Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 11 (1871-1873)
Heft: 67

Artikel: Assurances sur la vie : réserve des capitaux différés

Autor: Rieu, Auguste

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-257304

ASSURANCES SUR LA VIE

RÉSERVE DES CAPITAUX DIFFÉRÉS

PAR

Dr AUGUSTE RIEU.

NB. Nous nous référons, pour la notation et pour le sens dans lequel nous employons certaines expressions techniques, à un précédent mémoire. BULLETIN, n° 57, Vol. VII.

En abordant ce sujet, nous n'avons pas l'intention de traiter complétement la réserve, dont nous supposons la théorie connue, mais simplement d'exposer quelques simplifications de calcul dont elle nous a paru susceptible.

I. Capitaux différés à primes annuelles non restituables.

La réserve d'un capital différé à primes annuelles non restituables s'exprime par la formule suivante, dans laquelle

x	exprime	l'âge à l'époque de l'assurance,
$x+n$	»	l'âge pour lequel on cherche la réserve,
$n+t=d$	»	la durée du contrat,
$x+d$	»	l'âge à l'expiration du contrat.

$$\frac{D_{x+d}}{D_{x+n}} - P_x \frac{N_{x+n} - N_{x+d}}{D_{x+n}}$$

Elle est susceptible d'une simplification analogue à celle que nous avons exposée à propos des assurances au décès, seulement elle est plus compliquée, parce qu'à la rente viagère il faut substituer la rente temporaire, et qu'il faut tenir compte non-seulement de l'âge, mais du tems t restant à courir sur la durée totale d du contrat. En effet, si on se reporte à la formule qui donne la prime annuelle d'un capital différé, on reconnaîtra sans peine que le premier terme de la réserve, peut se mettre sous la forme :

$$P_{x+n}(t)\,\frac{N_{x+n}-N_{x+d}}{D_{x+n}}$$

réunissant en un seul, les deux termes de la formule, on obtient définitivement l'expression suivante :

$$\Big\{P_{x+n}(t)-P_x\Big\}\,\frac{N_{x+n}-N_{x+d}}{D_{x+n}} \qquad \text{(A)}$$

la lettre entre parenthèse, exprimant la durée, totale ou partielle du contrat.

On peut arriver à une expression plus simple encore, en partant d'un autre principe, que nous formulons ainsi :

Théorème. *La réserve à l'âge* x *étant connue, on obtient la réserve de l'année suivante soit à l'âge* x+1 *en capitalisant à une année de date, la réserve déjà connue, augmentée de la prime* P_x. Indiquant cette opération, on obtient :

$$\frac{D_x}{D_{x+1}}\left(\frac{D_{x+d}}{D_x}-P_x\,\frac{N_x-N_{x+d}}{D_x}\right)+P_x\,\frac{D_x}{D_{x+1}}$$

$$\frac{D_{x+d}}{D_{x+1}}-P_x\left(\frac{N_x-N_{x+t}-D_x}{D_{x+1}}\right)$$

Si l'on remarque que par le principe même qui préside à la formation de la quantité N,

$$N_x-D_x=N_{x+1}$$

l'expression prend définitivement la forme suivante :

$$\frac{D_{x+d}}{D_{x+1}} - P_x\left(\frac{N_{x+1} - N_{x+d}}{D_{x+1}}\right)$$

qui est la Réserve à l'âge $x+1$.

Ce théorème établi, nous conduit à une conséquence que nous allons justifier rigoureusement.

Corollaire. *La réserve d'un capital différé, à primes annuelles, à l'âge* x + n *est égale à la prime* Px *capitalisée à l'âge* x + n, *c'est-à-dire multipliée par le facteur* $\frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}$.

