

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 15 (1877-1878)
Heft: 78

Artikel: Un exemple de représentation conforme
Autor: Amstein, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-287508>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 21.05.2025

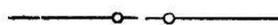
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UN EXEMPLE
DE
REPRÉSENTATION CONFORME

PAR LE

D^r H. AMSTEIN

professeur à l'Académie de Lausanne.



Les pages suivantes sont consacrées à l'étude de la fonction suivante d'une variable complexe :

$$\zeta = \frac{1}{4} \left(3z + \frac{1}{z^3} \right).$$

Cette fonction, bien qu'elle soit très élémentaire, nous a paru digne d'un certain intérêt, attendu qu'elle fournit non-seulement un exemple à l'appui des méthodes employées depuis *Riemann* dans la théorie moderne des fonctions d'une variable complexe, mais encore la solution de ce problème : Trouver, sur l'intérieur d'un cercle de rayon 1, la représentation conforme de l'extérieur de l'astroïde,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

c'est-à-dire de la partie du plan qui reste, abstraction faite de l'intérieur de l'astroïde.

Si l'on désigne, avec *Gauss*, par $i = \sqrt{-1}$ l'unité positive des nombres imaginaires, tout nombre complexe peut se mettre sous la forme $\alpha + \beta i$, où α et β représentent des nombres réels quelconques. Ce nombre est figuré dans un plan quelconque par la droite (appelée *ligne dirigée*) qui joint dans ce plan l'origine de coordonnées rectangulaires au point

donné par les coordonnées $x = \alpha$, $y = \beta$. Le plus souvent nous substituons à la ligne dirigée représentative du nombre complexe le seul point $x = \alpha$, $y = \beta$. Par là nous pourrions rapporter un point à un autre, une courbe à une autre. Parfois il est préférable de déterminer le point représentatif du nombre complexe par des coordonnées polaires r et φ , de sorte que

$$\alpha + \beta i = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Le rayon vecteur r est dit *la valeur absolue (la norme, le module)* du nombre complexe et l'angle φ que fait sa direction avec l'axe polaire est dit *la déviation (l'argument)* du nombre complexe. De l'équation

$$\alpha + \beta i = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

on tire immédiatement

$$\alpha = r \cos \varphi, \quad \beta = r \sin \varphi$$

et réciproquement

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Soit $z = x + yi$ une variable complexe et $\zeta = \xi + \eta i = f(z)$ une fonction quelconque de cette variable. Comme la variable z est illimitée, le point représentatif de z peut occuper toutes les positions du plan que nous appellerons le plan (z). Pour représenter géométriquement les valeurs correspondantes de la fonction $\zeta = f(z)$ nous choisirons un second plan, le plan (ζ). Or, si la fonction $f(z)$ est uniforme, c'est-à-dire si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de ζ , il arrivera qu'à chaque point du plan (z) ne correspondra qu'un seul point du plan (ζ). Si, au contraire, la fonction $f(z)$ est multiforme de l'ordre n (n -forme), c'est-à-dire si à chaque valeur de z correspondent n valeurs de ζ , à chaque point du plan (z) correspondront n points, en général différents, du plan (ζ).

Fig: 1.



Fig: 2.

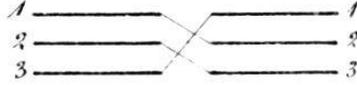


Fig: 3.

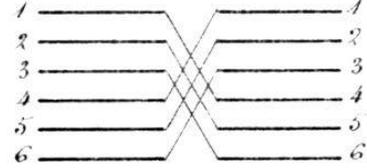


Fig: 4.

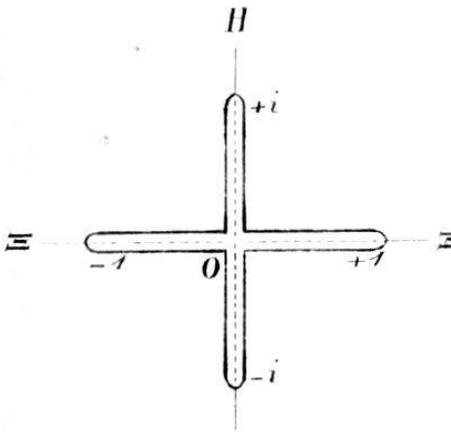


Fig: 5.

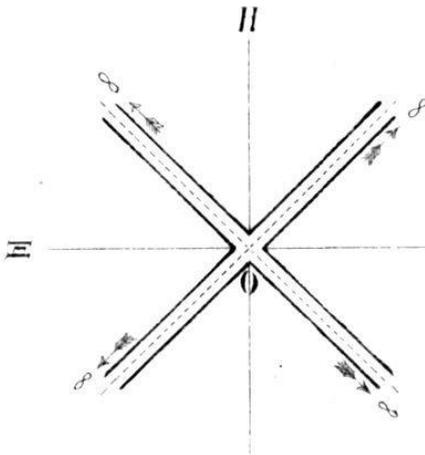


Fig: 6.

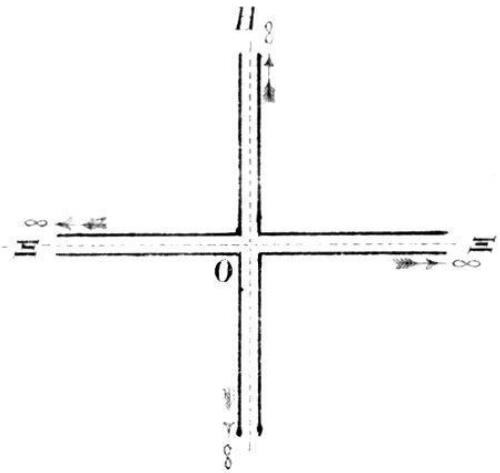


Fig: 7.

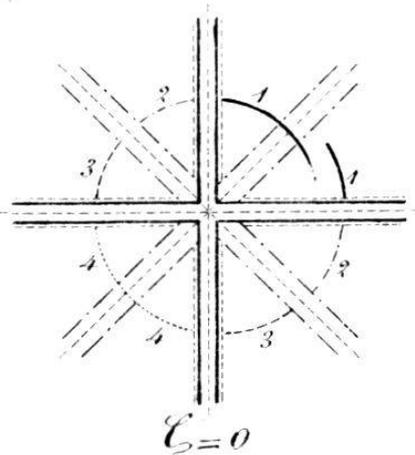
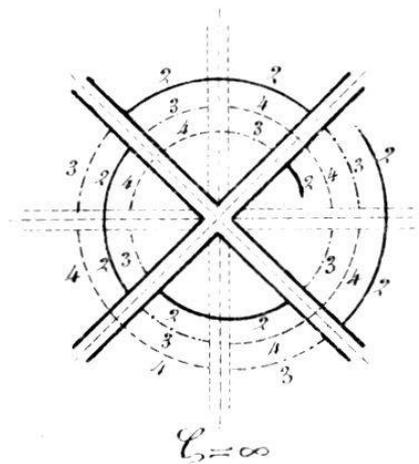


Fig: 8.



Pour ramener l'étude d'une fonction (n -forme) à celle d'une fonction uniforme, l'illustre géomètre *Riemann* (voir sa dissertation inaugurale : *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*) a eu l'ingénieuse idée suivante. Il s'est figuré que le plan (z) se composait de n plans (*nappes*) différents superposés et que la variabilité de la variable s'étendait sur toutes les n nappes. A chaque point d'une de ces nappes ne correspond alors qu'un seul point du plan (ζ) et aux n points différents superposés dans les n nappes correspondent n points, en général différents, du plan (z). En tous les points z pour lesquels un certain nombre de points du plan (ζ) coïncident, un même nombre de nappes sont en connexion. Ces points ont été nommés par Riemann *points de ramification* (*Verzweigungspunkte, Windungspunkte*). Afin d'obtenir une transition continue d'une valeur de la fonction à une autre qui correspond à la même valeur de la variable indépendante, ou d'une nappe à une autre, on emploie *des lignes de passage* (*Verzweigungsschnitte, Uebergangslinien*). Ces lignes qui ne se coupent nulle part elles-mêmes, mais dont la forme est d'ailleurs tout à fait arbitraire, sont menées ou bien entre deux points de ramification, ou bien entre un point de ramification et le point (unique) qui correspond à $z = \infty$. Après avoir coupé artificiellement le long d'une ligne de passage toutes les nappes qui ont en commun les points de ramification correspondants, on rétablit la connexion des nappes, non pas telle qu'elle était avant l'application des lignes de passage, mais comme l'exige la nature de la fonction considérée. (Les figures 1, 2 et 3, Pl. X, montrent par des sections transversales, dans trois cas différents, la connexion des plans le long d'une ligne de passage.)

