x = 0$, $y = -1$ étant situé

sur l'axe des Y , il convient de regarder u comme variable indépendante. Il va sans dire qu'on trouvera encore par là l'ordre de contact $= \frac{1}{4}$.

Exemple 3. Les courbes

$$u = v^{\frac{4}{3}}, \quad u_1 = v^{\frac{5}{4}}$$

se touchent à l'origine. Dans ce cas on a

$$\frac{\Delta u_1 - \Delta u}{h} = h^{\frac{1}{4}} - h^{\frac{1}{3}}.$$

Par conséquent l'ordre du contact des deux courbes à l'origine est encore $= \frac{1}{4}$.

Lorsque les deux fonctions

$$u = f(v) \text{ et } u_1 = \varphi(v)$$

permettent dans le voisinage des valeurs communes $v = v_0$, $u = u_1 = u_0$ le développement suivant le théorème de Taylor, en sorte que

$$\begin{aligned} u_0 + \Delta u &= f(v_0) + f'(v_0) \cdot \frac{h}{1} + f''(v_0) \cdot \frac{h^2}{1.2} + \dots \\ &+ f^n(v_0) \cdot \frac{h^n}{1.2 \dots n} + f^{n+1}(v_0) \cdot \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} + \dots \\ u_0 + \Delta u_1 &= \varphi(v_0) + \varphi'(v_0) \cdot \frac{h}{1} + \varphi''(v_0) \cdot \frac{h^2}{1.2} + \dots \\ &+ \varphi^n(v_0) \cdot \frac{h^n}{1.2 \dots n} + \varphi^{n+1}(v_0) \cdot \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} + \dots \end{aligned}$$

la définition indiquée ci-dessus peut s'énoncer comme il suit : Les deux courbes $u = f(v)$ et $u_1 = \varphi(v)$ possèdent en une tangente commune (u_0, v_0) , qui n'est pas une tangente singulière pour chacune d'elles, un contact de l'ordre n , lors-

que pour $v = v_0$ les fonctions $f(v)$ et $\varphi(v)$, ainsi que leurs n premières dérivées, affectent les mêmes valeurs, tandis que les dérivées $(n+1)^{\text{ième}}$ $f^{n+1}(v)$ et $\varphi^{n+1}(v)$ prennent des valeurs différentes. En un tel endroit, les courbes ont $(n+1)$ tangentes consécutives communes et le contact se fait avec ou sans intersection suivant que n est un nombre pair ou impair.

Toutefois cette définition exige que le point de contact commun ne soit pas situé sur l'axe des Y .

Exemple. De quel ordre est le contact de la parabole

$$1 + 4u + 3u^2 = v^2 \quad \text{ou} \quad u = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{1 + 3v^2}$$

et de la circonférence

$$2u_1^2 + 2u_1 = v^2 \quad \text{ou} \quad u_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2v^2}$$

au point $x = 1$, $y = 0$, c'est-à-dire au point de contact de la tangente commune $u = -1$, $v = 0$?

Pour $v = 0$, il vient $u = -1$,

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dv^2}\right)_0 = -1, \quad \left(\frac{d^3u}{dv^3}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^4u}{dv^4}\right)_0 = 9;$$

$$u_1 = -1, \quad \left(\frac{du_1}{dv}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2u_1}{dv^2}\right)_0 = -1, \quad \left(\frac{d^3u_1}{dv^3}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^4u_1}{dv^4}\right)_0 = 6.$$

Les trois premières dérivées des fonctions u et u_1 étant égales, les dérivées quatrièmes différentes pour $v = 0$, il s'ensuit que l'ordre du contact des deux courbes $= 3$.

19. Cercle osculateur, différentielle de l'arc, rayon de courbure. Le cercle osculateur en une tangente donnée (u, v) d'une courbe a trois tangentes consécutives communes avec la courbe. Par là ce cercle est défini uniformément; car trois tangentes consécutives étant données, le sens de courbure

l'est en même temps. Si donc α et β sont les coordonnées cartésiennes de son centre, ϱ son rayon, l'équation du cercle osculateur aura la forme

$$(\alpha U + \beta V + 1)^2 = \varrho^2 (U^2 + V^2),$$

et les constantes α , β et ϱ seront déterminées par les trois conditions

$$(\alpha u + \beta v + 1)^2 = \varrho^2 (u^2 + v^2),$$

$$(\alpha u + \beta v + 1) \left(\alpha \frac{du}{dv} + \beta \right) = \varrho^2 \left(u \frac{du}{dv} + v \right),$$

$$(\alpha u + \beta v + 1) \alpha \frac{d^2 u}{dv^2} + \left(\alpha \frac{du}{dv} + \beta \right)^2 = \varrho^2 \left[1 + \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + u \frac{d^2 u}{dv^2} \right]$$

qui indiquent que la circonférence admet la tangente (u, v) et les deux tangentes qui la suivent immédiatement. Au lieu de résoudre ces équations, ce qui n'offre aucune difficulté, on se borne à chercher l'expression du rayon de courbure par la voie suivante :

Supposons la courbe donnée sous la forme

$$v = \varphi(t), \quad u = \psi(t).$$

Alors on tire des formules

$$\begin{cases} x = \frac{v'}{vu' - uv'} \\ y = -\frac{u'}{vu' - uv'} \end{cases} \quad (\text{Cf. n}^\circ 10.)$$

par différentiation

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{u'v'' - v'u''}{(vu' - uv')^2} \\ \frac{dy}{dt} = -u \cdot \frac{u'v'' - v'u''}{(vu' - uv')^2} \end{cases}$$

d'où pour la différentielle de l'arc :

$$ds = \pm \frac{u'v'' - v'u''}{(vu' - uv')^2} \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Le signe du radical sera toujours choisi en sorte que ds soit positif.

Or, comme $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$, il vient

$$\varrho = \frac{u'v'' - v'u''}{(vu' - uv')^3} \sqrt{(u^2 + v^2)^3}.$$

D'après ce qui vient d'être établi relativement au signe de ds , il est clair que ϱ aura toujours le signe de $d\tau$. En d'autres termes : Un observateur placé au point considéré de manière à avoir le point infiniment voisin (correspondant à un accroissement positif de la variable indépendante) devant lui, verra le centre de courbure à sa gauche ou à sa droite, suivant que ϱ sera positif ou négatif.

20. Tangentes multiples. Soit $f(U, V) = 0$ l'équation de la courbe. D'après le théorème de Maclaurin on peut écrire

$$\begin{aligned} f(U, V) = & A_0 + A_1(V - v) + A_2(U - u) + \\ & + \frac{1}{2} [A_{11}(V - v)^2 + 2A_{12}(V - v)(U - u) + A_{22}(U - u)^2] + \\ & + \frac{1}{6} [A_{111}(V - v)^3 + 3A_{112}(V - v)^2(U - u) + \\ & + 3A_{122}(V - v)(U - u)^2 + A_{222}(U - u)^3] + \dots, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_0 = f(u, v), \quad A_1 = \left(\frac{df}{dV} \right)_{u,v}, \quad A_2 = \left(\frac{df}{dU} \right)_{u,v}, \\ A_{11} = \left(\frac{d^2f}{dV^2} \right)_{u,v}, \quad A_{12} = \left(\frac{d^2f}{dV dU} \right)_{u,v}, \quad A_{22} = \left(\frac{d^2f}{dU^2} \right)_{u,v} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Or, si $A_0 = 0$, la droite $V = v$, $U = u$ est une tangente de la courbe et son point de contact est donné par l'équation

$$A_1(V - v) + A_2(U - u) = 0.$$

Si on a simultanément $A_0 = 0$ et $A_1 = A_2 = 0$, la droite $V = v$, $U = u$ est une tangente double de la courbe. Ses deux points de contact s'obtiennent par l'équation

$$A_{11}(V - v)^2 + 2A_{12}(V - v)(U - u) + A_{22}(U - u)^2 = 0.$$

Pour que la courbe possède une tangente multiple, il faut, comme on vient de le voir, que $f(U, V)$ satisfasse aux conditions

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0;$$

la tangente est double, si les dérivées secondes de $f(U, V)$, savoir A_{11} , A_{12} , A_{22} ne sont pas toutes égales à zéro, et ses points de contact sont réels ou imaginaires, suivant que

$$A_{12}^2 - A_{11} A_{22} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0;$$

ils sont réels et ils coïncident, lorsque $A_{12}^2 = A_{11} A_{22}$. Dans ce dernier cas, la tangente considérée est une tangente singulière de la courbe. Pour reconnaître la singularité qui a lieu, il faudrait tenir compte des premiers termes d'un ordre supérieur au second, qui ne s'annulent pas. Comme cette étude est en général assez pénible, elle ne sera pas poussée plus loin, attendu que l'on va déterminer les singularités d'une courbe par un autre procédé qui, le plus souvent, présente moins de longueur.

On voit facilement quelles sont les conditions qui amènent une tangente triple, quadruple, etc.

Exemple 1. Pour la courbe

$$(u^2 + v^2)^2 - (u^2 - v^2) = 0$$

la droite à l'infini ($v = u = 0$) est une tangente double. Ses

points de contact $u = \pm v$ se trouvent dans les directions $\alpha = \pm 45^\circ$. (Pl. 24, fig.3.)

Exemple 2. La courbe

$$(v-1)^4 + (u-1)^4 - 2a(v-1)^3 + 2b(u-1)^2(v-1) = 0$$

possède une tangente triple $u = 1, v = 1$. Les trois points de contact sont déterminés par les équations

$$v = 1, \frac{u-1}{v-1} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

21. Éléments singuliers. Soit $u = u_0, v = v_0$ une tangente singulière, (x_0, y_0) son point de contact. Pour trouver la forme qu'affecte la courbe en ce point, on prend ce point pour origine, la tangente considérée pour axe des abscisses et la normale correspondante pour axe des ordonnées d'un nouveau système de coordonnées, et l'on développe u et v suivant les puissances ascendantes d'une troisième variable t . Ces développements permettent de reconnaître l'ordre dont u et v deviennent infiniment grands à la nouvelle origine. On aura par exemple

$$u = at^{-m} + a_1 t^{-m+m'} + \dots,$$

$$v = bt^{-n} + b_1 t^{-n+n'} + \dots,$$

où $a, a_1, b, b_1 \dots$ sont des constantes différentes de zéro, m et n des nombres entiers, et puisque l'axe des abscisses est une tangente de la courbe évidemment $n > m$. Alors quatre cas peuvent se présenter :

1. Si m est un nombre *impair* et n un nombre *pair*, l'élé-

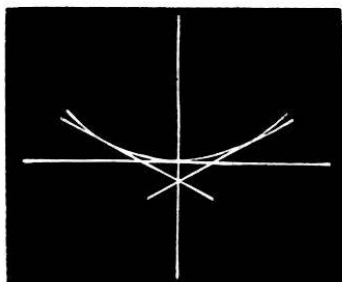


Fig. 4.

ment de courbe se trouve des deux côtés de la normale et en entier du même côté de la tangente. La singularité en question tient à ce que le contact de la tangente avec la courbe est d'un ordre différent du premier.

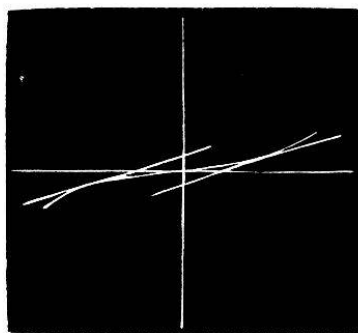


Fig. 5.

2. Soient m et n des nombres *impairs*. Alors l'élément de courbe possède des points des deux côtés de la normale et en même temps des deux côtés de la tangente. Le point considéré est un *point d'inflexion*.

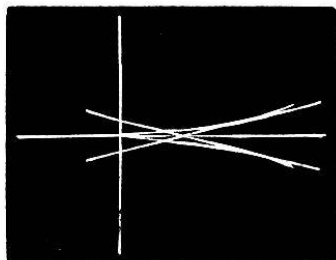


Fig. 6.

3. Lorsque m est un nombre *pair*, n un nombre *impair*, l'élément de courbe se trouve des deux côtés de la tangente et en entier du même côté de la normale et le point singulier est un *point de rebroussement de la première espèce*.

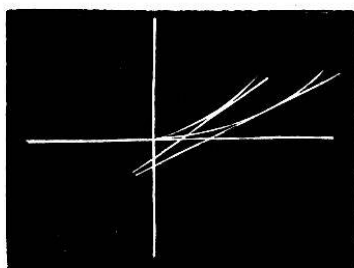


Fig. 7.

4. Si enfin m et n sont des nombres *pairs*, l'élément reste en entier non-seulement du même côté de la tangente, mais aussi du même côté de la normale. Le point critique est alors un *point de rebroussement de la seconde espèce*.

Exemples. L'origine est un point singulier pour les quatre courbes

$$1) \quad u = v^{\frac{1}{3}} \text{ ou } \begin{cases} u = t^{-1} \\ v = t^{-3} \end{cases}; \quad 2) \quad u = v^{\frac{2}{3}} \text{ ou } \begin{cases} u = t^{-2} \\ v = t^{-3} \end{cases},$$

$$3) \quad v = u^2 + u^{\frac{3}{2}} \text{ ou } \begin{cases} u = t^{-2} \\ v = t^{-4} + t^{-3} \end{cases}, \quad 4) \quad u = v^{\frac{3}{4}} \text{ ou } \begin{cases} u = t^{-3} \\ v = t^{-4} \end{cases},$$

savoir un point d'inflexion pour la première, un point de rebroussement de la première espèce pour la seconde et un point de rebroussement de la seconde espèce pour la troisième. La singularité de la quatrième courbe consiste en ce qu'à l'origine la courbe forme un contact de l'ordre $\frac{1}{3}$ avec l'axe des X . (Pl. 24, fig. 4-7.)