Soit proposé en effet de calculer la réserve, à l'âge $x+1$. La réserve à l'âge x est 0. Donc, d'après le théorème précédent, la réserve à l'âge $x+1$ sera égale à la seule prime Px capitalisée à l'âge $x+1$, soit

$$P_x \frac{D_x}{D_{x+1}}$$

A l'âge $x+2$, en nous en référant toujours au même théorème, la réserve aura pour valeur la réserve $x+1$ augmentée de la prime Px, le tout capitalisé à l'âge $x+2$, soit

$$P_x \frac{D_x}{D_{x+2}} + P_x \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}}$$

A l'âge $x+3$ on trouvera de même pour expression de la réserve

$$P_x \frac{D_x}{D_{x+3}} + P_x \frac{D_{x+1}}{D_{x+3}} + P_x \frac{D_{x+2}}{D_{x+3}}$$

$$= P_x \frac{N_x - N_{x+3}}{D_{x+3}}$$

en général à l'âge $x+n$

$$P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \qquad \text{(B)}$$

formule sensiblement plus expéditive que la formule (A).

Elle est justifiée empiriquement par l'application que nous en avons faite, à la plupart des cas qui se rencontrent dans la pratique ; citons seulement celle qui concerne une assurance de 100 francs, constituée sur une tête de 0 ans, et pour un terme de 20 ans ; et en plaçant le résultat en regard de la réserve calculée par la formule (A).

RÉSERVE

A l'âge de	FORMULE A	FORMULE B
1 an.	3,550	3,549
3	10,575	10,575
5	18,115	18,115
10	39,857	39,857
15	66,450	66,450
19	92,635	92,634
20	100,000	100,000

Les différences très légères ne portent que sur le 4e ou 5e chiffre et n'ont d'autre cause que l'imperfection des logarithmes à 5 décimales, qui laisse toujours un peu de doute sur le dernier chiffre.

Ajoutons que, pour obtenir cette concordance, il est nécessaire de calculer sur la prime nette, obtenue directement et sans interpolation.

II. Primes annuelles restituables.

La réserve d'un capital différé à primes annuelles restituables à l'âge $x+n$ est de la forme suivante, dans laquelle les lettres x, n et t conservent la valeur que nous leur avons attribuée.

$$\frac{D_{x+d}}{D_{x+n}}+\frac{R_{x+n+1}-R_{x+d+1}-tM_{x+d+1}}{D_{x+n}}P_x-\frac{N_{x+n}-N_{x+d}}{D_{x+n}}P_x$$

dont : 1° le premier terme exprime la valeur actuelle de la somme garantie ; 2° le second l'assurance éventuelle des primes à recevoir ; 3° l'escompte et la déduction des dites primes, à quoi il faut ajouter un quatrième terme, c'est-à-dire l'assurance temporaire de la somme des primes déjà perçues. Cette formule très compliquée comporte une simplification analogue à celle de la formule A dans le paragraphe précédent.

Si l'on fait attention que l'on a toujours entre la prime annuelle restituable, et la valeur actuelle du capital, l'équation suivante :

$$\frac{N_{x+n}-N_{x+d}}{D_{x+n}}P_{x+n(t)}=\frac{D_{x+d}}{D_{x+n}}+$$

$$\frac{R_{x+n+1}-R_{x+d+1}-tM_{x+d+1}}{D_{x+n}}P_{x+n(t)}$$

on en tirera pour le valeur de $\frac{D_{x+d}}{D_{x+n}}$:

$$\frac{D_{x+d}}{D_{x+n}}=\left\{\frac{N_{x+n}-N_{x+d}}{D_{x+n}}-\frac{R_{x+n+1}-R_{x+d+1}-tM_{x+d+1}}{D_{x+n}}\right\}P_{x+n(t)}$$

substituant cette valeur dans l'expression de la réserve, il vient :

$$\left\{ P_{x+n}(^t) - P_x \right\} \left\{ \frac{N_{x+n} - N_{x+d}}{D_{x+n}} - \frac{R_{x+n+1} - R_{x+d+1} - tM_{x+d+1}}{D_{x+n}} \right\} \qquad (A)$$

plus l'assurance temporaire des primes payées.

Cette formule est trop compliquée pour le calcul des inventaires. On peut l'abréger en négligeant le terme en R, qui est nécessairement très petit. L'expression se reduira donc aux deux termes

$$\left\{ P_{x+n}(^t) - P_x \right\} \frac{N_{x+n} - N_{x+d}}{D_{x+n}} \qquad (B)$$

sans préjudice de l'assurance des primes payées.

On aura ainsi une réserve un peu plus forte que la réserve exacte ; mais dans des limites tolérables en pratique, ce qui n'est pas un mal.