L'ensemble des n nappes, jointes comme il a été indiqué, forme pour la fonction en question ce que Riemann a appelé une *Windungsfläche* et ce qu'on appelle maintenant assez généralement *une surface de Riemann*. A l'intérieur de cette surface la fonction est donc uniforme.

L'équation $\zeta = f(z)$ établit une relation entre le plan (z)

(ou la surface de Riemann) et le plan (ζ). Le plan (ζ) est pour ainsi dire *une représentation* ou *une image* (eine *Abbildung*) du plan (z). *Gauss* a le premier remarqué que par une représentation à l'aide d'une fonction d'une variable complexe, on obtient ce fait remarquable qu'à une figure infiniment petite dans le plan (z) correspond une figure semblable dans le plan (ζ). Cette similitude a engagé ce célèbre mathématicien à donner à la représentation $\zeta = f(z)$ le nom de *représentation conforme*. Le rapport des dimensions linéaires de l'image à celles de l'original en un point quelconque est donné par la valeur absolue de la dérivée $\frac{d\zeta}{dz} = f'(z)$, et la déviation de la dérivée mesure l'angle duquel l'élément considéré de l'image paraît tourné par rapport à l'élément original. De là il résulte que la similitude cesse d'avoir lieu dans tous les points pour lesquels $f'(z)$ devient zéro ou infiniment grand.

Dans le mémoire cité ci-dessus, *Riemann* a énoncé le théorème suivant: Il est toujours possible de représenter sur la surface d'un cercle avec similitude des éléments infiniment petits une surface simplement connexe (c'est-à-dire une surface qui peut se transformer en un plan simple par une déformation continue). En outre, cette représentation conforme ne peut se faire que d'une seule manière telle qu'au centre du cercle corresponde un point quelconque donné à l'intérieur de la surface et à un point quelconque de la périphérie du cercle un point quelconque donné du contour de la surface.

Le problème contenu dans cet énoncé a été résolu dans plusieurs cas plus ou moins simples, et certaines représentations, particulièrement celles transmises par les intégrales et fonctions elliptiques, ont été étudiées par différents géomètres. Qu'il nous soit permis, pour ne pas rendre compte ici de leurs travaux, de renvoyer au mémoire: *Ueber die conforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Octaeders auf die Oberfläche einer Kugel; Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, XVI. Jahrgang, 1871, pages 297-341,*

dans la première partie duquel l'auteur du présent mémoire a donné un aperçu historique succinct de la représentation conforme.

I.

Comme la dérivée de la fonction proposée

$$(1) \quad \zeta = \frac{1}{4} \left(3z + \frac{1}{z^3} \right)$$

savoir
$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{z^4} \right) = \frac{3}{4} \frac{z^4 - 1}{z^4}$$

s'annule pour les quatre points $z = \pm 1$, $z = \pm i$ et devient infiniment grande pour le point $z = 0$, ces cinq points seront des *points singuliers* de la fonction ζ . En effet, les développements de la fonction donnée suivant les puissances ascendantes de $(z \mp 1)$, $(z \mp i)$, d'après le théorème de Maclaurin sont

$$\zeta - 1 = \frac{3}{2} (z - 1)^2 \left[1 - \frac{5}{3} (z - 1) + \frac{5}{2} (z - 1)^2 \dots \right],$$

$$\zeta + 1 = -\frac{3}{2} (z + 1)^2 \left[1 - \frac{5}{3} (z + 1) + \frac{5}{2} (z + 1)^2 \dots \right],$$

$$\zeta - i = -\frac{3}{2} (z - i)^2 \left[1 - \frac{5}{3} (z - i) - \frac{5}{2} (z - i)^2 \dots \right],$$

$$\zeta + i = \frac{3}{2} (z + i)^2 \left[1 + \frac{5}{3} (z + i) - \frac{5}{2} (z + i)^2 \dots \right],$$

tandis qu'on a pour le voisinage du point $z = 0$, directement

$$\zeta = \frac{1}{4z^3} [1 + 3z^4].$$

Or, si on donne par exemple à z des valeurs qui s'écartent très peu de $z = 1$, on pourra se borner au premier terme de la série correspondante. Alors on voit facilement que si le point z fait une fois le tour complet du point $z = 1$ (par exemple sur une circonférence de centre $z = 1$ et de rayon ρ suffisamment petit), le point ζ fera deux fois le tour du point $\zeta = 1$.

Donc à un angle de 2π correspond à l'endroit $z = 1$ un angle de 4π et il n'y a par conséquent pas de similitude. Des résultats analogues s'obtiennent pour les points $z = -1$, $z = \pm i$. De même on reconnaît que si z fait une fois le tour du point $z = 0$, ζ fera dans le sens inverse trois fois le tour du point $\zeta = \infty$. Le point $z = 0$ est donc bien un point singulier. A l'exception de ces cinq points, il y a partout similitude entre les éléments des deux plans (z) et (ζ).

Si on attribue à z des valeurs réelles, ζ prend aussi des valeurs réelles, et à des valeurs purement imaginaires de z correspondent aussi des valeurs purement imaginaires de ζ . Par conséquent, les axes du plan (ζ) sont les images des axes du plan (z). De même on trouve que les bissectrices des angles que font entre eux les axes coordonnés dans le plan (ζ) sont les images des droites correspondantes du plan (z).

En posant dans l'équation (1)

$$\zeta = \xi + \eta i, \quad z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

d'où

$$\xi + \eta i = \frac{1}{4} [3r (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{1}{r^3} (\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi)]$$

et en égalant les parties réelles et les parties imaginaires de cette équation, on obtient

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{4} [3r \cos \varphi + \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi], \\ \eta = \frac{1}{4} [3r \sin \varphi - \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi]. \end{cases}$$

Ces deux équations déterminent deux systèmes de courbes suivant qu'on y regarde φ comme variable indépendante et r comme paramètre, ou r comme variable indépendante et φ comme paramètre. La quantité r étant constante pour chacune des courbes du premier système, les courbes correspondantes dans le plan (z) forment un système de circonférences con-

centriques dont le centre commun est l'origine, et comme pour chacune des courbes du second système φ est constant et r variable, les courbes correspondantes dans le plan (z) constituent un faisceau de droites qui sont toutes limitées d'un côté par l'origine. Les droites du faisceau rencontrent toutes les circonférences concentriques sous des angles droits. Ensuite de la similitude entre les plans (z) et (ζ), dans le plan (ζ) le second système de courbes est donc le système des trajectoires orthogonales du premier.

En regardant dans les équations (2) φ comme variable indépendante et en les comparant avec les équations générales des hypocycloïdes

$$x = (R - \rho) \cos \left(\frac{\rho}{R} \varphi \right) + p \cos \left(\frac{R - \rho}{R} \varphi \right),$$

$$y = (R - \rho) \sin \left(\frac{\rho}{R} \varphi \right) - p \sin \left(\frac{R - \rho}{R} \varphi \right),$$

où R signifie le rayon du cercle fixe, ρ le rayon du cercle mobile et p la distance du point générateur au centre du cercle mobile, on reconnaît que les courbes considérées sont des hypocycloïdes pour lesquelles $R = r$, $\rho = \frac{1}{4}r$ et $p = \frac{1}{4r^3}$. On peut donc se figurer qu'un cercle de rayon $\frac{1}{4}r$ roule sans glisser sur un cercle fixe de rayon r , en restant toujours à l'intérieur d'un cercle fixe; pendant ce mouvement, un point qui se trouve à la distance constante $\frac{1}{4r^3}$ du centre du cercle mobile, engendre une des hypocycloïdes.

Pour $r = 1$ la courbe devient *l'astroïde*

$$\xi = \frac{1}{4} [3 \cos \varphi + \cos 3\varphi] = \cos^3 \varphi,$$

$$\eta = \frac{1}{4} [3 \sin \varphi - \sin 3\varphi] = \sin^3 \varphi,$$

ou
$$\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = 1;$$

pour $r = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ on obtient *la rosace*

$$\xi = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}} (\cos \varphi + \cos 3\varphi) = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}} \cos 2\varphi \cos \varphi,$$

$$\eta = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}} (\sin \varphi - \sin 3\varphi) = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}} \cos 2\varphi \sin \varphi,$$

ou en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}} \cos 2\psi.$$

Dans les cas limites $r = 0$ et $r = \infty$ la courbe est une circonférence de rayon infiniment grand. Tant que $1 > r > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$,

les courbes possèdent quatre points doubles situés symétriquement sur les axes coordonnés; pour $r = 1$ (astroïde) ces points deviennent des points de rebroussement de la première espèce dont les coordonnées sont $x = \pm 1, y = 0$ et $x = 0, y = \pm 1$ et pour $r = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ (rosace), les quatre points

doubles coïncident à l'origine et forment ainsi un point quadruple. Si $r < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, les courbes montrent huit points dou-

bles, situés symétriquement sur les axes coordonnés et les bissectrices des angles que font entre eux les axes coordonnés et si enfin $r > 1$, elles ne possèdent plus de points multiples.