Exemple 5. On propose de chercher les singularités de la courbe

$$(u + 1)^3 = -(v + 1)^2.$$

En posant

$$\begin{cases} u = -(1 + t^2) \\ v = -1 + t^3 \end{cases}$$

cette équation est identiquement satisfaite. On reconnaît facilement que l'origine est un point de rebroussement de la première espèce et que la tangente $u = -1$, $v = -1$ avec le point de contact $x = 0$, $y = 1$ est une tangente singulière. Pour trouver la forme qu'affecte la courbe en ce dernier point, on transporte d'abord l'origine du système de coordonnées au point $x = 0$, $y = 1$, ce qui donne (Cf. n° 7, 1.)

$$u_1 = -\frac{1 + t^2}{t^3}, \quad v_1 = \frac{-1 + t^3}{t^3}$$

et l'on tourne ensuite les axes coordonnés d'un angle de -45° . (Cf. n° 7, 2.). Alors il vient

$$u_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(t^{-1} + 1); \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2t^{-3} - t^{-1} + 1).$$

Comme dans ce cas $m = 1$, $n = 3$, le point considéré est un point d'inflexion. (Pl. 24, fig. 8.)

22. Polaires réciproques. L'équation de la polaire du point (ξ, η) par rapport à la circonférence $x^2 + y^2 = 1$ est

$$\xi x + \eta y = 1.$$

Si l'on pose $\xi = -u$, $\eta = -v$, on obtient l'équation

$$ux + vy + 1 = 0$$

qui a servi de point de départ au présent mémoire. Suivant qu'on l'interprète en coordonnées ponctuelles ou en coor-

données tangentielles, elle représente soit la polaire du point (ξ, η) , soit le pôle de la droite $\xi x + \eta y = 1$. La polaire d'un point figure ainsi comme lieu géométrique des pôles de toutes les droites passant par ce point, et le pôle d'une droite est l'enveloppe de toutes les polaires des points de cette droite.

Lorsque le point (ξ, η) décrit une courbe $f(\xi, \eta) = 0$, la droite (u, v) , polaire du point (ξ, η) , enveloppe une seconde courbe $f(-u, -v) = 0$. Deux courbes, liées entre elles de la manière indiquée, ont été appelées des *polaires réciproques* par rapport à la circonférence $x^2 + y^2 = 1$. Les substitutions

$$\xi = -u, \quad \eta = -v$$

dans l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ et

$$u = -\xi, \quad v = -\eta$$

dans l'équation $f(u, v) = 0$ résolvent par conséquent le problème de trouver en coordonnées $\left. \begin{array}{l} \text{tangentielles} \\ \text{ponctuelles} \end{array} \right\}$ la polaire réciproque d'une courbe donnée en coordonnées $\left. \begin{array}{l} \text{ponctuelles} \\ \text{tangentielles} \end{array} \right\}$.

En même temps ces considérations permettent de reconnaître la nature intime des coordonnées tangentielles.

Les relations $\xi = -u, \eta = -v$ entraînent les autres qui suivent :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dv}{du}, \quad \frac{\eta}{\xi} = \frac{v}{u}, \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{u^2 + v^2},$$

d'où il résulte que la tangente au point (ξ, η) de la courbe $f(\xi, \eta) = 0$ est perpendiculaire au rayon vecteur du point de contact de la tangente $(-u, -v)$ de la courbe $f(-u, -v) = 0$ et réciproquement, et que le rayon vecteur du point (ξ, η) est la valeur réciproque de la distance de l'origine à la tangente $(-u, -v)$. (Cf. n° 6.)

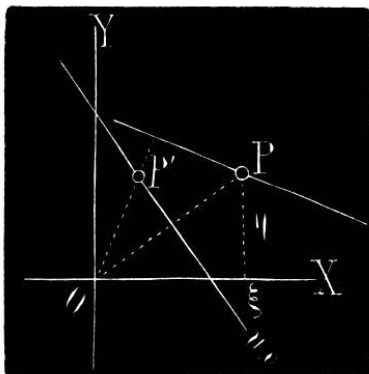


Fig. 8.

Le principe de la dualité que l'on rencontre ici, règne dans toute la géométrie. Aussi les géomètres se sont-ils servis de ce puissant instrument pour doubler en quelque sorte les résultats de leurs recherches. Il serait inutile d'insister plus longuement sur ce principe qu'on trouve développé dans tous les bons ouvrages sur la géométrie analytique, notamment dans les excellents ouvrages de M. Salmon. Qu'il suffise d'avoir montré le rapport qui existe entre les coordonnées ponctuelles et les coordonnées tangentielles.

23. Podaire d'une courbe par rapport à l'origine. Si d'un point donné A on abaisse des perpendiculaires sur toutes les tangentes d'une courbe donnée, le lieu géométrique des pieds de ces perpendiculaires est une courbe qu'on appelle *la podaire* de la courbe donnée par rapport au point A. On va chercher les relations qui existent entre les coordonnées tangentielles (u, v) d'une tangente quelconque d'une courbe et les coordonnées ponctuelles (x, y) du point correspondant de sa podaire par rapport à l'origine. Soit

$$ux + vy + 1 = 0$$

la tangente considérée,

$$uy - vx = 0$$

la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette tangente.

De ces deux équations on tire

$$(1) \quad \begin{cases} x = -\frac{u}{u^2 + v^2}, \\ y = -\frac{v}{u^2 + v^2}, \end{cases}$$

et réciproquement :

$$(2) \quad \begin{cases} u = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Ces formules résolvent le problème de la podaire et le problème réciproque. En effet, si $f(u, v) = 0$ est la courbe donnée, $f(-\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}) = 0$ est l'équation de sa podaire, et si $\varphi(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe donnée, $\varphi(-\frac{u}{u^2 + v^2}, -\frac{v}{u^2 + v^2}) = 0$ sera celle de la courbe dont la proposée est la podaire.

Exemple 1. Si l'on fait les substitutions (2) dans l'équation de l'ellipse

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1,$$

il vient pour la podaire par rapport à l'origine

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Exemple 2. Pour la parabole

$$p(u^2 + v^2) = 2u,$$

rapportée à son foyer, on obtient la podaire

$$p \cdot \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2x}{x^2 + y^2}, \text{ ou } x = -\frac{p}{2}.$$

Exemple 3. La lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

est la podaire de l'hyperbole équilatère

$$a^2(u^2 - v^2) = 1.$$

24. Courbes équidistantes. Lorsqu'on porte des deux côtés des points d'une courbe donnée sur les normales une longueur constante k , l'ensemble des points ainsi obtenus forme une nouvelle courbe (qui dans certains cas peut dégénérer en deux courbes différentes) qu'on appelle *courbe équidistante* de la courbe proposée. Elle peut aussi être considérée

comme l'enveloppe d'un cercle de rayon k dont le centre se meut le long de la courbe donnée. De ces définitions il suit immédiatement que les tangentes en des points correspondants des deux courbes sont parallèles. C'est cette propriété qui servira à établir l'équation de la courbe équidistante en coordonnées tangentielles.

Soit $f(u, v) = 0$ la courbe donnée. Si $\varrho = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ est la distance de l'origine à une tangente quelconque (u, v) de cette courbe

$$(1) \quad \varrho \pm k = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \pm k = \frac{1}{\sqrt{U^2 + V^2}}$$

sera la distance de l'origine à la tangente correspondante (U, V) de la courbe équidistante. Comme ces tangentes sont parallèles, on a de plus

$$(2) \quad \frac{U}{V} = \frac{u}{v}.$$

En résolvant les équations (1) et (2) par rapport à u et v on trouve

$$\begin{cases} u = \frac{U}{1 \mp k \sqrt{U^2 + V^2}}, \\ v = \frac{V}{1 \mp k \sqrt{U^2 + V^2}}. \end{cases}$$

En conséquence, pour obtenir l'équation de la courbe équidistante, il suffit de remplacer dans l'équation donnée u et v par les valeurs trouvées.

Exemple 1. Si l'on fait les substitutions indiquées dans l'équation de la circonférence de rayon r et du centre (α, β) ,

$$(\alpha u + \beta v + 1)^2 = r^2 (u^2 + v^2),$$

il vient

$$(\alpha U + \beta V + 1 \mp k \sqrt{U^2 + V^2})^2 = r^2 (U^2 + V^2)$$

ou

$$(\alpha U + \beta V + 1)^2 = (r \pm k)^2 (U^2 + V^2),$$

ce qui représente deux circonférences concentriques des rayons $(r \pm k)$.

Exemple 2. Pour l'ellipse $a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1$ ou

$$u = \frac{\cos \varphi}{a}, \quad v = \frac{\sin \varphi}{b},$$

on trouve

$$\frac{U}{1 \mp k \sqrt{U^2 + V^2}} = \frac{\cos \varphi}{a}, \quad \frac{V}{1 \mp k \sqrt{U^2 + V^2}} = \frac{\sin \varphi}{b},$$

d'où, en éliminant l'angle φ

$$a^2 U^2 + b^2 V^2 = (1 \mp k \sqrt{U^2 + V^2})^2.$$

Remarque. Afin de faire un travail un peu complet, tout en conservant le cadre limité de ce mémoire, il a fallu aborder le problème des courbes équidistantes, bien que cette partie du mémoire, comme du reste plusieurs autres qui ont été ajoutées dans le même but, n'offre absolument rien de nouveau. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à l'ouvrage, cité déjà plusieurs fois : Salmon, Higher pl. curves.

25. Problème analogue à celui des trajectoires. La traduction du problème des trajectoires isogonales en coordonnées tangentielles donne lieu au problème suivant qui ne manque pas d'intérêt : Etant donné un système de courbes $f(u, v; a) = 0$, où a signifie un paramètre variable, trouver un autre système $F(u, v; C) = 0$ tel que chaque courbe de l'un des systèmes ait au moins une tangente (réelle ou imaginaire) commune à chaque courbe de l'autre système et que les rayons vecteurs des points de contact

(ou le prolongement de l'un d'eux) fassent entre eux un angle constant β , en sorte que pour un observateur à l'origine qui regarderait simultanément les deux points de contact des tangentes communes, l'angle des rayons visuels soit toujours le même.

Soit
$$F(u, v, \frac{du}{dv}) = 0$$

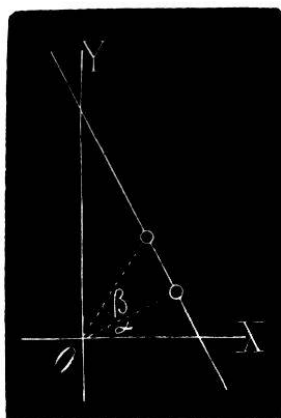


Fig. 9.

l'équation différentielle du système de courbes donné. On en tire

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{du}{dv} = - \varphi(u, v).$$

Or, pour les courbes cherchées on doit avoir

$$- \frac{du}{dv} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{-\varphi(u, v) + \operatorname{tg} \beta}{1 + \varphi(u, v) \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

L'équation différentielle du système de courbes cherché est par conséquent

$$\frac{du}{dv} = \frac{\varphi(u, v) - \operatorname{tg} \beta}{1 + \varphi(u, v) \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

L'intégrale générale de cette équation résout le problème proposé.

Dans le cas particulier $\beta = 90^\circ$, l'équation différentielle des courbes cherchées prend la forme simple

$$\frac{du}{dv} = - \frac{1}{\varphi(u, v)}.$$

Exemple. On demande de résoudre le problème énoncé pour les paraboles confocales avec l'origine comme foyer commun

$$(1) \quad u^2 + v^2 = \frac{2u}{a}$$

et $\beta = 90^\circ$.

L'équation différentielle du système donné étant

$$\frac{du}{dv} = \frac{2uv}{v^2 - u^2},$$

celle des courbes cherchées devient

$$\frac{du}{dv} = -\frac{v^2 - u^2}{2uv}.$$

L'intégrale générale de cette dernière est

$$(2) \quad u^2 + v^2 = \frac{2v}{C}.$$

On reconnaît aisément que ces courbes sont identiques, à l'inversion des axes près, avec les courbes données.

Comme les équations (1) et (2) sont satisfaites pour $u = v = 0$, la droite à l'infini est une tangente commune à toutes les courbes. Deux courbes quelconques des deux systèmes possèdent en outre la tangente commune

$$u = \frac{2a}{a^2 + C^2}, \quad v = \frac{2C}{a^2 + C^2};$$

sa direction est donnée par

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{u}{v} = -\frac{a}{C}.$$

Lorsque $a = C$, il vient $u = v$, c'est-à-dire la tangente commune à deux courbes correspondant à la même valeur des paramètres a et C , fait l'angle $\tau = -45^\circ$ avec l'axe des X . On peut observer encore que ses points de contact se trouvent sur les axes coordonnés. (Pl. 25, fig. 9.)

B. Coordonnées tangentielles polaires.

26. La longueur ϱ de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur une droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ et l'angle φ que fait cette

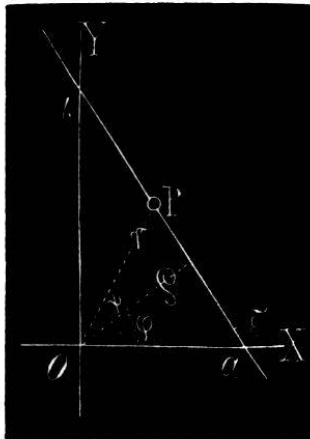


Fig. 10.

perpendiculaire avec l'axe des X, déterminent complètement la droite. En raison de l'analogie qui existe entre cette manière de fixer la position d'une droite et celle qui consiste à déterminer un point par ses coordonnées polaires, il paraît convenable d'appeler ϱ et φ les *coordonnées tangentielles polaires* de la droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, savoir ϱ

son *rayon vecteur* et φ sa *dévi*ation.

