Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 10 (1868-1870)
Heft: 64

Artikel: Résolution des équations numériques du 3e degré
Autor: Burnier, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-256583

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES DU 3e DEGRÉ

PAR

F. BURNIER, col.

Les fonctions circulaires ou trigonométriques sont connues par tous ceux qui ont à faire avec les mathématiques. On en possède des tables étendues et partout répandues. Ces fonctions sont employées avec avantage à la résolution des équations du 3e degré, surtout dans le cas des trois racines réelles. Pour celui d'une seule racine, les formules et le calcul sont loin d'être aussi simples.

L'inverse se présente avec les fonctions hyperboliques ; celles-ci résolvent très simplement le 3e degré, lorsque l'équation n'a qu'une racine. Malheureusement la notion de ces fonctions n'est familière qu'à un petit nombre de mathématiciens, et les tables qui en donnent les valeurs numériques sont peu étendues et peu répandues, comparativement à celles des fonctions circulaires.

J'ai cherché si on n'arriverait pas aussi simplement au même résultat, immédiatement et sans l'intermédiaire de fonctions, au fond, étrangères au sujet.

Pour cela, j'ai calculé des tables qui, étendues indéfiniment par la pensée, donneraient immédiatement et sans calcul les racines d'une équation quelconque du 3e degré. Mais en fait, les tables en question sont fort restreintes et ne fourniraient le plus souvent qu'une approximation insuffisante. C'est par le moyen des logarithmes d'addition et de soustraction que je complète cette première approximation donnée par la table, ainsi qu'on le verra dans un moment.

La méthode est complétement logarithmique ; sauf au point de départ et à l'arrivée, on ne passe jamais du nombre au logarithme, ou inversément. Les logarithmes sont à cinq décimales ; ils donnent, au résultat définitif, quatre chiffres de la racine, à part certains cas; souvent cinq à quelques unités près.

Je fais nsage des logarithmes d'addition et de soustraction qui se trouvent dans l'ouvrage de M. Hoüel, intitulé : *Recueil de formules et de tables numériques;* Paris 1866 et 1868. Voici la manière de se servir des tables de M. Hoüel :

Pour trouver log $(a + b)$ ou log $(a - b)$, connaissant log a et log b, on forme d'abord le logarithme du rapport du plus petit au plus grand des deux nombres; c'est-à-dire, la différence log b — log a, dont la caractéristique est toujours négative. Avec cette différence on entre dans la table d'addition ou dans la table de soustraction. Par une interpolation à vue, on y trouve le logarithme additif A, ou le logarithme soustractif S. Le résultat cherché s'obtient en modifiant le plus grand des deux logarithmes. Ainsi :

$$\log(a + b) = \log a + \mathrm{A}$$
$$\log(a - b) = \log a - \mathrm{S}$$

Il y a à remarquer qu'avec les tables du Recueil de M. Hoüel, l'entrée est *directe;* comme lorsqu'on cherche le log d'un nombre dans une table ordinaire. De plus, les logarithmes additifs et soustractifs vont en croissant avec l'argument $\log \frac{b}{a}\cdot$ Aussi ces tables me paraissent présenter des avantages de simplicité et d'uniformité qui ne se rencontrent pas au même degré dans les tables analogues très nombreuses publiées en France et en Allemagne. Espérons que l'auteur les insérera dans ses excellentes tables de logarithmes à cinq décimales, à la place de celles qui s'y trouvent. Il est vrai que les différences tabulaires sont, en quelques endroits, un peu fortes. Mais avec le secours d'une *règle à calcul* on surmonte cet inconvénient et l'on a l'avantage d'avoir des tables contenues, chacune, dans deux pages seulement. Cet admirable instrument, suivant une désignation donnée à la règle à calcul par M. Hoüel et que tous les calculateurs qui se la sont rendue familière ratifieront, sera aussi très commode pour l'interpolation de nos tables et pour effectuer rapidement la petite division qui termine les calculs particuliers à notre méthode.

Je consacrerai quelques lignes à des préliminaires universellement connus, afin de comprendre dans mon travail l'ensemble de la résolution numérique de l'équation du 3^{e} degré.