Reprenons les équations (2) et supposons r variable.

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{4} \left[3r \cos \varphi + \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi \right], \\ \eta = \frac{1}{4} \left[3r \sin \varphi - \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi \right], \quad (r \text{ variable}). \end{array} \right.$$

Parmi les trajectoires orthogonales se trouvent comme cas spéciaux les axes coordonnés et les droites $\eta = \pm \xi$; les premiers s'obtiennent en faisant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ et $\varphi = 0$, les dernières en faisant $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ et $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. A l'exception de ces quatre lignes, toutes les courbes possèdent les deux asymptotes $\eta = \xi \operatorname{tg} \varphi$ et $\eta = -\xi \operatorname{tg} 3\varphi$.

Les résultats trouvés jusqu'ici peuvent se résumer comme il suit. Les deux plans (z) et (ζ) étant mis en relation par l'intermédiaire de la fonction

$$\zeta = \frac{1}{4} \left[3z + \frac{1}{z^3} \right]$$

et le plan (z) étant regardé comme plan original, les images des axes coordonnés du plan (z) sont les axes coordonnés du plan (ζ), celles des bissectrices des angles que font entre eux les axes coordonnés du plan (z) sont encore les droites qui ont la même signification pour le plan (ζ); au système des circonférences concentriques $r = \text{const}$ du plan (z) correspondent les hypocycloïdes

$$\xi = \frac{1}{4} \left[3r \cos \varphi + \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi \right],$$

$$\eta = \frac{1}{4} \left[3r \sin \varphi - \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi \right], \quad (r = \text{const})$$

et enfin au faisceau de rayons $\varphi = \text{const}$. correspondent les trajectoires orthogonales des hypocycloïdes.

Après avoir considéré la représentation du plan (z) sur le plan (ζ), il reste maintenant à étudier aussi les relations qui existent entre le plan (ζ), envisagé comme plan original, et le plan (z), envisagé comme image du plan (ζ). En d'autres termes : Etudions la représentation transmise par la fonction inverse de la fonction ζ .

En premier lieu, il importe de savoir s'il y a, outre les axes coordonnés et les lignes de 45° , encore d'autres courbes dans le plan (z) qui correspondent aux axes coordonnés et aux

droites $\eta = \pm \xi$ du plan (ζ). A cet effet, cherchons par exemple la relation qui doit exister entre r et φ pour qu'on ait continuellement $\eta = 0$. De l'équation $\eta = 0$, ou

$$\frac{1}{4} \left[3r \sin \varphi - \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi \right] = \frac{1}{4} \sin \varphi \left[3r - \frac{1}{r^3} (3 - 4 \sin^2 \varphi) \right] = 0$$

on tire, en faisant abstraction du facteur $\sin \varphi$, qui donne l'axe réel,

$$r = \sqrt[4]{\frac{1}{3} (1 + 2 \cos 2\varphi)}.$$

C'est l'équation en coordonnées polaires de la courbe cherchée qui, outre l'axe réel, correspond à l'axe réel du plan (ζ).

D'une manière analogue, on trouve pour la courbe correspondant à l'axe imaginaire du plan (ζ), abstraction faite de l'axe imaginaire du plan (ε), l'équation

$$r = \sqrt[4]{\frac{1}{3} (1 - 2 \cos 2\varphi)}.$$

Ces deux courbes ne diffèrent que par leur position; la seconde s'obtient en tournant la première d'un angle droit. Elles se rencontrent à l'origine, où elles possèdent un point double,

et en outre aux quatre points $r = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $\varphi = \pm \frac{1}{4} \pi$, $r = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$,

$\varphi = \pm \frac{3}{4} \pi$; en ces quatre points symétriques qui correspondent tous à l'origine du plan (ζ), elles font entre elles des angles droits, comme l'exige la similitude des plans (ε) et (ζ).

Pour trouver les courbes du plan (ε) qui, en outre des bissectrices des angles que font les axes coordonnés, correspondent aux lignes de 45° du plan (ζ), il suffit de poser $\xi = \eta$, ou

$$\frac{1}{4} \left[3r \cos \varphi + \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi \right] = \frac{1}{4} \left[3r \sin \varphi - \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi \right],$$

et $\xi = -\eta$ ou

$$\frac{1}{4} \left[3r \cos \varphi + \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi \right] = -\frac{1}{4} \left[3r \sin \varphi - \frac{1}{r^3} \sin 3\varphi \right].$$

La première de ces équations peut s'écrire

$$\begin{aligned} 3r(\cos \varphi - \sin \varphi) + \frac{1}{r^3}(\cos 3\varphi + \sin 3\varphi) &= \\ = (\cos \varphi - \sin \varphi) \left[3r + \frac{1}{r^3}(1 + 2 \sin 2\varphi) \right] &= 0. \end{aligned}$$

De là on tire, en faisant abstraction du facteur $(\cos \varphi - \sin \varphi)$ qui donne la droite $\eta = \xi$,

$$r = \sqrt[4]{-\frac{1}{3}(1 + 2 \sin 2\varphi)}.$$

D'une manière analogue on obtient de la seconde équation

$$r = \sqrt[4]{-\frac{1}{3}(1 - 2 \sin 2\varphi)}.$$

Ces deux courbes sont encore égales. Elles ont, comme les précédentes, plus ou moins la forme de lemniscates. Les sommets de la première se trouvent aux points $r = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$,

$\varphi = -\frac{1}{4}\pi$, ceux de la seconde aux points $r = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $r = \frac{1}{4}\pi$.

En ces quatre points ces courbes rencontrent les premières sous des angles de 45° , comme cela doit être.

La fonction ζ est une fonction uniforme de z , tandis que z est une fonction quadriforme de ζ . Ce fait se trouve vérifié par la représentation géométrique que nous venons d'étudier. En effet, tandis que par le système des circonférences concentriques ($r = \text{const.}$) chaque point du plan (z) est simplement couvert, le système des hypocycloïdes (2) couvre chaque point du plan (ζ) quatre fois. En d'autres termes : Tandis qu'à chaque point du plan (z) ne correspond qu'un seul point du plan (ζ), à chaque point du plan (ζ) correspondent en général quatre points différents du plan (z) (fig. 9, pl. XI). Il n'y a que les cinq points $\zeta = \pm 1$, $\zeta = \pm i$, $\zeta = \infty$ qui fassent exception. Car en faisant varier le paramètre r dans les équations des hypocycloïdes

cloïdes de 0 à ∞ d'une manière continue et en observant le changement qu'éprouvent ces courbes par cette opération, on remarque facilement que les quatre points $\zeta = \pm 1$, $\zeta = \pm i$ ne peuvent être couverts que trois fois et le point $\zeta = \infty$ seulement deux fois. De là nous concluons que pour $\zeta = \pm 1$, $\zeta = \pm i$ deux valeurs de z coïncident, et que pour $\zeta = \infty$ trois valeurs de z coïncident. Par un calcul simple, on trouve en effet le tableau suivant :

$\zeta =$	1	- 1	i	- i	∞
$z =$	1	- 1	i	- i	∞
	1	- 1	i	- i	0
	$\frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1 - i\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-i + \sqrt{2}}{3}$	$\frac{i - \sqrt{2}}{3}$	0
	$\frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1 + i\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-i - \sqrt{2}}{3}$	$\frac{i + \sqrt{2}}{3}$	0

La surface de Riemann, par rapport à laquelle la fonction quadriforme z peut être considérée comme une fonction uniforme, se compose de quatre nappes, dont deux sont en connexion aux points $\zeta = \pm 1$, $\zeta = \pm i$ et trois au point $\zeta = \infty$. Il s'agit maintenant de répartir convenablement sur les quatre nappes les quatre points superposés en chaque point du plan (ζ) et d'appliquer les lignes de passage de sorte que la transition d'une nappe à toutes les autres puisse se faire d'une manière continue. Guidé par les fig. 9 et 10 (pl. XI) mêmes, on atteint parfaitement le but proposé, en admettant comme lignes de passage : 1° Entre la première et la seconde nappe, les parties des axes coordonnés qui joignent les points - 1 et + 1 et les points - i et + i ; 2° entre la seconde et la troisième nappe, les bissectrices des angles que font entre eux les axes coordonnés, et 3° entre la troisième et la quatrième nappe, les axes coordonnés illimités (fig. 4, 5, 6, pl. X). Toutes ces lignes passent par l'origine; mais l'origine n'étant pas un

point singulier, il faut qu'à un point mobile, partant d'une nappe et faisant le tour du point 0, un seul tour suffise pour revenir à la même nappe. C'est ce qui a effectivement lieu, comme le fait voir fig. 7, pl. X. Un point mobile qui ferait le tour du point $\zeta = \infty$, en partant, par exemple, de la seconde nappe, aurait besoin de trois tours complets pour revenir au point de départ (fig. 8, pl. X).