La transformation des coordonnées tangentielles rectilignes en coordonnées tangentielles polaires est donnée par les formules

$$a = \frac{\varrho}{\cos \varphi} = -\frac{1}{u},$$

$$b = \frac{\varrho}{\sin \varphi} = -\frac{1}{v},$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} u = -\frac{\cos \varphi}{\varrho} \\ v = -\frac{\sin \varphi}{\varrho} \end{cases}$$

et la transformation inverse par

$$(2) \quad \varrho = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \cos \varphi = -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \sin \varphi = -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{u}.$$

L'équation $\varrho = \text{const.}$ représente une circonférence du rayon ϱ comme l'enveloppe de toutes ses tangentes. L'équation $\varphi = \text{const.}$ signifie un point à l'infini dans la direction perpendiculaire à φ . On peut envisager ce point comme l'enveloppe de toutes les droites perpendiculaires à la direction φ . Les deux équations ensemble déterminent par conséquent (le signe de ϱ étant donné) une tangente particulière de la circonférence.

En faisant les substitutions (1) dans l'équation

$$ux + vy + 1 = 0,$$

il vient

$$(3) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varrho$$

et si l'on pose encore

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi,$$

où r et ψ sont les coordonnées ponctuelles polaires du point (x, y) :

$$(4) \quad r \cos (\psi - \varphi) = \varrho.$$

Les équations (3) et (4) représentent indifféremment soit en coordonnées tangentielles un point (x, y) ou (r, ψ) , soit en coordonnées ponctuelles une droite (ϱ, φ) , suivant qu'on y regarde x et y , r et ψ ou ϱ et φ comme constants.

Lorsqu'il existe entre ϱ et φ une équation $f(\varrho, \varphi) = 0$, les équations (3) et (4) représentent pour chaque couple de valeurs de ϱ et φ une droite; l'ensemble de ces droites enveloppe une courbe $F(x, y) = 0$ ou $\Phi(r, \psi) = 0$ dont l'équation en coordonnées tangentielles est précisément $f(\varrho, \varphi) = 0$.

Si, au contraire, on envisage x et y , r et ψ comme paramètres variables, liés entre eux par les équations $F(x, y) = 0$ ou $\Phi(r, \psi) = 0$, les équations (3) et (4) donnent pour chaque couple de valeurs de x et y ou de r et ψ , un point, et l'ensemble de ces points forme un lieu géométrique, savoir $F(x, y) = 0$ ou $\Phi(r, \psi) = 0$.

27. *Transformation des coordonnées ponctuelles en coordonnées tangentielles polaires et vice-versa.* Soit

$$f(\varrho, \varphi) = 0$$

l'équation d'une courbe. Une tangente quelconque de cette courbe est donnée en coordonnées ponctuelles par

$$(1) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varrho.$$

En différentiant cette dernière équation par rapport à φ , on obtient pour la tangente infiniment voisine

$$(2) \quad -x \sin \varphi + y \cos \varphi = \frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

De (1) et (2) on tire les formules de transformation

$$\begin{cases} x = r \cos \psi = \varrho \cos \varphi - \frac{d\varrho}{d\varphi} \sin \varphi, \\ y = r \sin \psi = \varrho \sin \varphi + \frac{d\varrho}{d\varphi} \cos \varphi, \end{cases}$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \psi = \frac{\varrho \sin \varphi + \frac{d\varrho}{d\varphi} \cos \varphi}{\varrho \cos \varphi - \frac{d\varrho}{d\varphi} \sin \varphi},$$

$$r^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2.$$

Dans ces formules ϱ est considéré comme fonction de φ ; en conséquence, il suffit d'éliminer des deux premières équations le paramètre φ pour obtenir l'équation de la courbe sous une des formes $F(x, y) = 0$ et $\Phi(r, \psi) = 0$.

Lorsque la courbe est donnée en coordonnées ponctuelles rectilignes

$$F(x, y) = 0$$

l'équation

$$(1) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varrho,$$

interprétée en coordonnées tangentielles, représente un point de la courbe. Le point infiniment voisin satisfait à l'équation

$$(3) \quad \cos \varphi + \sin \varphi \frac{dy}{dx} = 0.$$

De ces deux équations il suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho = \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \\ \cotg \varphi = -\frac{dy}{dx}. \end{array} \right.$$

En éliminant x (y étant considéré comme fonction de x) de ces dernières équations, on arrive à l'équation $f(\varrho, \varphi) = 0$ de la courbe en coordonnées tangentielles polaires.

Enfin, si l'on veut passer des coordonnées ponctuelles polaires aux coordonnées tangentielles polaires, on partira des équations

$$r \cos (\psi - \varphi) = \varrho,$$

$$\frac{dr}{d\psi} \cos (\psi - \varphi) - r \sin (\psi - \varphi) = 0,$$

desquelles on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{r \sin \psi - \frac{dr}{d\psi} \cos \psi}{r \cos \psi + \frac{dr}{d\psi} \sin \psi}. \end{array} \right.$$

Pour les applications qui vont suivre, il sera utile d'établir les équations en coordonnées tangentielles polaires de quelques courbes bien connues.

Coord. ponct.

Coord. tg. pol.

1) *Le point.*

$$x = a, y = b, \text{ ou}$$

$$au + bv + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = a \cos \varphi + b \sin \varphi.$$

2) *La circonférence.*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = a^2. \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = a + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi.$$

3) *La parabole.*

$$y^2 = 2p \left(\frac{p}{2} - x \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho \cos \varphi = \frac{1}{2} p.$$

4) *L'ellipse.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

5) *L'hyperbole équilatère.*

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = a \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

6) *La spirale logarithmique.*

$$r = e^{k\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = \cos \vartheta e^{(\vartheta + \varphi) \operatorname{tg} \vartheta},$$

où $\vartheta = \operatorname{arctg} k$.

7) *La développante du cercle.*

$$\begin{cases} x = a (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda) \\ y = a (\lambda \sin \lambda + \cos \lambda) \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = a\varphi.$$

8) *La cycloïde.*

$$\begin{cases} x = a (\cos \lambda - 1) \\ y = a (\lambda + \sin \lambda) \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = 2a\varphi \sin \varphi.$$

9) *L'épicycloïde.*

$$\begin{cases} x = -a \sin \lambda + b \sin \frac{a}{b} \lambda \\ y = a \cos \lambda - b \cos \frac{a}{b} \lambda \end{cases} \quad . \quad . \quad \varrho = (a + b) \sin \left(\frac{a-b}{a+b} \varphi \right),$$

où le rayon du cercle fixe $= (a - b)$ et celui du cercle mobile $= b$. Lorsque b est négatif, la courbe devient une hypocycloïde, par exemple pour $a = \frac{3}{4} c$, $b = -\frac{1}{4} c$

10) *L'astroïde.*

$$\begin{cases} x = c \cos^3 \lambda \\ y = c \sin^3 \lambda \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = \frac{1}{2} c \sin 2\varphi.$$

Observation. On reconnaît immédiatement que si $f(\varrho, \varphi) = 0$ est l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles polaires, $f(r, \psi) = 0$ sera celle de sa podaire par rapport à l'origine. En d'autres termes : Le problème de trouver l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles polaires est identique avec celui de trouver en coordonnées ponctuelles polaires la podaire de cette courbe par rapport à l'origine.

Interprété à ce point de vue, le tableau précédent donne les podaires des courbes dont il y est question.

28. *Interprétation géométrique de la dérivée $\frac{d\varrho}{d\varphi}$. Asymptotes.* De l'équation

$$r^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2$$

il suit que la valeur absolue de $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ est un côté d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le rayon vecteur r du point de contact et l'autre côté le rayon vecteur ϱ de la tangente (ϱ, φ) (fig. 10). La dérivée $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ mesure par conséquent sur la tangente la distance du pied de la perpendiculaire ϱ au point de contact. Vu de l'origine, le point de contact se trouve à gauche ou à droite de la perpendiculaire ϱ , suivant que la valeur absolue de ϱ augmente ou diminue avec les angles croissants.

La tangente (ϱ, φ) est une *asymptote* toutes les fois que $\frac{d\varrho}{d\varphi}$ devient infiniment grand, sans qu'on ait en même temps $\varrho = \infty$.

29. Les coordonnées tangentielles se prêtent facilement à la résolution de certains problèmes élémentaires tels que les suivants : 1) On demande une courbe pour laquelle la dis-

tance du point de contact d'une tangente quelconque au pied de la perpendiculaire, abaissée de l'origine sur cette tangente, soit une fonction donnée $F(\varrho, \varphi)$ de ϱ et φ .

L'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = F(\varrho, \varphi)$$

fournit la solution.

2) On cherche une courbe telle que le rayon vecteur du point de contact d'une tangente (ϱ, φ) fasse avec celui de la tangente un angle qui soit une fonction donnée $F(\varrho, \varphi)$ de ϱ et φ .

Comme $\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\varphi}$, ce problème conduit à l'équation différentielle

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\varphi} = \operatorname{tg}[F(\varrho, \varphi)].$$

3) On demande une courbe telle que le rayon vecteur du point de contact d'une tangente (ϱ, φ) soit une fonction donnée $F(\varrho, \varphi)$ de ϱ et φ . Ce problème exige la résolution de l'équation différentielle

$$F(\varrho, \varphi) = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}.$$

Etc.

Exemple 1. Trouver une courbe pour laquelle la distance du point de contact d'une tangente quelconque au pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette tangente soit constante $= a$.

On obtient immédiatement

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = a,$$

d'où

$$\varrho = a\varphi + C. \text{ (Développante du cercle.)}$$

Exemple 2. On veut que cette distance soit toujours $= n\rho$. Alors il vient

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = n\rho,$$

$$\rho = Ce^{n\varphi}. \quad (\text{Spirale logarithmique}).$$

Exemple 3. On cherche une courbe pour laquelle $\psi = n\varphi$. Dans ce cas on est conduit à l'équation différentielle

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} = \operatorname{tg} (n-1) \varphi,$$

dont l'intégrale est

$$\rho = \frac{C}{\frac{n-1}{\sqrt{\cos(n-1)\varphi}}}.$$

Pour $n=1$ cette équation représente la circonférence $\rho=C$, pour $n=2$ une parabole, rapportée à son foyer.

Exemple 4. Quelle est la courbe qui satisfait à la relation $r = n\rho$?

La réponse est donnée par l'intégrale de l'équation différentielle

$$n\rho = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2},$$

savoir par

$$\rho = Ce^{\varphi \sqrt{n^2-1}}. \quad (\text{Spirale logarithmique}).$$

30. *Différentielle de l'arc. Angle de contingence. Rayon de courbure.* En différentiant les équations (Cf. n° 27)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi - \frac{d\rho}{d\varphi} \sin \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi + \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \varphi, \end{cases}$$

par rapport à φ , on obtient

$$\begin{cases} dx = - \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} \right) \sin \varphi \, d\varphi, \\ dy = \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} \right) \cos \varphi \, d\varphi, \end{cases}$$

d'où il suit pour la *différentielle de l'arc*

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} \right) d\varphi.$$

Comme $\tau = 90^\circ + \varphi$ (fig. 10), *l'angle de contingence* est

$$d\tau = d\varphi.$$

Pour le *rayon de courbure* R, enfin, on trouve l'expression simple

$$R = \frac{ds}{d\tau} = \varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}.$$

Un observateur, placé au point de contact d'une tangente (ϱ, φ) de manière à avoir le point infiniment voisin devant lui, aura toujours le centre de courbure à sa gauche. En d'autres termes : Le centre de courbure se trouve du même côté de la tangente que l'origine ou de l'autre côté, suivant que ϱ et R sont du même signe ou de signes différents.

Exemple 1. On demande une courbe dont la longueur de l'arc s , compté à partir de $\varphi = 0$, soit proportionnelle au rayon vecteur ϱ avec la condition que pour $\varphi = 0$, $\frac{d\varrho}{d\varphi} = a$.

$$\text{Comme } s = \int_0^\varphi \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} \right) d\varphi, \text{ on a}$$

$$\int_0^\varphi \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} \right) d\varphi = n\varrho,$$

d'où par différentiation

$$\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = n \frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

Pour intégrer cette équation différentielle linéaire, nous distinguons trois cas :

1) $n > 2$. Dans ce cas l'intégrale devient

$$\varrho = Ae^{\lambda_1 \varphi} + Be^{\lambda_2 \varphi},$$

où
$$\lambda_1 = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2}.$$

Les conditions initiales donnent pour la détermination des constantes arbitraires A et B

$$A + B = 0, \quad \lambda_1 A + \lambda_2 B = a,$$

d'où
$$A = -B = \frac{a}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

en sorte que l'équation de la courbe demandée est

$$\varrho = \frac{a}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 \varphi} - e^{\lambda_2 \varphi}).$$

2) $n < 2$. L'intégrale générale de l'équation différentielle est dans ce cas

$$\varrho = e^{\frac{1}{2}n\varphi} \left[A \cos \frac{\sqrt{4-n^2}}{2} \varphi + B \sin \frac{\sqrt{4-n^2}}{2} \varphi \right].$$

En introduisant les conditions initiales, il vient

$$A = 0, \quad B = \frac{2a}{\sqrt{4-n^2}}.$$

La courbe demandée a donc l'équation

$$\varrho = \frac{2a}{\sqrt{4-n^2}} \cdot e^{\frac{1}{2}n\varphi} \sin \frac{\sqrt{4-n^2}}{2} \varphi.$$

3) $n = 2$. Dans ce cas la résolvante de l'équation différentielle possède une racine double. Par conséquent l'intégrale est de la forme

$$\varrho = e^{\varphi} (A + B\varphi);$$

par suite des conditions initiales on a

$$A = 0, \quad B = a,$$

de sorte que

$$\varrho = a\varphi e^{\varphi}.$$

Exemple 2. On cherche une courbe pour laquelle $s = \frac{1}{2}a\varphi^2$, avec les conditions initiales $\varphi = 0$, $\varrho = \frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$.