On pourra en juger par l'exemple suivant que nous avons calculé des deux manières, mais en négligeant l'assurance des primes payées, qui est la même dans les deux cas.

Capital assuré : 100 francs.
Age de l'assuré : 5 ans.
Durée du contrat : 20 ans.

Réserve à l'âge de	Formule A.	Formule B.	Différence.
10 ans.	16,955	17,682	0,727
15 »	38,192	39,445	0,253
20 »	65,258	66,532	0,374

Si l'on a calculé pour un capital de 100 fr., des tableaux de toutes les primes annuelles des capitaux différés, restituables et non restituables, pour tous les âges et tous les termes exigés par la pratique([1]), soit respectivement de 0 à 60 ans et de 1 à 30, — si l'on a calculé en outre dans les mêmes limites les deux expressions que nous appellerons **Facteurs de la réserve**.

$$\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \quad \text{et} \quad \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \quad (^2)$$

Le calcul de la réserve s'opérera très promptement.

III. Réserve pour un nombre d'années fractionnaire.

Les principes qui précèdent suffisent pour calculer la réserve correspondante à un nombre entier d'années ; mais si on doit la connaître pour une date précise, par exemple le 31 décembre, comme les compagnies y sont amenées forcément par la nécessité de fixer la répartition des bénéfices, la question est plus délicate. Nous n'avons pas rencontré, jusqu'à présent, de solution qui nous ait pleinement satisfait

Le Dr ZILLMER conseille de calculer deux réserves consécutives, de prendre la différence; et sur cette différence une partie proportionnelle à la fraction d'année. Ce moyen est trop compliqué et peu pratique, parce qu'il exige pour l'accessoire plus de travail que pour le principal. La loi ci-dessus démontrée sur l'accroissement annuel de la réserve, répondrait mieux au but, puisqu'elle donne immédiatement le résultat qu'on cherche à obtenir par la différence de deux Réserves. Mais ce procédé serait inapplicable aux capitaux différés à primes annuelles restituables, parce qu'il faudrait une seconde opération pour déterminer la part qu'a dans l'accroissement de la Réserve, l'assurance des primes restituables. Autant vaudrait alors en revenir au procédé du Dr Zillmer. Prendre une partie proportionnelle de la prime comme on le fait aussi, est insuffisant, puisque la prime est inférieure à l'accroissement annuel de la Réserve.

1 Il est évident que ce calcul doit se faire en partie directement; en partie par interpolation.

2 C'est ce qu'a fait la Compie LA SUISSE.

Voici le procédé auquel nous nous sommes arrêté de préférence. La Réserve est une fonction du temps, qui joue dans son expression le rôle de variable indépendante. Quand ses variations sont très petites, elle tend comme toutes les fonctions à se rapprocher de la loi de proportionnalité. On pourra donc, dans le cas qui nous occupe, supposer que la réserve croît proportionnellement au temps; déterminer cet accroissement moyen annuel et en prendre une partie proportionnelle à la fraction d'année. Cette détermination se fait facilement de la manière suivante : La réserve est $=0$ au moment du contrat; à l'échéance elle est égale à la somme assurée; dans l'intervalle elle passe par toutes les valeurs intermédiaires. En divisant donc la dite somme par la durée du contrat, le quotient donnera **l'accroissement** moyen **annuel de la réserve.** Par exemple pour une assurance de 100 fr. payable au bout de 20 ans, cet accroissement moyen sera de 5 fr. Par cela seul que cet accroissement est moyen, il ne dépend que de la somme assurée et de la durée du contrat; il est indépendant de l'âge, étant dans les premières années supérieur, dans les dernières inférieur à l'accroissement réel.

Le principe des moyennes implique celui des compensations; on pourra donc se servir utilement de cette méthode à la fois courte et approximative, dans les inventaires, où il s'agit surtout de connaître le total de la Réserve, et réserver le calcul rigoureux tour le cas où il importera de connaître exactement la réserve de pel ou tel contrat déterminé, par exemple dans le cas de résiliation.

Quant aux **capitaux différés à primes annuelles restituables,** on pourra négliger l'accroissement fractionnaire de la réserve en ce qui concerne l'assurance des primes payées; cet accroissement étant très-petit et la réserve un peu trop forte.