Par cette disposition des nappes, l'astroïde $\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = 1$, ainsi que toutes les hypocycloïdes pour lesquelles $r > 1$ se trouvent dans la première nappe. La rosace $\rho = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cos 2\psi$ est

entièrement située dans la seconde nappe, à l'exception du point quadruple, dont on peut, si l'on veut, répartir les quatre points simples sur les quatre nappes. Les courbes pour les-

quelles $1 > r > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ sont toutes situées en partie dans la seconde et en partie dans la première nappe, et les courbes enfin, pour lesquelles $r < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, n'ont plus de points dans la

première nappe, mais bien dans chacune des trois autres nappes. La fig. 9, pl. XI, où toutes les courbes sont tirées en plein, contient quelques représentants du système des hypocycloïdes et de leurs trajectoires orthogonales. Les fig. 11, 12, 13 et 14, pl. XII et XIII, qui ne sont que les copies de la précédente, font voir, par la distribution différente des lignes tirées en plein et des lignes ponctuées, la répartition des courbes sur les différentes nappes. Le plan (z), l'image de la surface de Riemann, est représenté dans la fig. 10, pl. XI; les parties du plan correspondant aux différentes nappes, y sont munies des chiffres respectifs.

A l'aide de cette dernière figure on est à même d'indiquer la nappe dans laquelle doit avoir lieu la rencontre sous un angle droit d'une trajectoire quelconque avec chacune des hypocycloïdes.

Le plan (z), après en avoir détaché l'intérieur du cercle des unités, correspond uniformément à la première nappe, après en avoir découpé l'intérieur de l'astroïde $\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = 1$. Par conséquent, la fonction z sert d'intermédiaire à la représentation conforme de l'extérieur de l'astroïde $\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = 1$ sur l'extérieur du cercle des unités $x^2 + y^2 = 1$.

S'il s'agissait de la représentation conforme de l'extérieur de l'astroïde $\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = 1$ sur l'intérieur du cercle des unités $x^2 + y^2 = 1$, il suffirait de substituer à la fonction z une autre fonction Z , liée à la première par l'équation $Z = \frac{1}{z}$. Traduite en géométrie, cette substitution équivaut à une transformation moyennant les rayons vecteurs réciproques.

II.

Les résultats obtenus précédemment par l'étude synthétique de la fonction z , se trouvent vérifiés par l'analyse suivante :

Pour résoudre l'équation du quatrième degré

$$\zeta = \frac{1}{4} \left(3z + \frac{1}{z^3} \right)$$

ou (3) $z^4 - \frac{4}{3} \zeta z^3 + \frac{1}{3} = 0$

par rapport à z , appliquons la méthode d'*Euler*. A cet effet, posons $z = x + \frac{1}{3} \zeta$; l'équation précédente se transforme en

$$x^4 - \frac{2}{3} \zeta^2 x^2 - \frac{8}{27} \zeta^3 x - \frac{1}{27} \zeta^4 + \frac{1}{3} = 0.$$

Les racines de cette dernière équation s'obtiennent moyennant celles de l'équation du troisième degré

$$w^3 - \frac{4}{3} \zeta^2 w^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{4}{9} \zeta^4 - 1 \right) w - \frac{64}{9^3} \zeta^6 = 0,$$

qui, par la substitution $w = s + \frac{4}{9} \zeta^2$ prend la forme plus simple

$$(4) \quad s^3 - \frac{4}{3} s - \frac{16}{27} \zeta^2 = 0.$$

En posant

$$u = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\zeta^2 + \sqrt{\zeta^4 - 1}}, \quad v = \frac{4}{9} \frac{1}{u} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\zeta^2 - \sqrt{\zeta^4 - 1}}$$

et en désignant les racines cubiques conjuguées de l'unité par α et α^2 de sorte que

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha + \alpha^2 = -1,$$

$$\alpha - \alpha^2 = i\sqrt{3},$$

les trois racines de l'équation (4) seront données par

$$s_1 = u + v, \quad s_2 = \alpha u + \alpha^2 v, \quad s_3 = \alpha^2 u + \alpha v.$$

Les quatre racines de l'équation (3), enfin, sont, si on pose encore pour plus de simplicité

$$t_1 = \sqrt{\frac{4}{9} \zeta^2 + s_1}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{4}{9} \zeta^2 + s_2}, \quad t_3 = \sqrt{\frac{4}{9} \zeta^2 + s_3}$$

ou

$$(5) \quad \begin{cases} z_1 = \frac{1}{3} \zeta + \frac{1}{2} [t_1 + t_2 + t_3], \\ z_2 = \frac{1}{3} \zeta + \frac{1}{2} [t_1 - t_2 - t_3], \\ z_3 = \frac{1}{3} \zeta + \frac{1}{2} [-t_1 + t_2 - t_3], \\ z_4 = \frac{1}{3} \zeta + \frac{1}{2} [-t_1 - t_2 + t_3], \end{cases}$$

ou

$$(5^a) \quad \begin{cases} z_1 = \frac{1}{3} \zeta - \frac{1}{2} [t_1 + t_2 + t_3], \\ z_2 = \frac{1}{3} \zeta - \frac{1}{2} [t_1 - t_2 - t_3], \\ z_3 = \frac{1}{3} \zeta - \frac{1}{2} [-t_1 + t_2 - t_3], \\ z_4 = \frac{1}{3} \zeta - \frac{1}{2} [-t_1 - t_2 + t_3]. \end{cases}$$

On appliquera le premier ou le second de ces deux systèmes, suivant que le produit $t_1 t_2 t_3$ sera égal à $\frac{8}{27}\zeta^3$ avec le même signe ou le signe contraire.

Pour fixer les idées, arrêtons-nous pour le moment au premier des deux systèmes. Chacune des quatre formules établit une relation uniforme entre ζ et z et représente, par conséquent, une branche de la fonction quadriforme z . En d'autres termes : Ces quatre formules correspondent une à une aux quatre nappes de la surface de Riemann qui accompagne la fonction z . Le rang qu'on veut attribuer à ces formules, ainsi que celui des quatre nappes, est tout-à-fait arbitraire, pourvu qu'on fasse la liaison des nappes d'une manière convenable. En conformité de ce qui précède, nous adopterons le rang indiqué par les indices de z dans le système (5).

En admettant la permutation entre les trois valeurs de u et les deux valeurs de t_1, t_2, t_3 , chacune des formules (5) pourrait remplacer toutes les autres des systèmes (5) et (5^a). Par là, on perdrait l'avantage qu'offre la séparation des valeurs de z en quatre branches. Pour éviter toute confusion des valeurs de différentes branches, il faut donc une certaine convention. D'abord, en examinant les équations $\zeta = \frac{1}{4} [3z + \frac{1}{z^3}]$ et $s^3 - \frac{4}{3}s - \frac{16}{27}\zeta^2 = 0$, on reconnaît sans difficulté qu'en restant dans la même nappe :

1° A des valeurs égales et de signes contraires de ζ correspondent des valeurs égales de s et des valeurs égales et de signes contraires de z ;

2° A des valeurs conjuguées $\xi + \nu i$ et $\xi - \nu i$ de ζ correspondent des valeurs conjuguées de s et des valeurs conjuguées de z ;

3° A des valeurs $\xi \pm \nu i, -\xi \pm \nu i$ de ζ , qui sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire, correspondent des valeurs conjuguées de s et des valeurs symétriques par rapport à l'axe imaginaire de z , et

4° A des valeurs $\xi + \nu i, \nu + \xi i$ de ζ , symétriques par rap-

port à la ligne de $45^\circ \eta = \xi$, correspondent des valeurs de s qui ne diffèrent que par les signes de leurs parties réelles et des valeurs de z , symétriques par rapport à la ligne de $45^\circ y = x$.