Ce problème conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + \varrho = a\varphi,$$

dont l'intégrale générale est

$$\varrho = a\varphi + A \cos \varphi + B \sin \varphi.$$

Pour qu'elle satisfasse aux conditions initiales, on doit avoir

$$A = 0, \quad B = -a.$$

Par conséquent la courbe demandée a pour équation

$$\varrho = a(\varphi - \sin \varphi). \quad (\text{Développante du cercle.})$$

Exemple 3. Trouver une courbe dont le rayon de courbure soit proportionnel au rayon vecteur ϱ . ($R = n\varrho$).

Comme $R = \varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}$, il s'agit de résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} = (n - 1)\varrho.$$

Suivant que 1) $n > 1$, 2) $n < 1$, 3) $n = 1$, l'intégrale devient

$$1) \quad \varrho = A e^{\varphi \sqrt{n-1}} + B e^{-\varphi \sqrt{n-1}},$$

$$2) \quad \varrho = A \cos(\varphi \sqrt{1-n}) + B \sin(\varphi \sqrt{1-n}),$$

$$3) \quad \varrho = A\varphi + B.$$

Dans le second cas la courbe est une épicycloïde, par exemple pour $n = \frac{8}{9}$ une cardioïde, pour $n = -3$ une astroïde, dans le troisième une développante du cercle et pour $A = 0$ une circonférence.

31. Relations entre une courbe et sa podaire. Si $f(\varrho, \varphi) = 0$ est l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles polaires, on sait que $f(\varrho, \varphi) = 0$ peut aussi être envisagée comme l'équation en coordonnées ponctuelles polaires de la podaire par rapport à l'origine de la courbe considérée. (Cf. n° 27.) Or, la normale N et la sous-normale S_n polaires d'une courbe sont respectivement

$$N = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}, \quad S_n = \frac{d\varrho}{d\varphi},$$

d'où il résulte le théorème : La normale polaire en un point quelconque P de la podaire d'une courbe est égale au rayon vecteur r du point correspondant P' de cette courbe et la sous-normale de la podaire au point P est égale à $\frac{d\varrho}{d\varphi}$, savoir égale à la distance PP' (Cf. n° 28).

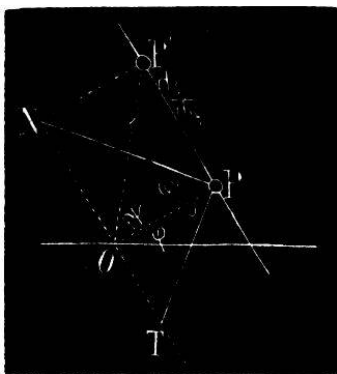


Fig. 11.

En appelant ω l'angle que fait la normale au point P de la podaire avec le rayon vecteur ϱ de ce point, il vient

$$\omega = \psi - \varphi, \quad \cotg \omega = \cotg (\psi - \varphi) = \varrho \frac{d\varphi}{d\varrho}.$$

Moyennant ces théorèmes la normale et la tangente de la podaire peuvent facilement être construites.

Le rayon de courbure R au point P' de la courbe proposée étant (Cf. n° 30)

$$R = \varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}$$

et celui de la podaire au point correspondant P

$$\begin{aligned} R' &= \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}} = \\ &= \frac{r^3}{2\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right] - \varrho\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right)} = \frac{r^3}{2r^2 - \varrho R}, \end{aligned}$$

il existe entre les deux rayons de courbure la relation linéaire

$$R' = \frac{r^3}{2r^2 - \varrho R} = \frac{r \cdot \frac{r^2}{\varrho}}{2 \frac{r^2}{\varrho} - R} \quad \text{ou} \quad \frac{R'}{r} = \frac{\frac{r^2}{\varrho}}{2 \frac{r^2}{\varrho} - R}.$$

Par conséquent, R étant connu, R' pourra être construit moyennant une quatrième proportionnelle et réciproquement.

Observation. On peut remarquer que R' devient infiniment grand, lorsque $2 \frac{r^2}{\varrho} - R = 0$. Une courbe qui satisferait en tous ses points à cette dernière condition, aurait pour podaire une droite. Or, on sait que la parabole, rapportée à son foyer, est une pareille courbe. Afin de savoir s'il n'existe pas encore d'autres courbes jouissant de la même propriété, intégrons l'équation différentielle $2 \frac{r^2}{\varrho} - R = 0$ ou

$$2. \frac{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}{\varrho} = \varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}.$$

En la mettant sous la forme

$$d\varphi = \frac{d\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)}{1 + \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2}, \text{ où } \varrho' = \frac{d\varrho}{d\varphi},$$

on obtient d'abord l'intégrale première

$$\varphi - \varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right) \text{ ou } \frac{\varrho'}{\varrho} = \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0),$$

et ensuite l'intégrale seconde

$$\log \frac{\varrho}{C} = -\log \cos(\varphi - \varphi_0)$$

qui peut s'écrire

$$\varrho = \frac{C}{\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

On reconnaît par là que la parabole est la seule courbe qui jouisse de la propriété indiquée.

L'équation $\frac{R}{2} = \frac{r^2}{\varrho}$ permet une construction très simple du rayon de courbure de la parabole. (Pl. 24, fig. 10).

32. Aire d'une courbe. En différentiant l'équation

$$\cos(\psi - \varphi) = \frac{\varrho}{r} \text{ (Cf. n° 27),}$$

il vient

$$-\sin(\psi - \varphi) (d\psi - d\varphi) = d\left(\frac{\varrho}{r}\right),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
 d\psi - d\varphi &= -\frac{d\left(\frac{\varrho}{r}\right)}{\sin(\psi - \varphi)} = -r \cdot \frac{d\left(\frac{\varrho}{r}\right)}{\frac{d\varrho}{d\varphi}} = -\frac{r \frac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho \frac{dr}{d\varphi}}{r \frac{d\varrho}{d\varphi}} d\varphi, \\
 d\psi &= \frac{\varrho}{r} \frac{\frac{dr}{d\varphi}}{\frac{d\varrho}{d\varphi}} d\varphi = \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{\varrho \frac{d\varrho}{d\varphi} + \frac{d\varrho}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}}{r \frac{d\varrho}{d\varphi}} d\varphi = \frac{\varrho \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} \right)}{r^2} d\varphi = \\
 &= \frac{\varrho R}{r^2} d\varphi.
 \end{aligned}$$

La différentielle de l'aire A d'une courbe en coordonnées ponctuelles polaires étant $dA = \frac{1}{2} r^2 d\psi$, on a

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\psi = \frac{1}{2} \varrho R d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varrho^2 + \varrho \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} \right) d\varphi.$$

Si l'on désigne par A_1 l'aire de la podaire de la courbe considérée, en sorte que

$$dA_1 = \frac{1}{2} \varrho^2 d\varphi,$$

il suit

$$\frac{dA}{dA_1} = \frac{R}{\varrho}.$$

Lorsque ce rapport est constant $= n$ (Cf. n° 30) et qu'on a soin de prendre les intégrales entre les mêmes limites, il est évident que le rapport des aires des deux courbes est le même, savoir $\frac{A}{A_1} = n$.

C'est ainsi qu'on trouve par exemple que l'aire de la développante du cercle $\varrho = a\varphi$ est égale à celle de la spirale d'Archimède $\varrho = a\varphi$, si toutefois on compte ces surfaces à partir d'une couple de points correspondants jusqu'à une autre couple de points correspondants. (Pl. 25, fig. 11.)

33. Polaires réciproques. On a vu (Cf n° 22) que le pôle d'une droite (ϱ, φ) par rapport à la circonférence $\varrho = 1$ est situé à la distance $\frac{1}{\varrho}$ de l'origine sur la perpendiculaire, abaissée de l'origine sur cette droite. Par conséquent, si $f(\varrho, \varphi) = 0$ est l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles polaires, $f(\frac{1}{\varrho}, \varphi) = 0$ sera l'équation en coordonnées ponctuelles polaires de la polaire réciproque de cette courbe par rapport à la circonférence $\varrho = 1$.

EXEMPLES.

Courbe donnée
en coord. tg. pol.

Polaire réciproque
en coord. ponct. pol.

1) *La circonférence.*

$$\varrho = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = \frac{1}{a}. \text{ (Circonf. du rayon } \frac{1}{a} \text{).}$$

2) *L'ellipse.*

$$\varrho = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \quad . \quad \varrho = \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

(Ellipse aux axes $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$).

3) *La parabole.*

$$\varrho \cos \varphi = \frac{1}{2} p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = \frac{2}{p} \cos \varphi. \text{ (Circ. du rayon } \frac{1}{p} \text{ passant par l'origine.)}$$

4) *L'hyperbole équilatère.*

$$\varrho = a \sqrt{\cos 2 \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = \frac{1}{a \sqrt{\cos 2 \varphi}}. \text{ (Autre hyp. équil.)}$$

5) *La développante du cercle.*

$$\varrho = a \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = \frac{1}{a \varphi} \text{ (Spir. hyperbolique.)}$$

6) *Courbe dont la podaire est une spirale hyperbolique.*

$$\varrho = \frac{a}{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = \frac{\varphi}{a}. \text{ (Spir. d'Archimède.)}$$

7) *Spirale logarithmique.*

$$\varrho = ae^{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varrho = \frac{1}{a} e^{-\varphi}. \text{ (Autre spir. log.)}$$

34. Courbes équidistantes. Soit $f(\varrho, \varphi) = 0$ l'équation d'une courbe. De la définition des courbes équidistantes (Cf. n° 24) il suit immédiatement que l'équation d'une courbe équidistante s'obtient en remplaçant dans $f(\varrho, \varphi) = 0$ le rayon vecteur ϱ par $\varrho \pm k$, en sorte que $f(\varrho \pm k, \varphi) = 0$ sera l'équation cherchée.

Si R est le rayon de courbure en un point quelconque de la courbe $f(\varrho, \varphi) = 0$, $R \pm k$ sera celui de la courbe équidistante au point correspondant.

La longueur de la courbe $f(\varrho, \varphi) = 0$ étant

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R d\varphi,$$

celle de l'arc correspondant de la courbe équidistante sera

$$s' = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (R \pm k) d\varphi = s \pm k(\varphi_2 - \varphi_1),$$

ce qui démontre une des propriétés principales des courbes équidistantes.

35. Développée $n^{\text{ième}}$. Les normales d'une courbe donnée

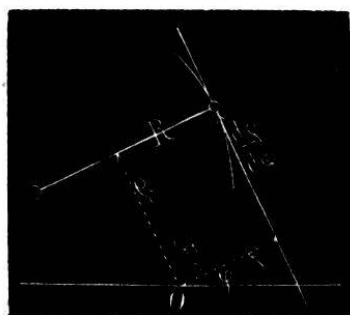


Fig. 12.

$\varrho = f(\varphi)$ étant les tangentes de la développée de cette courbe, on peut envisager la développée comme l'enveloppe de toutes les normales de la courbe proposée. Or, la normale en un point quelconque P de la courbe $\varrho = f(\varphi)$ est parallèle à la perpendiculaire, abaissée de

l'origine sur la tangente en ce point et la distance entre ces deux parallèles est égale à $\frac{d\rho}{d\varphi}$ (Cf. n° 28). De là il résulte qu'en appelant ρ_1 et φ_1 les coordonnées tangentielles polaires de la normale en question, savoir d'une tangente de la développée, on aura

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{d\varphi}, \quad \varphi_1 = \varphi + \frac{1}{2}\pi.$$

Afin d'obtenir l'équation de la développée cherchée, il suffit d'éliminer le paramètre φ de ces deux équations.

En répétant ce procédé on arrive aux équations suivantes remarquables par leur simplicité

$$\rho_n = \frac{d^n \rho}{d\varphi^n}, \quad \varphi_n = \varphi + n \cdot \frac{\pi}{2},$$

où ρ_n et φ_n désignent les coordonnées de celle des tangentes de la développée $n^{\text{ième}}$ qui correspond à la tangente (ρ, φ) de la courbe proposée. Par l'élimination de l'angle φ de ces deux équations il vient pour l'équation de la développée $n^{\text{ième}}$ correspondant à la courbe $\rho = f(\varphi)$

$$\rho_n = f^n\left(\varphi_n - n \frac{\pi}{2}\right).$$

Exemple 1. Le fait que la développée $n^{\text{ième}}$ de la courbe

$$\rho = a + a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + \dots + a_n \varphi^n$$

est évidemment la circonférence $\rho = a$, permet de reconnaître qu'en ce système de coordonnées toute courbe pour laquelle ρ est une fonction entière de φ du degré n , représente une développante $n^{\text{ième}}$ du cercle.

Exemple 2. Soit la spirale logarithmique

$$\rho = Ae^{a\varphi}.$$

La développée $n^{\text{ième}}$ de cette courbe, savoir

$$\varrho_n = Aa^n e^{a(\varphi_n - n\frac{\pi}{2})}$$

est identique avec la courbe donnée, mais placée différemment. On peut obtenir la coïncidence des deux courbes en choisissant convenablement la constante a . En effet, si m désigne un nombre entier, il suffit de tirer a de l'équation

$$Ae^{a(\varphi - 2m\pi)} = Aa^n e^{a(\varphi - n\frac{\pi}{2})}$$

ou
$$0 = n \log a + a(2m - \frac{n}{2})\pi$$

qui exprime que $\varrho_n = \varrho$ et en même temps $\frac{d\varrho_n}{d\varphi_n} = \frac{d\varrho}{d\varphi}$ pour $\varphi_n = \varphi$. Pourvu que $m > 0$ et $4m > n$ cette équation admet toujours une racine réelle. (Pl. 25, fig. 12.)