L'équation générale du 3e degré

$$X^3 + AX^2 + BX + C = 0$$

se ramène à l'équation $x^3 + Px + Q = 0$ en posant :

$$X = x - \frac{1}{3}A, \quad P = B - \frac{1}{3}A^2, \quad Q = C - \frac{1}{9}A(B + 2P).$$

Dans le cas particulier où $B = 0$, cette transformation s'effectue plus simplement en posant : $X = \frac{1}{x}$; d'où l'équation :

$$x^3 + \frac{A}{C}x + \frac{1}{C} = 0.$$

On représente par p et q les valeurs numériques de P et de Q et l'on a à considérer les deux cas suivants, d'après le signe de P :

$$(1) \quad x^3 + px \pm q = 0 \qquad (2) \quad x^3 - px \pm q = 0$$

Dans chaque groupe les deux équations ont les mêmes racines, à part leur signe qui change avec celui du dernier terme.

Les deux équations (1) n'ont qu'une racine de signe contraire au dernier terme.

Les deux équations (2) ont toujours une racine isolée de signe contraire au dernier terme. Elles peuvent en avoir deux autres conjuguées, de même signe que le dernier terme, lorsque q est en dessous d'une certaine valeur dépendante de p.

Je pose $\qquad x = \sqrt{p}.\ Z \qquad a = \frac{q}{p\sqrt{p}}$

La résolution des équations précédentes se ramène à celle des suivantes :

$$Z^3 + Z \pm a = 0 \qquad Z^3 - Z \pm a = 0$$

Les deux équations $Z^3 + Z + a = 0$ et $Z^3 + Z - a = 0$, ayant même racine, à part le signe, il suffira de résoudre la seconde, dont la racine est positive, soit l'équation :

$$Z^3 + Z = a.$$

Les deux équations $Z^3 - Z + a = 0$, $Z^3 - Z - a = 0$, ont mêmes racines, mais de signes opposés. Elles ont toujours une racine réelle de signe contraire au dernier terme et plus grande que l'unité.

Pour $a < \sqrt{\frac{4}{27}}$ ces équations ont, en outre, deux racines conjuguées de même signe que le dernier terme et plus petites que l'unité. Je représenterai les deux racines conjuguées par Z' et Z'' et la racine isolée toujours réelle par Z'''. Afin de n'avoir que des nombres positifs, on mettra l'équation sous l'une ou l'autre forme

$$Z - Z^3 = a \quad \text{ou} \quad Z^3 - Z = a$$

suivant qu'il s'agira de Z' et de Z'', ou bien de Z'''.

Les trois tables que j'ai calculées donnent les trois premières décimales de log Z pour toutes les valeurs de log a.

La table I donne le log de la racine de l'équation :

$$Z^3 + Z = a.$$

La table II donne les log de Z' et de Z'', racines positives conjuguées de l'équation : $Z - Z^3 = a$.

La table III donne log Z''', racine positive isolée de l'équation:

$$Z^3 - Z = a.$$

Je représente par α le nombre formé par les deux dernières décimales de log Z ; les trois premières étant données par la table. La résolution de l'équation est ramenée à la détermination de α.

Au moyen des logarithmes d'addition et de soustraction on forme l'expression à cinq décimales du logarithme du premier membre, en faisant entrer α dans le calcul des parties proportionnelles des différences. On égale cette expression à log a et l'on a une équation du premier degré, d'où l'on tire α et, par suite, log Z exprimé à cinq décimales.

On peut intervertir l'ordre des termes de l'équation; mais la méthode reste la même : égaler les log des deux membres en traitant l'indéterminée α comme l'inconnue d'un problème que l'on met en équation. Ainsi, lorsque a est très petit, Z'' et Z''' très voisines de l'unité diffèrent peu de leurs cubes. On se trouve dans le cas défavorable des log de soustraction. Afin de sortir de cet inconvénient, on mettra l'équation sous la forme :

pour Z'' : $\quad Z'' = Z''^3 + a, \quad$ ou $\quad Z''^3 = Z'' - a$

pour Z''' : $\quad Z'''^3 = Z''' + a, \quad$ ou $\quad Z''' = Z'''^3 - a.$

Exemple Ier. — Soit à résoudre $Z^3 + Z = a$, où $\log = \bar{1},93115$. La table I interpolée donne pour log Z correspondant à log a une valeur que je complète ainsi :

$$\log Z = \bar{1},79100 + \alpha, \qquad \text{d'où}$$
$$\log Z^3 = \bar{1},37300 + 3\alpha$$
$$\text{Différence}, \quad \bar{1},58200 + 2\alpha$$