Ces observations permettent de ramener le calcul numérique des racines z pour une valeur quelconque donnée de ζ , au cas où ζ serait situé dans le premier quadrant et où, en même temps, la partie réelle de ζ serait plus grande que la partie imaginaire. Si, dans ce dernier cas, on pose encore les conditions que les parties réelles et imaginaires (sauf le cas où elles seraient nulles) des quantités $\sqrt{\zeta^4 - 1}$, u , t_1 , et t_2 soient positives et que la somme des déviations de t_1 , t_2 et t_3 soit égale à la déviation de ζ^3 ou n'en diffère que par un multiple de 2π , chacune des formules (5) ne fournira que les valeurs correspondant à une seule nappe, à celle qui répond à l'indice de z . Il va sans dire que le même but pourrait être atteint par d'autres conventions. Par celle que nous venons d'énoncer, le système des formules (5^a) devient superflu.

Les points de ramification de la fonction s sont $\zeta = \pm 1$, $\zeta = \pm i$ et $\zeta = \infty$; comme par la formation de z aucun de ces points n'est compensé par un autre, ces cinq points sont aussi les points de ramification de la fonction z . Pour nous en assurer et pour trouver en même temps la connexion des quatre nappes de la surface de Riemann en ces cinq points, nous développerons la fonction z en séries, ordonnées selon des puissances ascendantes de $(\zeta - 1)$, $(\zeta + 1)$, $(\zeta - i)$, $(\zeta + i)$, et de $\frac{1}{\zeta}$, en ne conservant des séries que le nombre nécessaire de termes.

Développement de z pour le voisinage de $\zeta = 1$.

Posant pour plus de brièveté $\zeta - 1 = t$, d'où $\zeta = 1 + t$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}\sqrt{\zeta^4 - 1} &= 2\sqrt{t}\sqrt{1 + \frac{3}{2}t + t^2 + \frac{1}{4}t^3} = 2\sqrt{t}\left[1 + \frac{3}{4}t + \frac{7}{32}t^2 \dots\right] \\ &= 2t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{16}t^{\frac{5}{2}} \dots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta^2 + \sqrt{\zeta^4 - 1} &= 1 + 2t + t^2 + 2t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{16}t^{\frac{5}{2}} \dots = \\ &= 1 + 2t^{\frac{1}{2}} + 2t + \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} \dots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u &= \sqrt[3]{\zeta^2 + \sqrt{\zeta^4 - 1}} = \sqrt[3]{1 + 2t^{\frac{1}{2}} + 2t + \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} \dots} = \\ &= \sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}t \dots};\end{aligned}$$

$$v = \frac{4}{9} \frac{1}{u} = \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}t \dots};$$

$$s_1 = u + v = \frac{4}{3} + \frac{8}{27}t \dots,$$

$$\begin{aligned}s_2 &= \alpha u + \alpha^2 v = \sqrt[3]{\alpha + \alpha^2} + \frac{2}{3}(\alpha - \alpha^2)t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}(\alpha + \alpha^2)t \dots = \\ &= \sqrt[3]{-1 + \frac{2}{3}i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{9}t \dots} = -\frac{2}{3} + \frac{4}{9}i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{27}t \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_3 &= \alpha^2 u + \alpha v = \sqrt[3]{(\alpha^2 + \alpha) + \frac{2}{3}(\alpha^2 - \alpha)t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}(\alpha^2 + \alpha)t \dots} = \\ &= \sqrt[3]{-1 - \frac{2}{3}i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{9}t \dots} = -\frac{2}{3} - \frac{4}{9}i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{27}t \dots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t_1 &= \sqrt[4]{\frac{4}{9}\zeta^2 + s_1} = \sqrt[4]{\frac{16}{9} + \frac{32}{27}t \dots} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{1 + \frac{2}{3}t \dots} = \\ &= \frac{4}{3}\left[1 + \frac{1}{3}t \dots\right] = \frac{4}{3} + \frac{4}{9}t \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t_2 &= \sqrt[4]{\frac{4}{9}\zeta^2 + s_2} = \sqrt[4]{-\frac{2}{9} + \frac{4}{9}i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} + \frac{20}{27}t \dots} = \\ &= +\frac{i}{3}\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{1 - 2i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{10}{3}t \dots} = \\ &= \frac{i}{3}\sqrt[4]{2}\left[1 - i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}t \dots\right] = \frac{i}{3}\sqrt[4]{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{i\sqrt{2}}{18}t \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_3 &= -\sqrt{\frac{4}{9}\zeta^2 + s_3} = -\sqrt{-\frac{2}{9} - \frac{4}{9}i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} + \frac{20}{27}t \dots} = \\
 &= -\frac{i}{3}\sqrt{2}\sqrt{1 + 2i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{10}{3}t \dots} = \\
 &= -\frac{i}{3}\sqrt{2}\left[1 + i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}t \dots\right] = -\frac{i}{3}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}t^{\frac{1}{2}} + \frac{i\sqrt{2}}{18}t \dots;
 \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{1}{3}\zeta + \frac{1}{2}[t_1 + t_2 + t_3] = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{9}t \dots$$

$$z_2 = \frac{1}{3}\zeta + \frac{1}{2}[t_1 - t_2 - t_3] = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{9}t \dots$$

$$z_3 = \frac{1}{3}\zeta + \frac{1}{2}[-t_1 + t_2 - t_3] = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3} + \frac{2 - i\sqrt{2}}{18}t \dots$$

$$z_4 = \frac{1}{3}\zeta + \frac{1}{2}[-t_1 - t_2 + t_3] = -\frac{1 + i\sqrt{2}}{3} + \frac{2 + i\sqrt{2}}{18}t \dots$$

Résumons les résultats trouvés :

$$s_1 - \frac{4}{3} = \frac{8}{27}t \dots$$

$$s_2 + \frac{2}{3} = \frac{4}{9}i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{27}t \dots$$

$$s_3 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}i\sqrt{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{27}t \dots$$

$$t_1 - \frac{4}{3} = \frac{4}{9}t \dots,$$

$$t_2 - \frac{i}{3}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{i\sqrt{2}}{18}t \dots,$$

$$t_3 + \frac{i}{3}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}t^{\frac{1}{2}} + \frac{i\sqrt{2}}{18}t \dots;$$

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} z_1 - 1 = \frac{\sqrt{6}}{3} t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{9} t \dots, \\ z_2 - 1 = -\frac{\sqrt{6}}{3} t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{9} t \dots, \\ z_3 + \frac{1 - i\sqrt{2}}{3} = \frac{2 - i\sqrt{2}}{18} t \dots, \\ z_4 + \frac{1 + i\sqrt{2}}{3} = \frac{2 + i\sqrt{2}}{18} t \dots. \end{array} \right.$$

Les développements selon les puissances ascendantes de $(\zeta + 1)$, $(\zeta - i)$ et $(\zeta + i)$ s'obtiennent de la même manière; toutefois, quant au choix des signes, on ne perdra pas de vue les observations faites p. 190 et 191 *Bull.*, *Sép.* 16 et 17. Nous nous bornons à indiquer les résultats.

Développement de z pour le voisinage de $\zeta = -1$.

En désignant $\zeta + 1$ par t , on a :

$$\begin{aligned} s_1 - \frac{4}{3} &= -\frac{8}{27} t \dots, \\ s_2 + \frac{2}{3} &= -\frac{4}{9} \sqrt{3} t^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{27} t \dots, \\ s_3 + \frac{2}{3} &= \frac{4}{9} \sqrt{3} t^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{27} t \dots; \\ t_1 + \frac{4}{3} &= \frac{4}{9} t \dots, \\ t_2 + \frac{i\sqrt{2}}{3} &= -\frac{i\sqrt{6}}{3} t^{\frac{1}{2}} - \frac{i\sqrt{2}}{18} t \dots, \\ t_3 - \frac{i\sqrt{2}}{3} &= -\frac{i\sqrt{6}}{3} t^{\frac{1}{2}} + \frac{i\sqrt{2}}{18} t \dots; \end{aligned}$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} z_1 + 1 = -\frac{i\sqrt{6}}{3} t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{9} t \dots, \\ z_2 + 1 = \frac{i\sqrt{6}}{3} t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{9} t \dots, \\ z_3 - \frac{1-i\sqrt{2}}{3} = \frac{2-i\sqrt{2}}{18} t \dots, \\ z_4 - \frac{1+i\sqrt{2}}{3} = \frac{2+i\sqrt{2}}{18} t \dots \end{array} \right.$$

Développement de z pour le voisinage de $\zeta = +i$.