Exemple 3. Soit la cycloïde

$$\varrho = 2a[\sin \varphi + (\pi - \varphi) \cos \varphi].$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de ϱ devient

$$\frac{d^n \varrho}{d\varphi^n} = 2a[(1-n) \sin(\varphi + n\frac{\pi}{2}) + (\pi - \varphi) \cos(\varphi + n\frac{\pi}{2})].$$

En remplaçant φ par $(\varphi_n - n\frac{\pi}{2})$ dans cette équation, il suit pour la développée $n^{\text{ième}}$

$$\varrho_n = 2a[(1-n) \sin \varphi_n + (\frac{n+2}{2}\pi - \varphi_n) \cos \varphi_n].$$

On reconnaît sans difficulté que cette courbe ne diffère de la proposée que par la position.

Exemple 4. Soit l'épicycloïde

$$\varrho = (a+b) \sin\left(\frac{a+b}{a-b}\varphi\right).$$

De cette équation on tire

$$\frac{d^n \varrho}{d\varphi^n} = (a+b) \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^n \sin\left(\frac{a+b}{a-b}\varphi + n\frac{\pi}{2}\right),$$

et en substituant pour φ sa valeur $(\varphi_n - n \frac{\pi}{2})$, il vient

$$\varrho_n = (a + b) \left(\frac{a + b}{a - b} \right)^n \sin \left[\frac{(a + b) \varphi_n - nb\pi}{a - b} \right].$$

Cette dernière équation montre que la développée $n^{\text{ième}}$ de l'épicycloïde est une courbe semblable à la proposée.

36. Développante $n^{\text{ième}}$. Par le procédé inverse de celui qui a servi à déterminer la développée $n^{\text{ième}}$ d'une courbe donnée $\varrho = f(\varphi)$, on peut établir l'équation de la développante $n^{\text{ième}}$ de cette courbe.

Soient, en effet, ϱ_{-1} et φ_{-1} les coordonnées tangentielles polaires de celle des tangentes de la développante $n^{\text{ième}}$ qui correspond à la tangente (ϱ, φ) de la proposée.

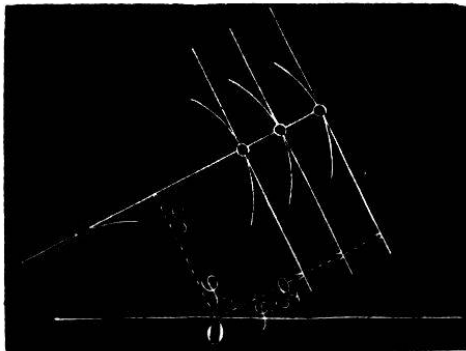


Fig. 13.

Alors on doit avoir

$$\frac{d\varrho_{-1}}{d\varphi_{-1}} = \varrho, \quad \varphi_{-1} = \varphi - \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire en observant que $d\varphi_{-1} = d\varphi$

$$\varrho_{-1} = \int \varrho d\varphi + C_1.$$

En continuant ce procédé on obtient pour la tangente $(\varrho_{-n}, \varphi_{-n})$ de la développante $n^{\text{ième}}$ correspondant à la tangente (ϱ, φ) de la courbe donnée

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho_{-n} = \int d\varphi \int d\varphi \dots \int \varrho d\varphi + C_1 \varphi^{n-1} + C_2 \varphi^{n-2} + \dots \\ \quad \quad \quad + C_{n-1} \varphi + C_n, \\ \varphi_{-n} = \varphi - n \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

L'élimination du paramètre variable φ de ces deux équations conduit à l'équation cherchée.

Exemple 1. Cherchons la développante $n^{\text{ième}}$ du point

$$\varrho = a \cos \varphi + b \sin \varphi.$$

On trouve successivement :

Pour la développante première

$$\begin{cases} \varrho_{-1} = a \sin \varphi - b \cos \varphi + C_1, \\ \varphi_{-1} = \varphi - \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

d'où $\varrho_{-1} = a \cos \varphi_{-1} + b \sin \varphi_{-1} + C_1$. (Circonférence du centre (a, b) et du rayon C_1 .)

Pour la développante seconde

$$\begin{cases} \varrho_{-2} = a \sin \varphi_{-1} - b \cos \varphi_{-1} + C_1 \varphi_{-1} + C_2, \\ \varphi_{-2} = \varphi_{-1} - \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

d'où $\varrho_{-2} = a \cos \varphi_{-2} + b \sin \varphi_{-2} + C_1 \varphi_{-2} + C_2$. (Développante du cercle.)

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Enfin pour la développante $n^{\text{ième}}$

$$\begin{aligned} \varrho_{-n} = a \cos \varphi_{-n} + b \sin \varphi_{-n} + C_1 \varphi_{-n}^{n-1} + C_2 \varphi_{-n}^{n-2} + \dots \\ + C_{n-1} \varphi_{-n} + C_n. \end{aligned}$$

Exemple 2. La développante première de l'ellipse

$$\varrho = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$$

est déterminée par

$$\varrho_{-1} = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + C_1 = a E(k, \varphi) + C_1,$$

où $E(k, \varphi)$ signifie, d'après Legendre, l'intégrale elliptique de la seconde espèce en question et $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$,

$$\varphi_{-1} = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

De ces deux équations il suit :

$$\varphi_{-1} = a E(k, \varphi_{-1} + \frac{\pi}{2}) + C_1.$$

Exemple 3. Pour la développante première de la parabole

$$\varrho = \frac{a}{\cos \varphi}$$

il vient

$$\varphi_{-1} = a \log \operatorname{tg} \left(\frac{3}{4} \pi + \frac{1}{2} \varphi_{-1} \right) + C_1.$$

37. *Podaire $n^{\text{ième}}$ d'une courbe par rapport à l'origine.* Bien que renonçant à l'emploi des coordonnées tangentielles polaires pour la solution du problème des podaires $n^{\text{ièmes}}$, le problème lui-même a paru assez important pour justifier son insertion dans ce mémoire. La solution pourrait d'ailleurs se donner avec la même facilité en coordonnées tangentielles.

Soient r, ψ les coordonnées polaires d'un point P quel-

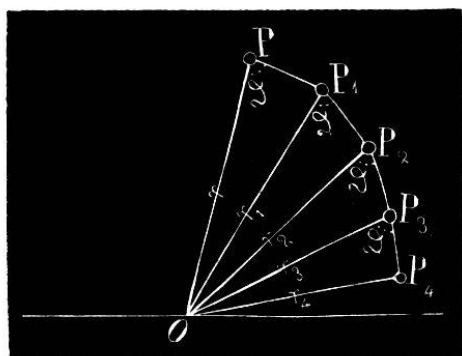


Fig. 14.

conque de la courbe proposée $r = f(\psi)$, $r_1, \psi_1; r_2, \psi_2; \dots, r_n, \psi_n$ les coordonnées des points homologues P_1, P_2, \dots, P_n respectivement de la 1^{re}, 2^{de}, ... $n^{\text{ième}}$ podaire de la courbe donnée et soit ϑ l'angle que fait la tangente au point P avec le rayon vecteur r . Alors

on sait que d'une part

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{rd\psi}{dr}$$

et d'autre part (Cf. n° 31)

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{r_1 d\psi_1}{dr_1},$$

en sorte que

$$r \frac{d\psi}{dr} = r_1 \frac{d\psi_1}{dr_1}.$$

En continuant ce même raisonnement, on obtient les égalités

$$r \frac{d\psi}{dr} = r_1 \frac{d\psi_1}{dr_1} = r_2 \frac{d\psi_2}{dr_2} = \dots = \frac{r_n d\psi_n}{dr_n}$$

qui démontrent le théorème : En des points homologues les tangentes des podaires successives d'une courbe donnée font avec les rayons vecteurs correspondants des angles égaux. De ce théorème on déduit immédiatement

$$r_1 = r \sin \vartheta,$$

$$r_2 = r_1 \sin \vartheta = r \sin^2 \vartheta,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$r_n = r_{n-1} \sin \vartheta = r \sin^n \vartheta$$

$$\text{et} \quad \psi_n = \psi - n \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right).$$

Les deux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} r_n = \frac{r}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{rd\psi} \right)^2} \right]^n} \\ \psi_n = \psi - n \operatorname{arctg} \left(\frac{dr}{rd\psi} \right) \end{array} \right.$$

résolvent le problème proposé. Dans les cas où l'élimination du paramètre ψ est possible, on obtient l'équation de la podaire $n^{\text{ième}}$ sous la forme $F(r_n, \psi_n) = 0$.

Ces équations restent encore applicables, lorsque n est zéro ou un nombre entier négatif. Pour une valeur négative de n la courbe donnée figure elle-même comme podaire $n^{\text{ième}}$ de la courbe cherchée. Dans le cas de $n = 0$ on retombe sur la courbe donnée.

Exemple. Appliquons les formules précédentes au cas

$$r = \frac{a}{\sqrt[m]{\cos m\psi}},$$

où m signifie un nombre positif ou négatif, entier ou fractionnaire. On obtient pour la podaire $n^{\text{ième}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_n = \frac{a}{\sqrt[m]{\cos m\psi} \left[\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 m\psi} \right]^n} = a (\cos m\psi)^{n - \frac{1}{m}} \\ \psi_n = \psi - n \cdot \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} m\psi) = (1 - nm) \psi, \end{array} \right.$$

d'où en éliminant l'angle ψ

$$r_n = a \left[\cos \frac{m\psi_n}{1 - nm} \right]^{n - \frac{1}{m}}.$$

Cet exemple donne lieu à de nombreux cas particuliers. Considérons-en quelques-uns.

1^{er} cas particulier. Soit $m = 1$; alors la courbe donnée

$$r = \frac{a}{\cos \psi}$$

est une droite parallèle à l'axe des Y. Sa podaire $n^{\text{ième}}$ a l'équation

$$r_n = a \left[\cos \frac{\psi_n}{1 - n} \right]^{n-1}.$$

Cette formule devenant inapplicable pour $n = 1$, ce cas doit se traiter directement. On trouve

$$\psi_1 = 0, \quad r_1 = a.$$

La podaire première de la droite est par conséquent un point sur l'axe des X.

$n = 2$, $r_2 = a \cos \psi_2$. (Circonférence du rayon $\frac{1}{2} a$ passant par le pôle.)

$n = 3$, $r_3 = \frac{1}{2} a (1 + \cos \psi_3)$. (Cardioïde.)

$$n = 4, r_4 = a \left(\cos \frac{1}{3} \psi_4 \right)^3,$$

$$n = -1, r_{-1} = \frac{a}{\left(\cos \frac{1}{2} \psi_{-1} \right)^2} = \frac{2a}{1 + \cos \psi_{-1}}. \quad (\text{Parabole.})$$

$$n = -2, r_{-2} = \frac{a}{\left(\cos \frac{1}{3} \psi_{-2} \right)^3}. \quad (\text{Pl. 25, fig. 13.})$$

2^a cas particulier. $m = 2$.

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\psi}}. \quad (\text{Hyperbole équilatère.})$$

$$r_n = a \left[\cos \left(\frac{2\psi_n}{1-2n} \right) \right]^{n-\frac{1}{2}}.$$

$$n = 1, r_1 = a \sqrt{\cos 2\psi_1}. \quad (\text{Lemniscate.})$$

$$n = 2, r_2 = a \left(\cos \frac{2}{3} \psi_2 \right)^{\frac{3}{2}},$$

$$n = -1, r_{-1} = \frac{a}{\left(\cos \frac{2}{3} \psi_{-1} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{Pl. 25, fig. 14.})$$

On peut remarquer que deux hypothèses $m = \mu$ et $m = \nu$ amènent les mêmes suites de courbes, lorsque $n = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu}$ est un nombre entier. Par exemple $\mu = 1, \nu = \frac{1}{2}$;
 $\mu = 3, \nu = \frac{4}{3}$.

Remarque. Les rayons vecteurs $r, r_1, r_2, \dots r_n$ formant une progression géométrique, et les angles correspondant $\psi, \psi - \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right), \psi - 2 \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right), \dots \psi - n \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right)$ une

progression arithmétique, il est évident que les points P, P_1, \dots, P_n d'une courbe donnée $r = f(\psi)$ et de ses n podaires successives sont situés sur une spirale logarithmique dont l'équation est

$$R = r \cdot e^{\frac{(\psi - \Psi) \log \sin \vartheta}{\frac{1}{2}\pi - \vartheta}}$$

où R et Ψ désignent les coordonnées courantes et où

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \left(\frac{r d\psi}{dr} \right).$$

38. On propose de trouver une courbe dont la podaire $n^{\text{ième}}$ soit une courbe semblable par rapport à l'origine prise pour centre de similitude.

Il y a trois cas à distinguer.

1^{er} cas. La similitude est telle que les rayons vecteurs des points homologues sont proportionnels, savoir $r_n = mr$. Dans cette équation m doit évidemment être un nombre fractionnaire.