Avec cette différence j'entre dans la table des logarithmes d'addition et je trouve pour le logarithme additif 0,14049 avec une différence tabulaire de 28 pour 1 unité de la 3e décimale; donc pour 2α unités de la 5e décimale, la partie proportionnelle sera :

$$2\alpha\,\frac{28}{100}.$$

Egalant les logarithmes des deux membres, j'écris l'équation :

$$\bar{1},79100 + \alpha + 0,14049 + 2\alpha\,\frac{28}{100} = \bar{1},93115$$

qui se réduit à $1,56\alpha = -34$;
d'où $\alpha = -22$; $\log Z = \bar{1},79100 - 22 = \bar{1},79078$ et $Z = 0,6177$. Si l'équation à résoudre avait été $Z^3 + Z + a = 0$, les calculs auraient été les mêmes, sauf le signe de la racine, $Z = -0,6177$.

Je vais résoudre la même équation en la mettant sous la forme : $Z^3 = a - Z$, au moyen des logarithmes de soustraction.

$$\log Z = \bar{1},79100 + \alpha$$
$$\log a = \bar{1},93115$$
$$\text{Différence}, \quad \bar{1},85985 + \alpha$$

Avec cette différence j'entre dans la table des logarithmes de soustraction; le logarithme soustractif correspondant à $\bar{1},859$ est 0,55716 et la différence tabulaire 262 pour 1 unité de la 3e décimale, donc 2,62 pour 1 unité de la 5e. La partie proportionnelle a pour expression : $(85 + \alpha) \times 2,62$. — Egalant le log du second membre à 3 fois le log de Z, j'aurai :

$$\bar{1},37300 + 3\alpha = \bar{1},93115 - 0,55716 - (85 + \alpha) \times 2,62$$

qui se réduit à $5,62\alpha = -124$; d'où $\alpha = -22$.

Exemple II. — Trouver la hauteur d'un segment sphérique équivalant au quart de la sphère. — L'équation du problème est :

$$\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{3} \pi R^3.$$

Posant $h = \frac{R}{x}$, on aura à résoudre

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

$p = 3$, $q = 1$, $\log \sqrt{p} = 0{,}23856$; d'où l'équation en Z

$$Z^3 - Z + a = 0 ; \log a = \bar{1}{,}28432.$$

Les trois racines sont réelles, puisque $\log a < \bar{1}{,}585$; mais la racine isolée qui est négative ne peut convenir. Des deux racines conjuguées, Z' ne peut convenir non plus ; car la simple inspection de la table II montre que $\log Z'$ ajouté à $\log \sqrt{p}$ correspondrait à une valeur d'x plus petite que 1 et même plus petite que $\frac{1}{2}$. Il suffit donc de calculer Z''.

Je mets l'équation sous la forme $Z'' - a = Z''^3$ et je vais égaler les log des deux membres.

La table II interpolée donne :

$$\log Z'' = \bar{1}{,}94600 + \alpha$$ qui retranché de
$$\log a = \bar{1}{,}28432$$ donne la

$$\text{Différence, } \bar{1}{,}33832 - \alpha$$

Le logarithme soustractif correspondant à $\bar{1}{,}338$ est $0{,}10667$ et la différence tabulaire $0{,}27$ pour 1 unité de la 5e décimale ; l'équation en α est :

$$\bar{1}{,}94600 + \alpha - 0{,}10667 - (32 - \alpha) \times 0{,}27 = \bar{1}{,}83800 + 3\alpha$$

$$1{,}73\alpha = 124 ; \alpha = 72$$

$$\log Z'' = \bar{1}{,}94600 + 72 = \bar{1}{,}94672$$

$$\log \sqrt{p} \quad 0{,}23856$$

$$\log x \quad 0{,}18528$$

$$\log \frac{1}{x} \quad \bar{1}{,}81472 ; h = 0{,}6527 \text{ R}.$$

Exemple III. — Déterminer les dimensions d'un cylindre d'un volume donné et dont la hauteur surpasse le diamètre d'une quantité b.

L'équation du problème : $\pi R^2 (2R + b) = V$, se ramène à

$$x^3 - \frac{\pi b}{V} x - \frac{2\pi}{x} = 0 \text{ , en posant } R = \frac{1}{x}.$$

Soit $V = 10$, $b = 1$. On a à résoudre

$$x^3 - \frac{\pi}{10}x - \frac{2\pi}{10} = 0 ; \quad p = \frac{\pi}{10} \quad q = \frac{2\pi}{10}$$

$\log \sqrt{p} = \bar{1}.74857$; $\log a = 0{,}55246 > \bar{1}{,}585$;
il n'y a qu'une solution.