Si l'on pose $\zeta - i = t$, il vient :

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} s_1 + \frac{1}{3} = \frac{8}{27} it \dots, \\ s_2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \sqrt{3} i \sqrt{-i} t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{27} it \dots, \\ s_3 - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9} \sqrt{3} i \sqrt{-i} t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{27} it \dots; \\ t_1 - \frac{4}{3} i = \frac{4}{9} t \dots, \\ t_2 - \frac{1}{3} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} i \sqrt{-i} t^{\frac{1}{2}} + \frac{i\sqrt{2}}{18} t \dots, \\ t_3 + \frac{1}{3} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} i \sqrt{-i} t^{\frac{1}{2}} - \frac{i\sqrt{2}}{18} t \dots; \\ z_1 - i = \frac{\sqrt{6}}{3} i \sqrt{-i} t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{9} t \dots, \\ z_2 - i = -\frac{\sqrt{6}}{3} i \sqrt{-i} t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{9} t \dots, \\ z_3 - \frac{\sqrt{2}-i}{3} = \frac{2+i\sqrt{2}}{18} t \dots, \\ z_4 + \frac{i+\sqrt{2}}{3} = \frac{2-i\sqrt{2}}{18} t \dots \end{array} \right.$$

Développement de z pour le voisinage de $\zeta = -i$.

Posant $\zeta + i = t$, il vient :

$$\begin{aligned}
 s_1 + \frac{4}{3} &= -\frac{8}{27} it \dots, \\
 s_2 - \frac{2}{3} &= \frac{4}{9} i\sqrt{i}\sqrt{3} t^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{27} it \dots, \\
 s_3 - \frac{2}{3} &= -\frac{4}{9} i\sqrt{i}\sqrt{3} t^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{27} it \dots; \\
 t_1 + \frac{4}{3} i &= \frac{4}{9} t \dots, \\
 t_2 + \frac{1}{3} \sqrt{2} &= -\frac{i\sqrt{i}\sqrt{6}}{3} t^{\frac{1}{2}} + \frac{i\sqrt{2}}{18} t \dots, \\
 t_3 - \frac{1}{3} \sqrt{2} &= -\frac{i\sqrt{i}\sqrt{6}}{3} t^{\frac{1}{2}} - \frac{i\sqrt{2}}{18} t \dots; \\
 (9) \left\{ \begin{aligned}
 z_1 + i &= -\frac{\sqrt{6}}{3} i\sqrt{i} t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{9} t \dots, \\
 z_2 + i &= \frac{\sqrt{6}}{3} i\sqrt{i} t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{9} t \dots, \\
 z_3 - \frac{i - \sqrt{2}}{3} &= \frac{2 + i\sqrt{2}}{18} t \dots, \\
 z_4 - \frac{i + \sqrt{2}}{3} &= \frac{2 - i\sqrt{2}}{18} t \dots
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Développement de z pour le voisinage de $\zeta = \infty$.

En substituant $\zeta = \frac{1}{t}$ de sorte qu'à $\zeta = \infty$ correspond $t=0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{2}{3} \sqrt[3]{2} t^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{4} t^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{18} \sqrt[3]{2} t^{\frac{10}{3}} \dots, \\
 s_2 &= \frac{2}{3} \sqrt[3]{2} \cdot \alpha t^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{4} \cdot \alpha^2 t^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{18} \sqrt[3]{2} \cdot \alpha t^{\frac{10}{3}} \dots, \\
 s_3 &= \frac{2}{3} \sqrt[3]{2} \cdot \alpha^2 t^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{4} \cdot \alpha t^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{18} \sqrt[3]{2} \cdot \alpha^2 t^{\frac{10}{3}} \dots;
 \end{aligned}$$

$$t_1 = \frac{2}{3t} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{16}\sqrt[3]{4} t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{32} t^3 \dots,$$

$$t_2 = \frac{2}{3t} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} \cdot \alpha t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{16}\sqrt[3]{4} \cdot \alpha^2 t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{32} t^3 \dots,$$

$$t_3 = \frac{2}{3t} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} \cdot \alpha^2 t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{16}\sqrt[3]{4} \alpha t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{32} t^3 \dots;$$

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{4}{3t} - \frac{9}{64} t^3 \dots, \\ z_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{16}\sqrt[3]{4} t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{32} t^3 \dots, \\ z_3 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} \cdot \alpha t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{16}\sqrt[3]{4} \cdot \alpha^2 t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{32} t^3 \dots, \\ z_4 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} \alpha^2 t^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{16}\sqrt[3]{4} \cdot \alpha t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{32} t^3 \dots \end{array} \right.$$

Ces développements confirment d'abord que les cinq points nommés sont des points de ramification. En outre, ils font connaître qu'aux points $\zeta = \pm 1$, $\zeta = \pm i$, la première et la seconde nappe de la surface de Riemann sont en connexion, tandis qu'au point $\zeta = \infty$ la jonction doit se faire entre la seconde, la troisième et la quatrième nappe. En effet, si on fait faire au point ζ , par exemple, le tour du point $\zeta = 1$, les puissances $(\zeta - 1)^{\frac{m}{2}}$, où m signifie un nombre entier impair, changeront de signe et les deux premières des séries (6) montreront, qu'alors z_1 passe en z_2 et réciproquement. Moyennant les séries (7), (8) et (9) on constate d'une manière analogue qu'aux points $\zeta = -1$, $\zeta = \pm i$, il y a transition entre les mêmes branches de la fonction z . En ces points la variable ζ , partant par exemple de la première nappe, aura besoin de deux tours pour y revenir. Les trois derniers des développements (10), enfin, font voir que si ζ fait une fois le tour du point $\zeta = \infty$ dans le sens des angles croissants, ou, ce qui revient au même,

si $\frac{1}{\zeta} = t$ fait une fois le tour du point $t = 0$ dans le sens des angles décroissants, z_2 passe en z_4 , z_4 en z_3 et z_3 en z_2 ; car par ce procédé, les puissances $t^{\frac{1}{3}}$, $t^{\frac{5}{3}}$, etc., prennent les facteurs $\frac{1}{\alpha} = \alpha^2$, $\frac{1}{\alpha^2} = \alpha$, etc. Par conséquent, au point $\zeta = \infty$ ce ne sera qu'après trois tours complets que le point mobile ζ , partant d'une certaine nappe, sera arrivé de nouveau au point de départ.

La connexion des nappes de la surface de Riemann étant connue, il y a en général plusieurs manières d'appliquer les lignes de passage. A l'aide des fig. 7 et 8, Pl. X, on s'assurera facilement que celle que nous venons d'adopter dans la première partie de ce travail, répond parfaitement à toutes les conditions posées par la nature même de la fonction z .



Fig. 9.