Soit $r = f(\psi)$ l'équation de la courbe cherchée. La fonction $f(\psi)$ doit alors satisfaire à l'équation différentielle

$$mr = \frac{r}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{r d\psi} \right)^2} \right]^n},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dr}{r} = \sqrt{m^{-\frac{2}{n}} - 1} d\psi.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\log \frac{r}{C} = \psi \sqrt{m^{-\frac{2}{n}} - 1}.$$

ou

$$r = Ce^{\psi \sqrt{m^{-\frac{2}{n}} - 1}}.$$

En posant pour simplifier $\sqrt{m^{-\frac{2}{n}} - 1} = \operatorname{tg} \omega$, l'équation de la courbe cherchée devient

$$r = C e^{\psi \operatorname{tg} \omega},$$

celle de sa podaire $n^{\text{ième}}$

$$r_n = C \cos^n \omega e^{(\psi_n + n\omega) \operatorname{tg} \omega}.$$

Ces deux courbes sont des spirales logarithmiques identiques, mais placées différemment. En tournant la première d'un angle

$$\psi_0 = n \cotg \omega [\omega \operatorname{tg} \omega + \log \cos \omega]$$

autour de l'origine dans le sens des angles décroissants, on peut amener la coïncidence.

Il est presque inutile d'ajouter que pour $m = 1$ on obtient la circonférence $r = C$.

2^a cas. On demande que la similitude soit directe avec correspondance arbitraire des rayons vecteurs proportionnels.

Si dans ce cas $r = f(\psi)$ est l'équation de la courbe cherchée, celle de sa podaire $n^{\text{ième}}$ aura la forme

$$r_n = m f(\psi_n + \mu),$$

où m et μ sont des nombres réels quelconques. Pour la première de ces courbes on a

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{f(\psi)}{f'(\psi)}$$

et pour la seconde

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{f(\mu + \psi_n)}{f'(\mu + \psi_n)}.$$

Or, en des points homologues qui correspondent à

$$\psi = \psi, \quad \psi_n = \psi - n \cdot \operatorname{arctg} \frac{f'(\psi)}{f(\psi)},$$

on doit avoir $\vartheta' = \vartheta$ (Cf. n° 37), d'où il suit l'équation

$$\frac{f(\psi)}{f'(\psi)} = \frac{f[\mu + \psi - n \operatorname{arctg} \frac{f'(\psi)}{f(\psi)}]}{f'[\mu + \psi - n \operatorname{arctg} \frac{f'(\psi)}{f(\psi)}]},$$

à laquelle on peut satisfaire par l'hypothèse

$$\frac{f(\psi)}{f'(\psi)} = \pm \frac{1}{k},$$

où k désigne une constante. L'intégrale générale de cette dernière équation différentielle étant

$$\log \frac{f(\psi)}{C} = \pm k\psi \text{ ou } r = f(\psi) = Ce^{\pm k\psi},$$

on reconnaît que la courbe cherchée sera encore une spirale logarithmique. La constante k se détermine moyennant la condition qu'en des points homologues on ait (Cf. n° 37)

$$r_n = \frac{r}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{r d\psi} \right)^2} \right]^n} = \frac{Ce^{\pm k\psi}}{\sqrt{(1 + k^2)}^n}$$

ou

$$m Ce^{\pm k[\mu + \psi - n \operatorname{arctg}(\pm k)]} = \frac{Ce^{\pm k\psi}}{\sqrt{(1 + k^2)}^n},$$

d'où il suit

$$m e^{\pm k[\mu - n \operatorname{arctg}(\pm k)]} = \frac{1}{\sqrt{(1 + k^2)}^n},$$

et en prenant les logarithmes

$$\log m \pm k(\mu \mp n \operatorname{arctg} k) + \frac{n}{2} \log(1 + k^2) = 0.$$

Si l'on convient de prendre le radical $\sqrt{1 + k^2}$ positivement, m devra aussi être un nombre positif.

Discussion des deux équations

$$(1) \quad \log m + k (\mu - n \operatorname{arctg} k) + \frac{n}{2} \log (1 + k^2) = 0,$$

$$(2) \quad \log m - k (\mu + n \operatorname{arctg} k) + \frac{n}{2} \log (1 + k^2) = 0.$$

Comme (2) s'obtient de (1) en changeant k en $-k$, il est clair que si les deux équations possèdent des racines positives, elles admettront aussi des racines négatives. Il suffira, en conséquence, de constater dans les différents cas l'existence ou l'absence de racines positives.

Considérons d'abord l'équation (1)

$$f(k) = \log m + k (\mu - n \operatorname{arctg} k) + \frac{n}{2} \log (1 + k^2) = 0,$$

en n'admettant que des valeurs positives de n . Comme

$$f'(k) = \mu - n \operatorname{arctg} k$$

s'annule pour $k = \operatorname{tg} \frac{\mu}{n}$ et que

$$f''(k) = -\frac{n}{1 + k^2},$$

la fonction $f(k)$ possède un maximum pour $k = \operatorname{tg} \frac{\mu}{n}$.

Soit maintenant 1) $m > 1$, $\mu > 0$. La valeur initiale $f(0) = \log m$ étant positive, le maximum

$$\log m + \frac{n}{2} \log (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{n})$$

le sera aussi. Pour que la fonction puisse devenir négative, μ doit satisfaire à la condition $\mu < n \frac{\pi}{2}$. Alors l'équation possède une seule racine positive.

2) $m < 1$, $\mu > 0$. La valeur initiale est négative. Pour que le maximum soit positif, il faut que

$$\frac{n}{2} \log \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\mu}{n} \right) > -\log m, \text{ ou } \mu > n \arccos \sqrt[n]{m}.$$

Si on prend encore $\mu < n \frac{\pi}{2}$ en sorte que

$$\frac{\pi}{2} > \frac{\mu}{n} > \arccos \sqrt[n]{m},$$

ce qui est toujours possible, l'équation possède deux racines positives qui dans le cas limite $\mu = n \arccos \sqrt[n]{m}$ coïncident.

3) $m > 1$, $\mu < 0$. La valeur initiale est positive. La fonction décroît jusqu'à $-\infty$. Par conséquent il existe une seule racine positive, sans que μ soit soumis à une condition de limite.

4) $m < 1$, $\mu < 0$. Ce cas diffère du précédent en ce que la valeur initiale est négative, d'où il suit que l'équation (1) n'admet point de racine positive.

Si l'on applique le même raisonnement à l'équation

$$(2) f(k) = \log m - k(\mu + n \operatorname{arctg} k) + \frac{n}{2} \log(1 + k^2) = 0,$$

on trouve

1) $m > 1$, $\mu > 0$. Une racine positive; μ sans condition.

2) $m < 1$, $\mu > 0$. Point de racine positive.

3) $m > 1$, $\mu < 0$, $-\mu < n \frac{\pi}{2}$. Une racine positive.

4) $m < 1$, $\mu < 0$, $\frac{\pi}{2} > -\frac{\mu}{n} > \arccos \sqrt[n]{m}$. Deux raci-

nes positives qui coïncident à la limite $-\mu = n \arccos \sqrt[n]{m}$.

Remarque. Afin d'obtenir, pour la construction, des courbes dont on connaisse la forme à l'avance, il est plus simple de choisir k et de calculer μ . C'est ainsi que pour

$$n = 1, m = \frac{1}{2}, k = -1$$

on a trouvé $\mu = -1,1319718... = -64^\circ 51' 26''$ et par la suite

$$r = Ce^{-\psi}, r_1 = \frac{1}{2} Ce^{(1,1319... - \psi)}, \quad (\text{Pl. 25, fig. 15.})$$

tandis que les hypothèses

$$n = 2, m = 4, k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

donnaient

$$\mu = -1,8522151... = -106^\circ 7' 27'',$$

$$r = Ce^{\frac{\psi}{\sqrt{3}}}, r_2 = 4 Ce^{\frac{\psi - 1,8522...}{\sqrt{3}}}. \quad (\text{Pl. 25, fig. 16.})$$

3^{me} cas. On demande que la similitude soit inverse.

En suivant un raisonnement analogue à celui qui a été employé dans le second cas, on trouvera que la circonférence seule répond à toutes les conditions du problème.

39. Comme dernière application des coordonnées tangentielles polaires on pose le problème : Trouver une courbe dont la développée $n^{\text{ième}}$ soit une courbe semblable par rapport à l'origine prise pour centre de similitude.

Ce problème a beaucoup d'analogie avec un problème plus général concernant les développées qui a été traité récemment par M. *Haton de la Goupillière* dans son mémoire : *Recherche sur les développées des divers ordres*. (Annales de la Soc. sc. de Bruxelles, 2^e année, 1877.) Aussi n'en donnons-nous ici la solution qu'à titre d'application in-

intéressante des coordonnées tangentielles polaires. La perte de généralité provenant de ce qu'on a disposé d'avance du centre de similitude, trouve en quelque sorte une compensation dans l'avantage que la solution proposée se prête à la construction sans intégration préalable. Quant au mode de solution, nous ne saurions mieux faire que de suivre l'analyse élégante de M. H. de la Goupillière.

Il convient de distinguer les cas de la similitude inverse et de la similitude directe, tout en laissant arbitraire la correspondance des rayons vecteurs proportionnels.

I. *Similitude inverse.* Soit $\varrho = f(\varphi)$ l'équation de la courbe cherchée. Celle de sa développée $n^{\text{ième}}$ aura la forme

$$\varrho_n = m f(\mu - \varphi_n),$$

où m et μ signifient des nombres quelconques positifs ou négatifs. Or, on sait (Cf. n° 35) qu'en des points correspondants on doit avoir

$$\varrho_n = \frac{d^n \varrho}{d\varphi^n}, \quad \varphi_n = \varphi + n \frac{\pi}{2}.$$

Si donc on donne à φ_n la valeur $\varphi + n \frac{\pi}{2}$, il vient

$$(1) \quad \varrho_n = f^n(\varphi) = m f(\mu - n \frac{\pi}{2} - \varphi),$$

et en différentiant cette équation encore n fois

$$(2) \quad f^{2n}(\varphi) = \varepsilon^n m f^n(\mu - n \frac{\pi}{2} - \varphi),$$

où ε est mis pour -1 . C'est une équation aux différences mêlées. Pour la ramener à une équation différentielle ordinaire, remplaçons φ par $\mu - n \frac{\pi}{2} - \varphi$, ce qui donne

$$f^{2n}(\mu - n \frac{\pi}{2} - \varphi) = \varepsilon^n m f^n(\varphi)$$

et moyennant (1)

$$f^{2n}(\mu - n \frac{\pi}{2} - \varphi) = \varepsilon^n m^2 f(\mu - n \frac{\pi}{2} - \varphi).$$

En remplaçant de nouveau $\mu - n \frac{\pi}{2} - \varphi$ par φ , on obtient l'équation différentielle linéaire de l'ordre $2n$

$$(3) \quad f^{2n}(\varphi) = \varepsilon^n m^2 f(\varphi),$$

dont l'intégration n'offre aucune difficulté.

En effet, la résolvante de (3) est

$$\lambda^{2n} = \varepsilon^n m^2 = e^{n\pi i} m^2, \text{ où } i = \sqrt{-1}.$$

On en tire

$$\lambda_k = r e^{\alpha_k i}, \quad r = \sqrt[n]{[m]},$$

où $[m]$ désigne la valeur absolue de m et

$$\alpha_k = \frac{n + 2(k-1)}{2n} \pi.$$

L'intégrale générale de l'équation (3) est par conséquent

$$\varphi = f(\varphi) = \sum_1^{2n} A_k e^{\lambda_k \varphi}.$$

En observant que $\lambda_{k''} = -\lambda_{k'}$, lorsque $k'' = n + k'$, on peut écrire

$$(4) \quad \varphi = \sum_1^n (A_k e^{\lambda_k \varphi} + B_k e^{-\lambda_k \varphi}).$$

Or, l'intégrale (4) devant satisfaire non-seulement à l'équation (3), mais aussi à l'équation différentielle (1) qui est de l'ordre n , il s'ensuit que n des constantes A_k et B_k ne sont pas arbitraires. L'équation (1) servira à les déterminer. En y remplaçant $f(\varphi)$ par la valeur trouvée, il vient

$$\begin{aligned} & \sum_1^n \lambda_k^n (A_k e^{\lambda_k \varphi} + \varepsilon^n B_k e^{-\lambda_k \varphi}) = \\ & = m \sum_1^n [A_k e^{\lambda_k (\mu - n \frac{\pi}{2} - \varphi)} + B_k e^{-\lambda_k (\mu - n \frac{\pi}{2} - \varphi)}]. \end{aligned}$$

Dans ces deux sommes les termes d'indices différents ne permettent plus de réduction entre eux, on peut donc se borner à comparer les termes généraux, ce qui donne

$$\begin{aligned} \lambda_k^n (A_k e^{\lambda_k \varphi} + \varepsilon^n B_k e^{-\lambda_k \varphi}) = \\ = m [A_k e^{\lambda_k (\mu - n \frac{\pi}{2})} e^{-\lambda_k \varphi} + B_k e^{-\lambda_k (\mu - n \frac{\pi}{2})} e^{\lambda_k \varphi}], \end{aligned}$$

$$\lambda_k^n A_k = m B_k e^{-\lambda_k (\mu - n \frac{\pi}{2})}$$

$$\lambda_k^n \varepsilon^n B_k = m A_k e^{\lambda_k (\mu - n \frac{\pi}{2})}.$$

De l'une ou de l'autre de ces dernières équations il suit

$$B_k = \frac{\lambda_k^n}{m} e^{\lambda_k (\mu - n \frac{\pi}{2})} \cdot A_k.$$

Comme
$$\frac{\lambda_k^n}{m} = \frac{[m]}{m} e^{n \alpha_k i},$$

on a maintenant

$$\varrho = \sum_1^n A_k [e^{\lambda_k \varphi} \pm e^{n \alpha_k i + \lambda_k (\mu - n \frac{\pi}{2} - \varphi)}],$$

où l'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que m est positif ou négatif.