La table III donne $\log Z''' = 0{,}24200 + \alpha$

$$\log Z'''^3 = 0{,}72600 + 3\alpha$$

$$\text{Différence, } \bar{1}{,}51600 - 2\alpha$$

Egalant les log des deux membres de $Z'''^3 - Z''' = a$, on aura l'équation en α :

$$0{,}72600 + 3\alpha - 0{,}17269 + 2\alpha\frac{49}{100} = 0{,}55246$$

qui se réduit à $3{,}98\alpha = -85$; d'où $\alpha = -21$

donc $\log Z''' = 0{,}24200 - 21 = 0{,}24179$

$$\log \sqrt{p} \quad \bar{1}{,}74857$$

$$\log x \quad \bar{1}{,}99036$$

$$\log \frac{1}{x} = \log R = 0{,}00964 \; ; \; R = 1{,}022.$$

A part le cas particulier des racines Z' et Z'' très peu différentes, correspondant à une valeur de a très voisine de $\sqrt{\frac{4}{27}}$, la méthode générale que je viens d'exposer s'applique sans difficulté aux valeurs extrêmes de a. Cependant, pour ces cas là, on peut employer des formules particulières que je vais indiquer.

$$Z^3 + Z = a \qquad a \text{ très petit.}$$

L'équation peut se mettre sous la forme :

$$a - Z = \frac{a^3}{1 + a^2 + aZ + Z^2} ;$$

Z étant peu différent de a, je fais cette substitution au dénominateur et j'aurai la formule approximative :

$$a - Z = \frac{a^3}{1 + 3a^2}\,; \qquad \text{d'où } Z = \frac{a\,(1 + 2a^2)}{1 + 3a^2}.$$

Je substitue dans l'équation proposée et je cherche le 1er terme de la correction ; je trouve $-3a^7$. Ainsi l'erreur relative sur Z est $+3a^6$ et celle sur log Z, $3Ma^6$.

Je résous $3Ma^6 < 10^{-5}$, qui me donne $\log a < \bar{1},147$.

En dessous de cette valeur de log a l'erreur sur log Z sera moindre qu'une unité de la cinquième décimale.

$$Z^3 + Z = a \qquad\qquad a \text{ très grand.}$$

Je mets l'équation sous la forme :

$$Z = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 - Z^3 = \left(\sqrt[3]{a} - Z\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + Z\sqrt[3]{a} + Z^2\right)$$

Je substitue dans le trinôme $\sqrt[3]{a}$ à la place de Z et j'obtiens une formule approximative d'où je tire $Z = \dfrac{3a}{3\sqrt[3]{a^2} - 1}$.

Je substitue cette valeur approchée dans le second membre de $Z^3 = a - Z$; il vient :

$$Z^3 = a\,\frac{3\sqrt[3]{a^2} - 2}{3\sqrt[3]{a^2} + 1}.$$

Il s'agit d'évaluer l'erreur de la valeur de Z tirée de cette expression. — Je forme l'expression de Z en développant la racine cubique des deux binômes et en me bornant aux trois premiers termes de ces développements. Puis je substitue Z^3 et Z dans le premier membre de $Z^3 + Z - a = 0$. Le premier terme du résultat est $-\dfrac{1}{9a}$; d'où, en divisant par la dérivée, la correction

sur Z égale à $$+\frac{1}{27a\sqrt[3]{a^2}}\,;$$

erreur relative sur Z, $\quad -\frac{1}{27a^2}$;

erreur sur le log de Z, $\quad -\frac{M}{27a^2}$.

Je résous $\frac{M}{27a^2} < 10^{-5}$; il vient $\log a > 1{,}603$.

Le calcul de la formule approchée se fera très facilement au moyen des logarithmes d'addition et de soustraction, en la mettant sous la forme :

$$Z^3 = a \frac{1 - \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{a}}{a}}{1 + \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{a}}{a}}.$$

$$\log \frac{2}{3} = \bar{1}{,}82391 \qquad \log \frac{1}{3} = \bar{1}{,}52288.$$

$$Z - Z^3 = a \qquad a \text{ très petit.}$$

Racine Z'.