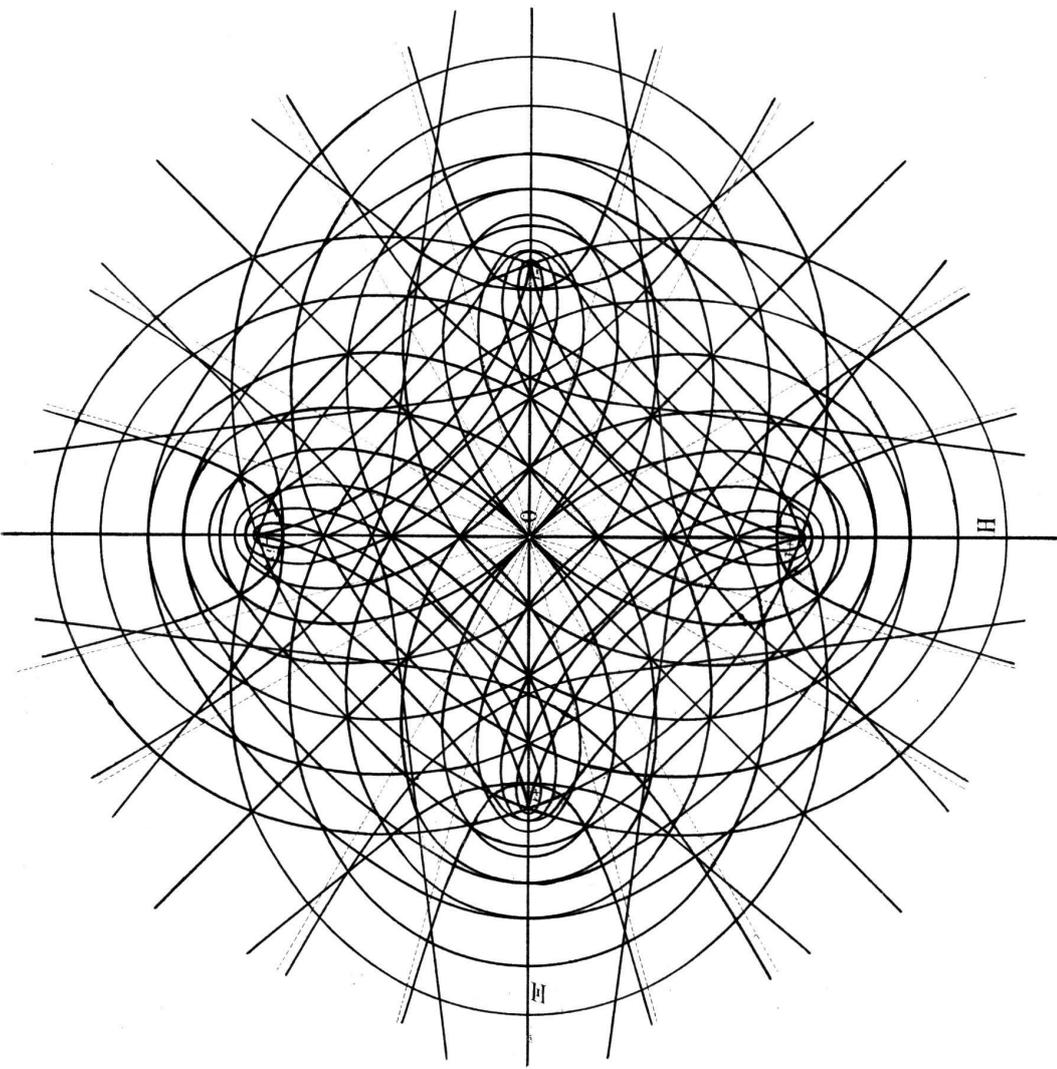
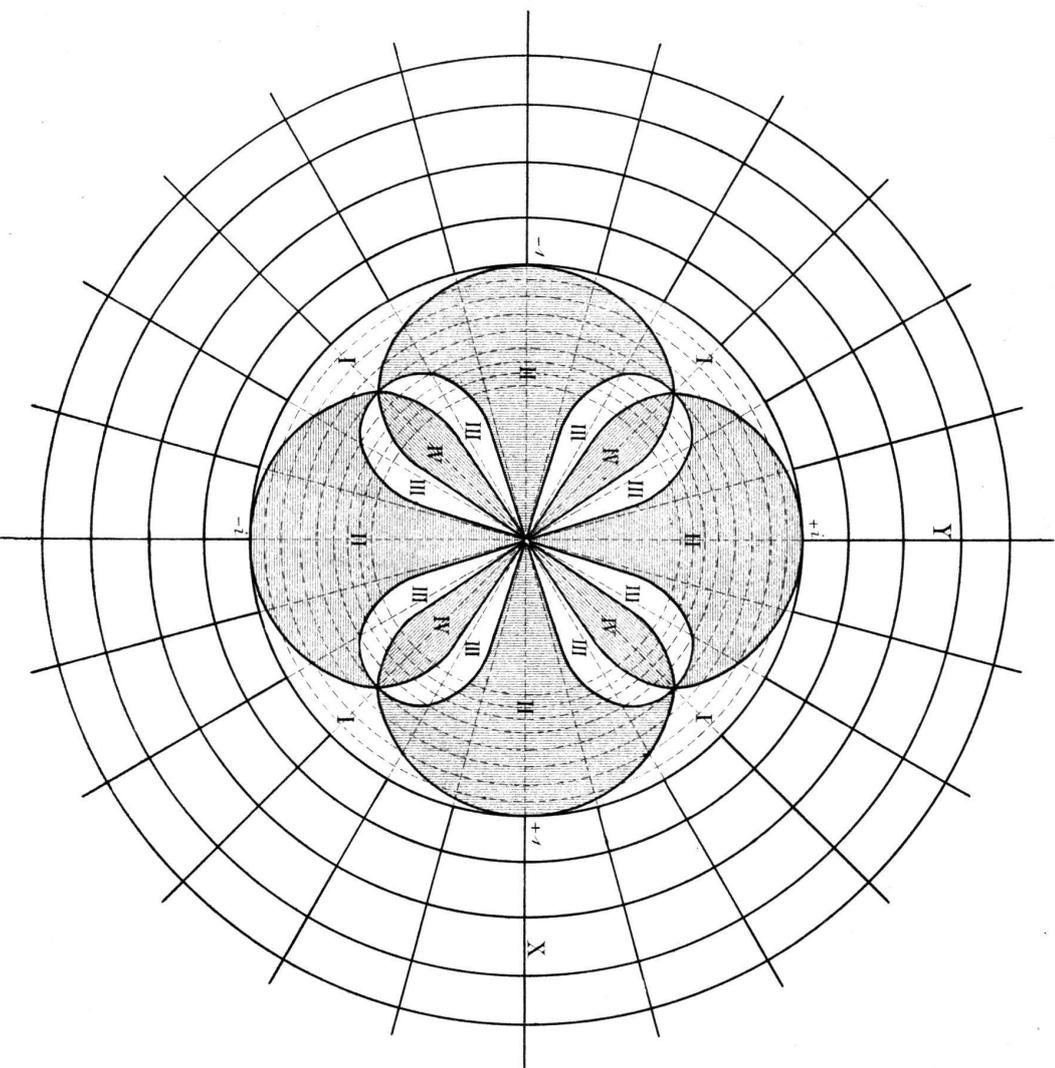
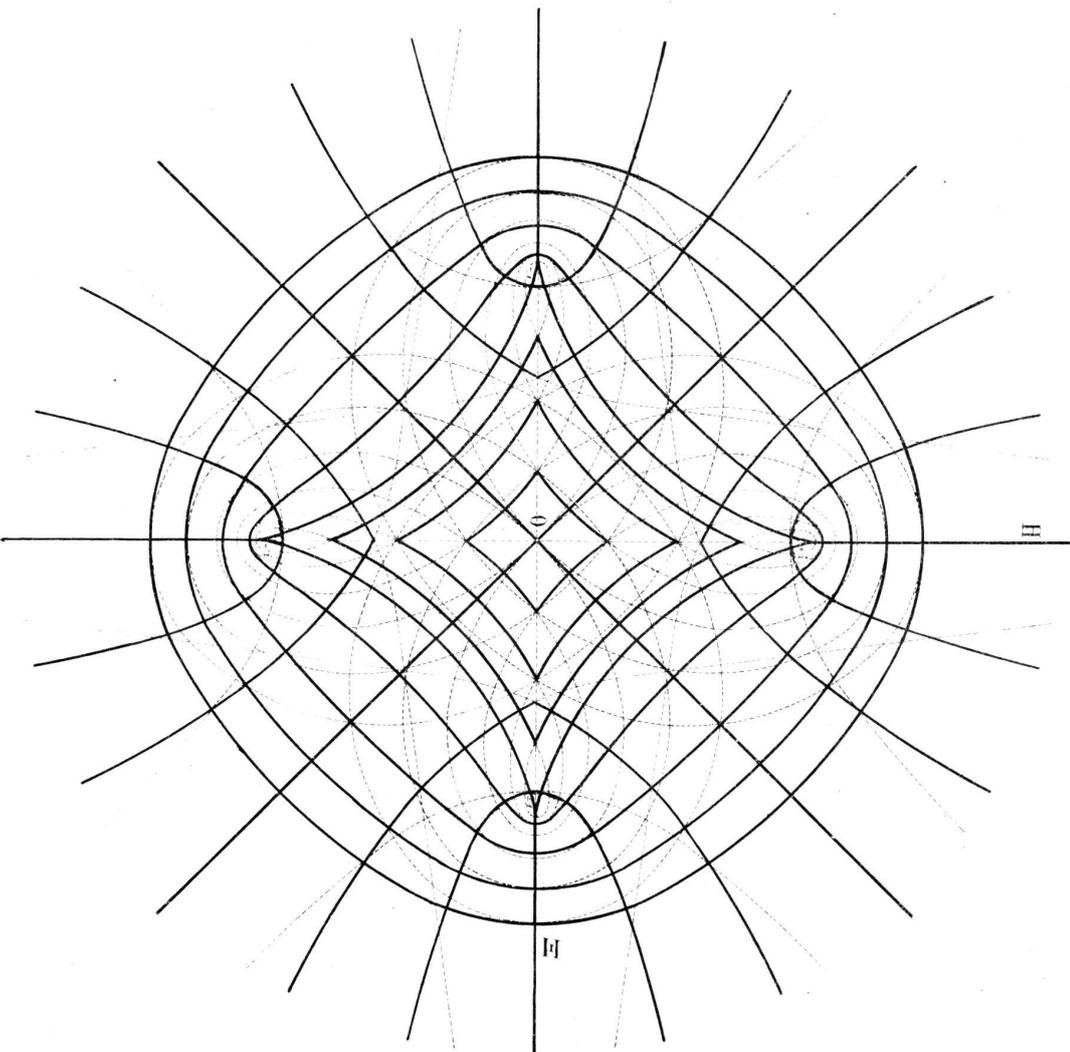


Fig. 10.