Afin de faire disparaître l'imaginaire de l'intégrale ϱ , il faut distinguer les cas de n pair et de n impair.

a) Lorsque n est un nombre *pair*, chaque terme de la somme \sum_1^n est accompagné d'un terme conjugué, sauf toute-

fois les deux qui correspondent à $k = 1$ et à $k = \frac{n}{2} + 1$.

Si l'on considère ces deux termes en premier lieu, on a

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \pi, \quad \lambda_1 = r e^{\frac{1}{2} \pi i} = r i$$

et

$$\alpha_{\frac{1}{2}n+1} = \pi, \quad \lambda_{\frac{1}{2}n+1} = r e^{\pi i} = -r.$$

Par conséquent, le premier terme de la somme devient

$$\begin{aligned} & A_1 [e^{r\varphi i} \pm e^{\beta i} e^{-r\varphi i}] = \\ &= 2 A_1 [(\cos r\varphi + i \sin r\varphi) \pm e^{\beta i} (\cos r\varphi - i \sin r\varphi)] = \\ &= 2 A_1 [(1 \pm e^{\beta i}) \cos r\varphi + i(1 \mp e^{\beta i}) \sin r\varphi], \end{aligned}$$

où
$$\beta = n \frac{\pi}{2} + r(u - n \frac{\pi}{2}).$$

Soit, pour simplifier

$$2 A_1 (1 \pm e^{\beta i}) = C,$$

d'où

$$\begin{aligned} 2 A_1 &= \frac{C}{1 \pm e^{\beta i}}, \quad 2i A_1 (1 \mp e^{\beta i}) = iC \cdot \frac{1 \mp e^{\beta i}}{1 \pm e^{\beta i}} = \\ &= iC \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta i} \mp e^{\frac{1}{2}\beta i}}{e^{-\frac{1}{2}\beta i} \pm e^{\frac{1}{2}\beta i}} = \begin{cases} C \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \\ -C \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \beta \end{cases}, \end{aligned}$$

suivant qu'il s'agit des signes supérieurs ou des signes inférieurs.

En introduisant ces valeurs, le premier terme prend la forme

$$C \left[\begin{matrix} \cos r\varphi \\ + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \\ - \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \beta \end{matrix} \right\} \sin r\varphi = \begin{cases} \frac{C}{\cos \frac{1}{2} \beta} \cos (r\varphi - \frac{1}{2} \beta) \\ - \frac{C}{\sin \frac{1}{2} \beta} \sin (r\varphi - \frac{1}{2} \beta), \end{cases}$$

ou si l'on modifie encore la constante arbitraire

$$= C_1 \begin{cases} \cos (r\varphi - \frac{1}{2} \beta) \\ \sin (r\varphi - \frac{1}{2} \beta). \end{cases}$$

Le terme correspondant à l'indice $(\frac{1}{2}n + 1)$ se présente sans transformation préalable sous la forme réelle

$$C_{\frac{1}{2}n+1} \left[e^{-r\varphi} \pm e^{-r(\mu - n\frac{\pi}{2})} e^{r\varphi} \right].$$

Quant aux autres $(n-2)$ termes, il suffira pour amener la forme réelle de faire la somme et la différence de deux termes conjugués (abstraction faite des constantes arbitraires), tels que

$$\begin{aligned} e^{\lambda_k \varphi} \pm e^{n\alpha_k i + \lambda_k (\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi)} &= \\ &= e^{r\varphi (\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)} \pm e^{n\alpha_k i + r(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k) (\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi)} \\ e^{\lambda'_k \varphi} \pm e^{-n\alpha_k i + \lambda'_k (\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi)} &= \\ &= e^{r\varphi (\cos \alpha_k - i \sin \alpha_k)} \pm e^{-n\alpha_k i + r(\cos \alpha_k - i \sin \alpha_k) (\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi)}, \end{aligned}$$

où

$$\lambda'_k = r e^{-\alpha_k i}$$

signifie le nombre conjugué de λ_k . En changeant encore convenablement les constantes, on aura remplacé les termes complexes aux indices k et $n - (k - 2)$ par l'expression réelle

$$\begin{aligned} C_k \left\{ e^{r\varphi \cos \alpha_k} \cos (r\varphi \sin \alpha_k) \pm e^{r \cos \alpha_k (\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi)} \right. \\ \left. \cos [n\alpha_k + r(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi) \sin \alpha_k] \right\} + \\ + D_k \left\{ e^{r\varphi \cos \alpha_k} \sin (r\varphi \sin \alpha_k) \pm e^{r \cos \alpha_k (\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi)} \right. \\ \left. \sin [n\alpha_k + r(\mu - n\frac{\pi}{2} - \varphi) \sin \alpha_k] \right\}. \end{aligned}$$

Si l'on désigne, pour abréger, cette expression par $F(\varphi, k)$, la forme définitive de φ devient

$$(5) \quad \varrho = C_1 \begin{cases} \cos(r\varphi - \frac{1}{2}\beta) \\ \sin(r\varphi - \frac{1}{2}\beta) \end{cases} + C_{\frac{1}{2}n+1} \left[e^{-r\varphi} \pm e^{-r(\mu - n\frac{\pi}{2})} e^{r\varphi} \right] + \sum_{\frac{1}{2}n}^{\frac{1}{2}n} F(\varphi, k).$$

Dans cette équation, où les lettres r , α_k et β ont la signification suivante

$$r = \sqrt[n]{[m]}, \quad \alpha_k = \frac{n+2(k-1)}{2n} \pi, \quad \beta = r\mu + (1-r)n\frac{\pi}{2}$$

on prend les signes supérieurs ou inférieurs, suivant que m est positif ou négatif.

b) Lorsque n est un nombre *impair*, chaque terme de la somme \sum_1^n se trouve accompagné d'un terme conjugué et il n'y a que le premier qui doit être considéré séparément. En procédant de la même manière que dans le cas a) et en maintenant la signification des lettres r , α_k et $F(\varphi, k)$, on obtient

$$(6) \quad \varrho = C_1 \begin{cases} \cos(r\varphi - \frac{1}{2}\beta) \\ \sin(r\varphi - \frac{1}{2}\beta) \end{cases} + \sum_{\frac{1}{2}(n+1)}^{\frac{1}{2}(n+1)} F(\varphi, k).$$

Dans le cas le plus simple, $n=1$, $r=1$, la courbe se réduit à un point; pour $n=1$, $r \gtrless 1$ elle devient une épicycloïde.

II. *Similitude directe*. Si dans ce cas $\varrho = f(\varphi)$ est l'équation de la courbe cherchée, celle de la développée $n^{\text{ième}}$ de cette courbe sera

$$\varrho_n = mf(\mu + \varphi_n).$$

Or, comme

$$\varrho_n = \frac{d^n \varrho}{d\varphi^n} \text{ pour } \varphi_n = \varphi + n \frac{\pi}{2},$$

on est conduit à l'équation différentielle de l'ordre n

$$(1) \quad f^n(\varphi) = mf\left(\mu + n \frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

La résultante de (1) étant une équation transcendante

$$\lambda^n = m \cdot e^{\lambda(\mu + n \frac{\pi}{2})},$$

elle ne pourra en général être résolue que par approximation. Cependant, cela n'arrive pas lorsque $\mu = -n \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsqu'on admet que les rayons vecteurs proportionnels ϱ et ϱ_n appartiennent à des points homologues des deux courbes. En effet, dans cette hypothèse la résolvante prend la forme

$$\lambda^n = m,$$

et l'intégrale générale de (1) devient

$$(2) \quad \varrho = \sum_1^n A_k e^{i k \varphi},$$

où pour une valeur positive de m

$$r = \sqrt[n]{m}, \quad \alpha_k = \frac{2(k-1)}{n} \pi, \quad \lambda_k = r e^{i \alpha_k}$$

et pour une valeur négative de m

$$r = \sqrt[n]{[m]}, \quad \alpha_k = \frac{2k-1}{n} \pi, \quad \lambda_k = r e^{i \alpha_k}.$$

Pour débarrasser l'intégrale (2) des imaginaires, il faudra distinguer entre les valeurs paires et impaires de n . Moyennant le procédé connu que nous venons d'appliquer sous I) et en désignant, pour plus de brièveté, l'expression

$$C_k e^{r \varphi \cos \alpha_k} \cos(r \varphi \sin \alpha_k) + D_k e^{r \varphi \cos \alpha_k} \sin(r \varphi \sin \alpha_k)$$

par $F(\varphi, k)$, on trouvera

1) pour $m > 0$ et n pair

$$\varrho = C_1 e^{r\varphi} + C_{\frac{1}{2}n+1} e^{-r\varphi} + \sum_2^{\frac{1}{2}n} F(\varphi, k);$$

2) pour $m > 0$ et n impair

$$\varrho = C_1 e^{r\varphi} + \sum_2^{\frac{1}{2}(n+1)} F(\varphi, k);$$

3) pour $m < 0$, n pair

$$\varrho = \sum_1^{\frac{1}{2}n} F(\varphi, k);$$

4) pour $m < 0$, n impair

$$\varrho = C_{\frac{1}{2}(n+1)} e^{-r\varphi} + \sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} F(\varphi, k).$$

Parmi les courbes représentées par ces quatre équations se trouvent comme cas particuliers le point, la spirale logarithmique, l'épicycloïde, etc.

40. Si l'on demande une courbe dont la développée $n^{\text{ième}}$ soit une courbe semblable, en faisant abstraction du centre de similitude, quelques légères modifications dans la méthode employée au numéro précédent, suffiront pour résoudre ce problème plus général.

Une première modification consiste à rapporter les deux courbes, savoir la courbe cherchée et sa développée $n^{\text{ième}}$, à deux systèmes différents de coordonnées tangentielles polaires dont les axes sont parallèles.

Soit alors, par exemple, dans le cas de la similitude inverse $\varrho = f(\varphi)$ l'équation de la courbe cherchée, rapportée au premier système de coordonnées et

$$\varrho_n^* = mf(\mu - \varphi_n)$$

$$(4) \quad m^2 \varepsilon^n [f(\varphi) + f''(\varphi)] = f^{2n+2}(\varphi) + f^{2n}(\varphi).$$

La résolvante de cette équation étant

$$(5) \quad (\lambda^2 + 1) (\lambda^{2n} - m^2 \varepsilon^n) = 0$$

on voit que l'intégration n'offre aucune difficulté. L'intégrale générale contiendra $(2n + 2)$ constantes, dont $(n + 2)$ peuvent être déterminées à l'aide des équations (1) et (3).

Exemple. Dans le cas le plus simple

$$m = 1, \quad n = 1, \quad \mu = 0,$$

où l'on exige que la développée première soit égale à la courbe cherchée, les équations (1), (3), (4), (5) prennent la forme

$$(1^a) \quad f\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = f'(\varphi) + a \sin \varphi - b \cos \varphi,$$

$$(3^a) \quad f'''(\varphi) + f'(\varphi) - f''\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - f\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 0,$$

$$(4^a) \quad f^{IV}(\varphi) + 2f''(\varphi) + f(\varphi) = 0,$$

$$(5^a) \quad (\lambda^2 + 1)^2 = 0.$$

La résolvante (5^a) possède les racines doubles

$$\lambda = +i \quad \text{et} \quad \lambda = -i.$$

Par conséquent l'intégrale générale de (4^a) sera

$$\varphi = f(\varphi) = (A + B\varphi) \cos \varphi + (C + D\varphi) \sin \varphi.$$

En substituant cette valeur de $f(\varphi)$ dans l'équation (3^a) on trouve $B = 0$ et (1^a) donne encore

$$D = -a, \quad C = \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{2} a\pi\right),$$

en sorte que l'équation de la courbe cherchée devient

$$\varphi = A \cos \varphi + \left[\frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{2} a\pi\right) - a\varphi \right] \sin \varphi$$

ETUDE DES COURBES PLANES

H. AMSTEIN.

Bull. Soc. Vaud. Sc. nat.-Vol. XV.-Pl. XXIV.

Fig. 1.

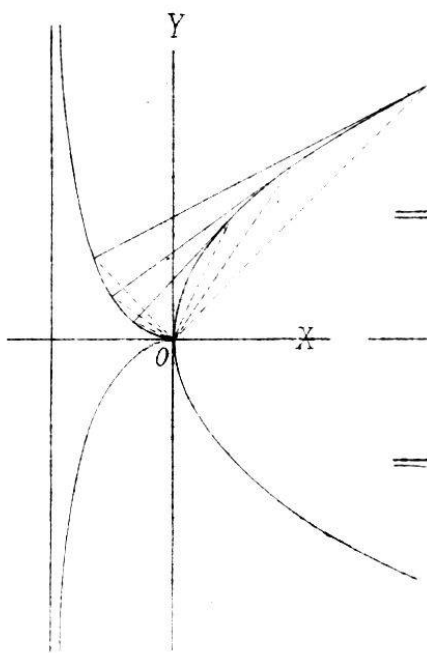


Fig. 2.

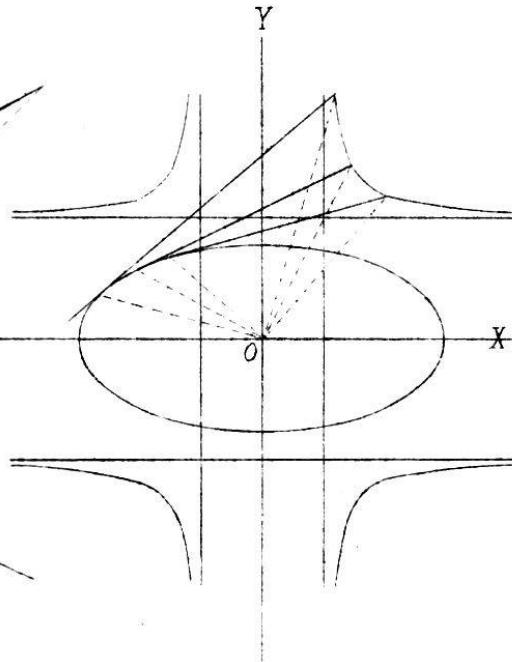


Fig. 3.

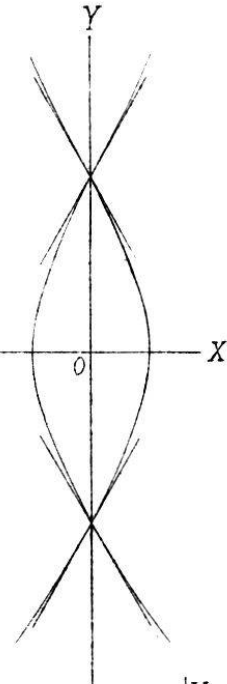


Fig. 4.

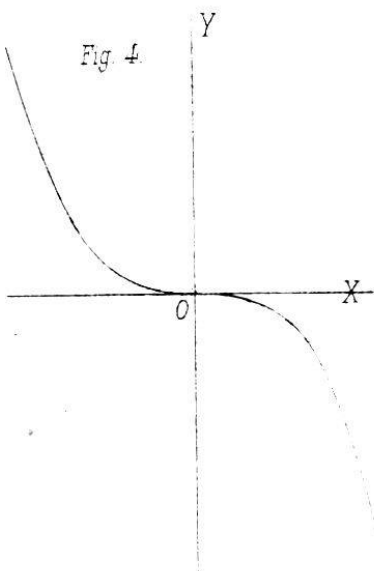


Fig. 5.

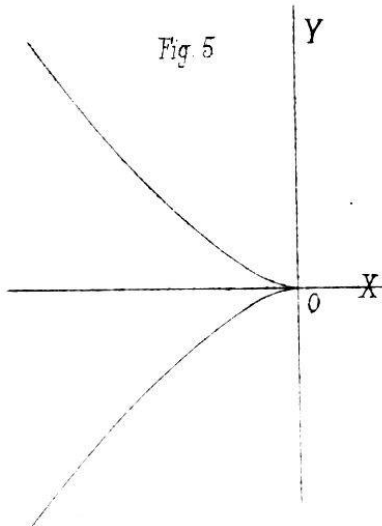


Fig. 6.

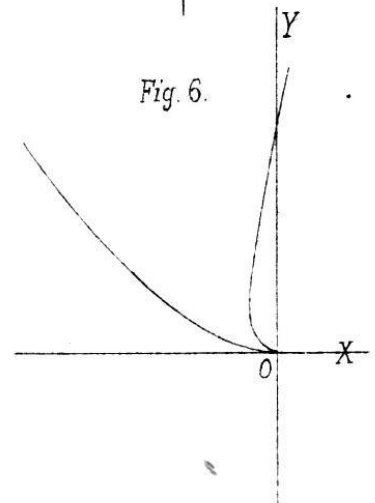


Fig. 7.

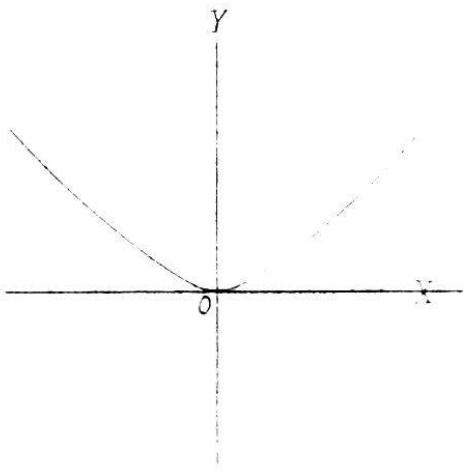


Fig. 8.

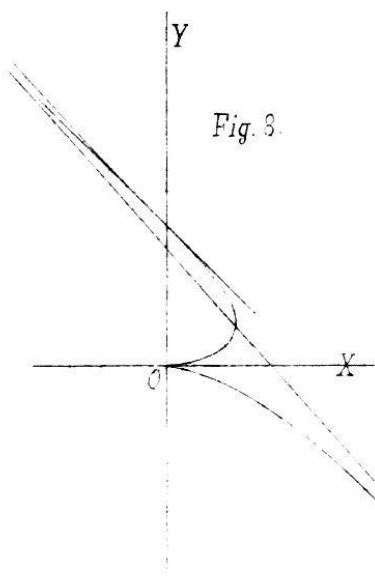
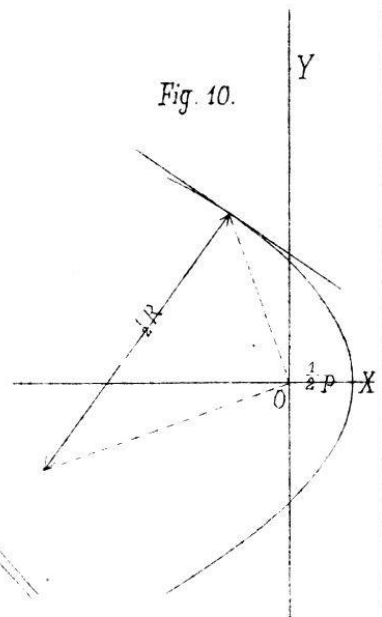


Fig. 10.



ETUDE DES COURBES PLANES

H. AMSTEIN.

Bull. Soc. Vaud. Sc. nat. - Vol. XV. - Pl. XXV.

Fig. 9.

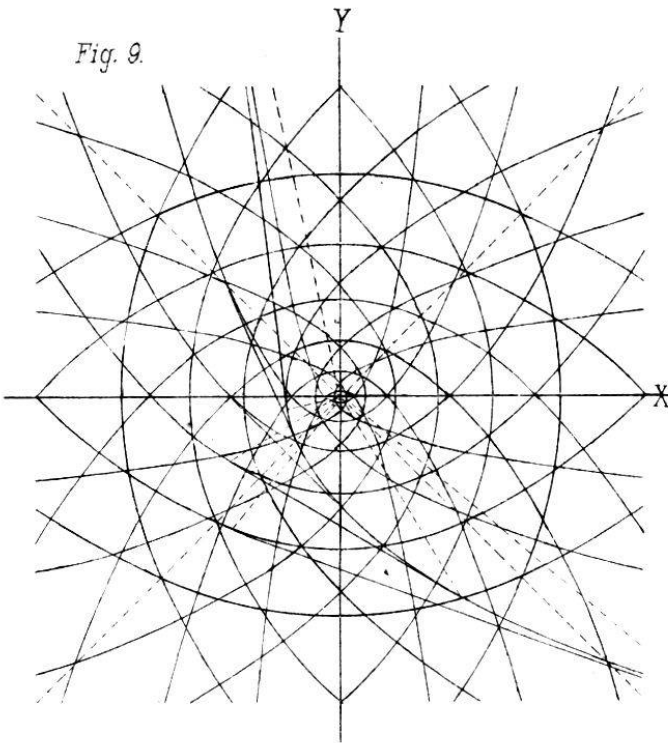
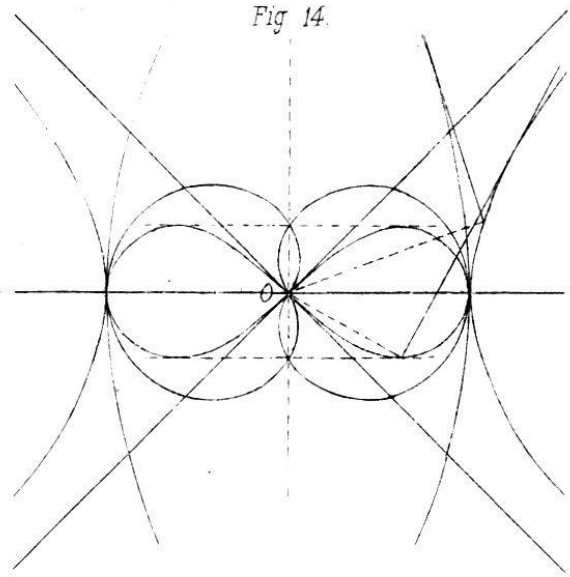


Fig. 14.



$n=1, m=1, a=0.2744\dots$

Fig. 12.

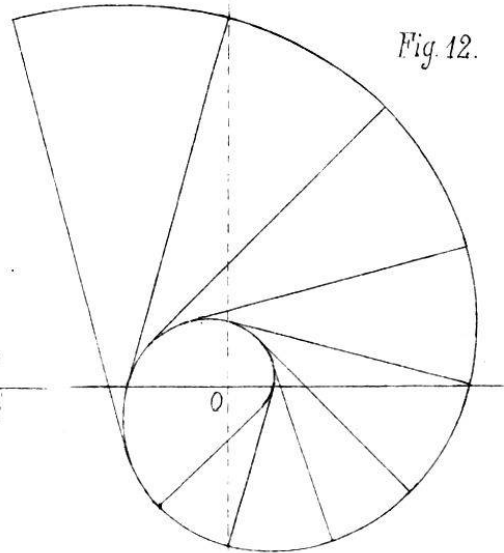


Fig. 13.

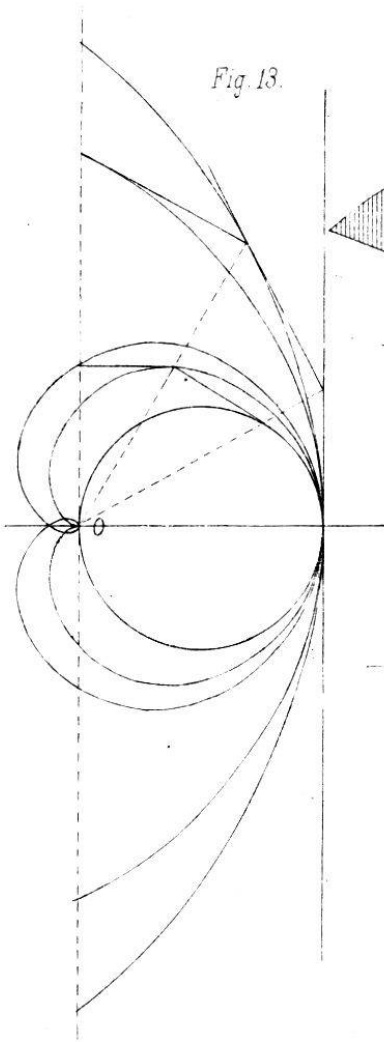


Fig. 11.

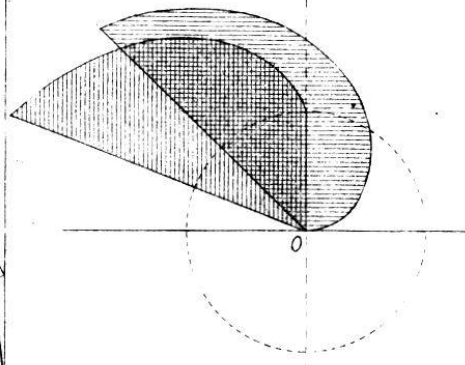


Fig. 15.

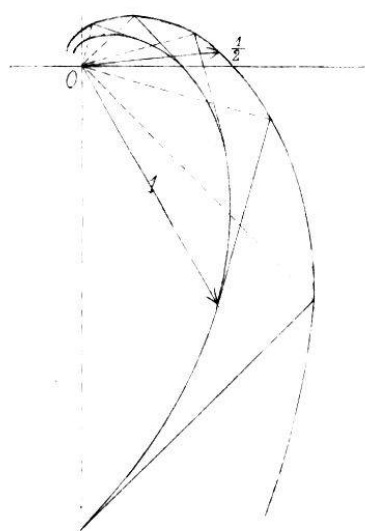
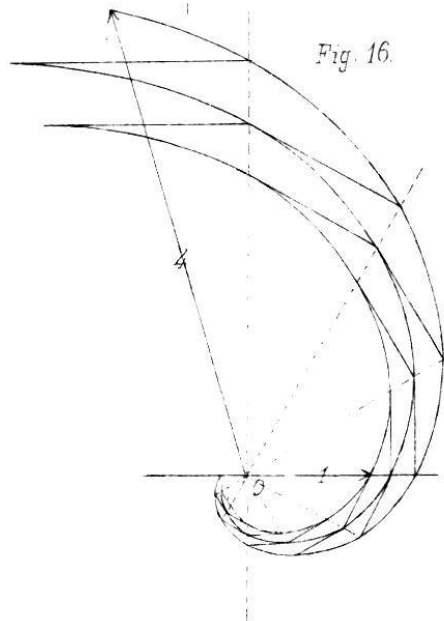


Fig. 16.



et celle de sa développée première

$$\varrho_1^* = A \cos \varphi_1 - \left[\frac{1}{2} (b - \frac{1}{2} a\pi) + a\varphi_1 \right] \sin \varphi_1.$$

La courbe demandée est donc une cycloïde quels que soient A , a et b . Or, comme le terme $A \cos \varphi$ n'a pour effet que de déplacer les deux courbes parallèlement à elles-mêmes, on peut faire $A = 0$. Alors, en choisissant par exemple $a = -2c$, $b = -c\pi$, il s'ensuit

$$\varrho = 2c\varphi \sin \varphi,$$

et
$$\varrho_1^* = 2c\varphi_1 \sin \varphi_1$$

ou en coordonnées rectangulaires

$$x = x^* = -c(1 - \cos \psi)$$

$$y = y^* = c(\psi + \sin \psi).$$



ERRATA. — Page 440 Bull. (sép. 48), ligne 5 en remontant, lisez $\varphi = 0$, au lieu de $\rho = 0$.