H. AMSTEIN-Representation conforme.

Fig. 11.



Bull. Soc. Vand. Sc. nat., Vol. V., Pl. XII.

Fig. 12.

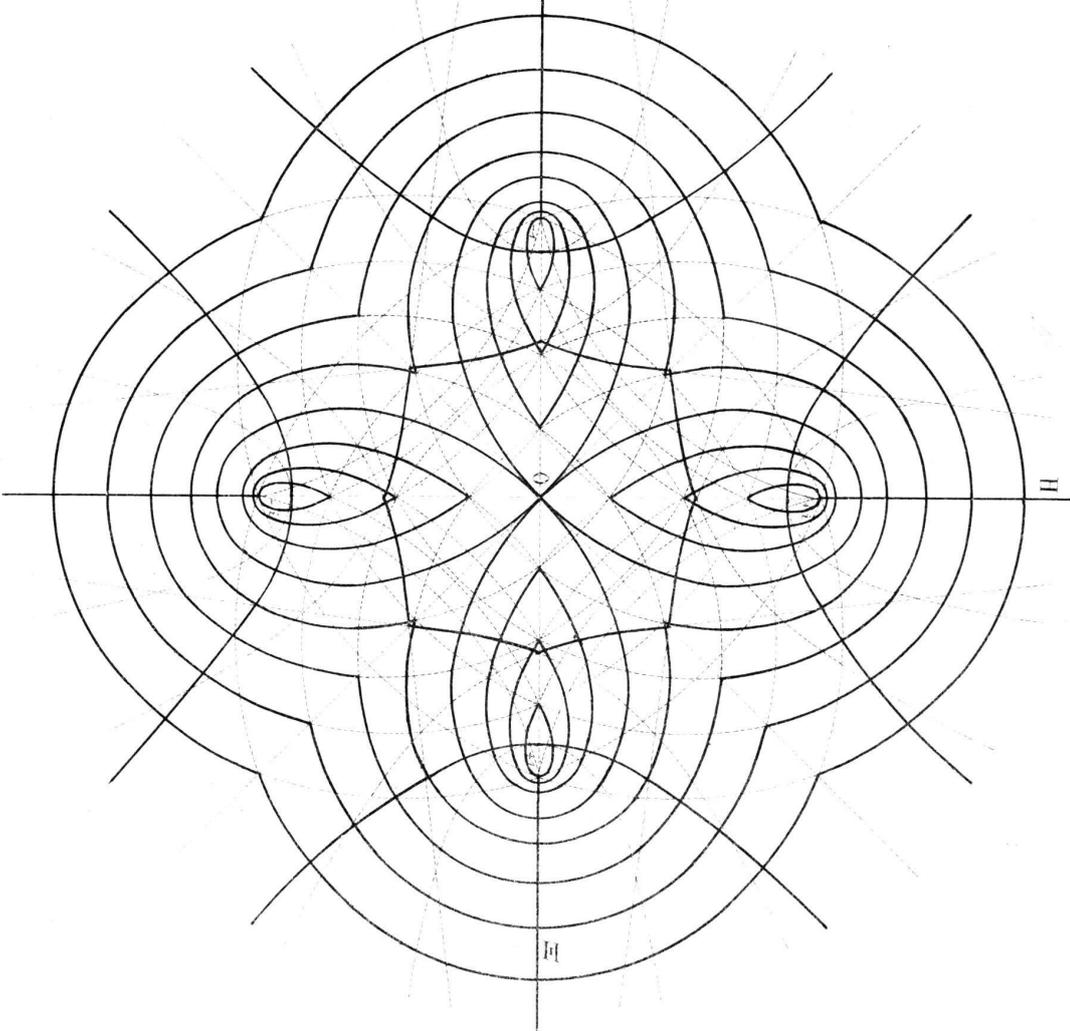


Fig. 13.

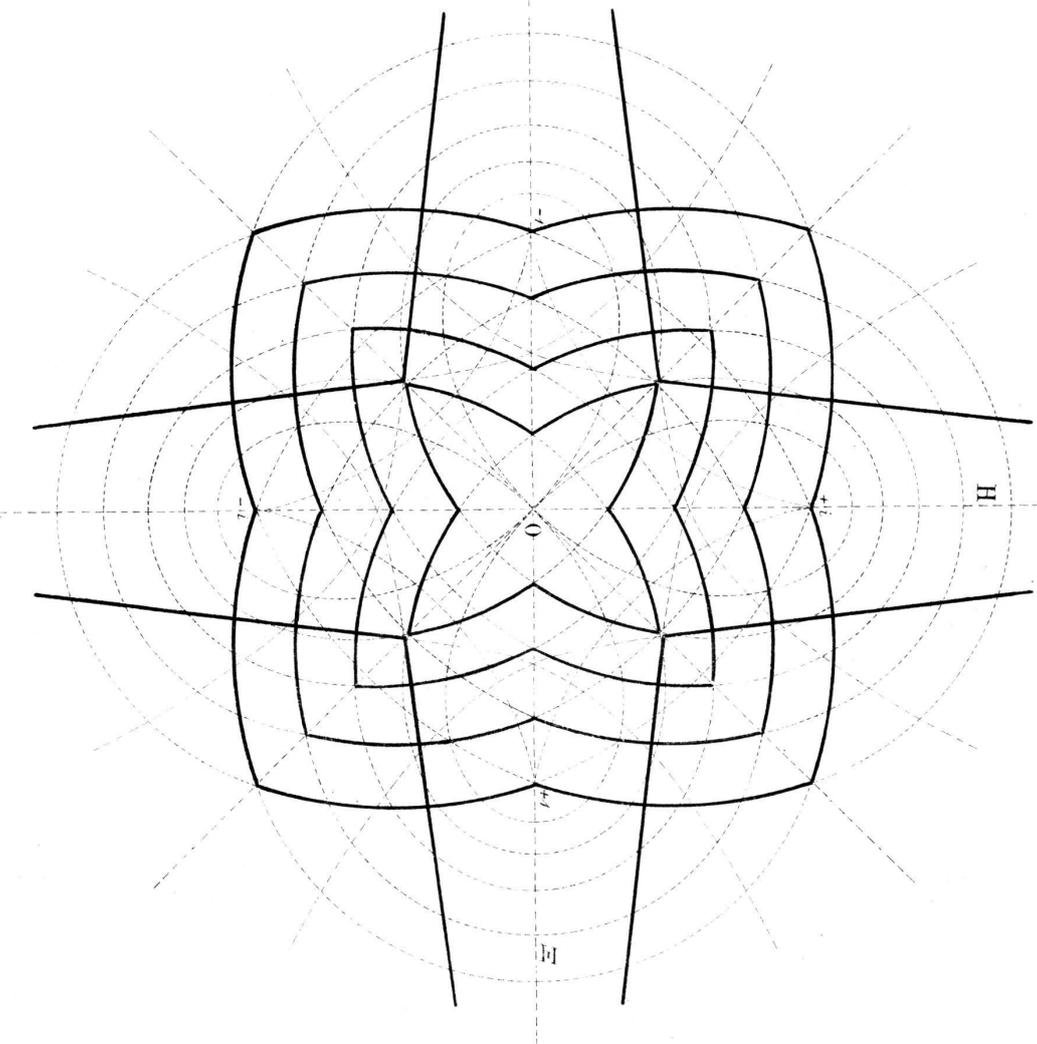


Fig. 14.