Les calculs sont analogues à ceux qu'on a vus pour l'équation $Z^3 + Z = a$, et l'on trouve :

$$Z' = \frac{a(1 - 2a^2)}{1 - 3a^2} \qquad \text{avec une erreur}$$

sur $\log Z'$ de $-3Ma^6$.

Racines Z'' et Z''' $\qquad a$ très petit.

Je retranche membre à membre les deux équations :

$$Z'''^3 - Z''' = a$$
$$Z'' - Z''^3 = a \qquad \text{et je supprime}$$

le facteur $Z''' + Z''$; il viendra $Z'''^2 - Z'''Z'' + Z''^2 - 1 = 0$; ce qu'il est facile de transformer ainsi :

$$(Z''' + Z'')^2 = 1 + 3Z'''Z''.$$

Je remplace le produit $Z'''Z''$ par sa valeur tirée de la relation

$$Z'Z''Z''' = a \; ,$$

et j'aurai

$$(Z''' + Z'')^2 = 1 + \frac{3a}{Z'} \; ;$$

avec la relation $Z''' - Z'' = Z'$, on pourra calculer les deux autres racines connaissant Z'. Je donnerai plus loin un exemple de calcul logarithmique pour un cas analogue.

Mais si l'on ne veut pas employer la méthode générale au calcul de Z'' et de Z''', il sera plus simple de mettre l'équation sous la forme : $\quad Z''^2 = 1 - \frac{a}{Z''} \qquad Z'''^2 = 1 + \frac{a}{Z'''}$

et de procéder par approximations successives en partant de celles données par les tables II et III.

En dessous d'une valeur de log a qu'on peut estimer à $\bar{2},0$, cette substitution donnera log Z'' et log Z''' à cinq décimales exactes.

$Z^3 - Z = a \qquad\qquad a$ très grand.

Racine Z'''.

La formule et la manière d'y arriver sont analogues à ce même cas pour l'équation $Z^3 + Z = a$. — L'on a ici :

$$Z'''^3 = a \frac{1 + \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{a}}{a}}{1 - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{a}}{a}} \; ,$$

avec une erreur sur log Z''' de $+ \frac{M}{27a^2}$.

Racines Z′ et Z″ très peu différentes.

Quoique le calcul de la racine isolée Z‴ ne présente rien de particulier et qu'il puisse se faire par la méthode ordinaire, je vais chercher une expression approchée de cette racine, pour le cas que nous considérons ici, savoir, a peu différent de $\sqrt{\frac{4}{27}}$.

Je pose : $\log a = \log \frac{2}{3\sqrt{3}} - \delta$. Je considère la petite quantité $-\delta$ comme le logarithme du nombre $1 - \frac{\delta}{M}$; l'on aura:

$$\log a = \log \frac{2}{3\sqrt{3}} + \log\left(1 - \frac{\delta}{M}\right); \qquad \text{soit}$$

autrement
$$a = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\delta}{M}\right).$$

L'équation à résoudre est donc :

$$Z'''^3 - Z''' = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\delta}{M}\right);$$

je la transforme de la manière suivante :

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - Z'''^3 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - Z'''\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{\delta}{M}.$$

Ou bien en décomposant le premier binôme :

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - Z'''\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}Z''' + Z'''^2\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{\delta}{M}.$$

Je remplace dans la seconde paranthèse Z‴ par $\frac{2}{\sqrt{3}}$; elle devient simplement 3. J'arrive ainsi à l'expression approchée :

$$Z''' = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\delta}{9M}\right).$$

Au moyen des relations $Z' + Z'' = Z'''$, $Z'Z'' = \frac{a}{Z'''}$ il serait facile de tirer les valeurs de deux racines conjuguées et de les exprimer en fonction de δ seulement.

Mais il est préférable de chercher $Z'' - Z'$, maintenant que nous connaissons $Z'' + Z'$.

Je retranche membre à membre les deux équations :

$$Z''^3 - Z'' = a \qquad Z'^3 - Z' = a;$$

je supprime le facteur $Z'' - Z'$ et j'arrive à la relation :

$$1 - Z''^2 - Z''Z' - Z'^2 = 0,$$

que je transforme en la suivante :

$$(Z'' - Z')^2 = 1 - 3Z''Z' = 1 - \frac{3a}{Z'''}.$$

Remplaçant a et Z''' par leurs expressions en fonction de δ; mettant $1 + \frac{\delta}{9M}$ à la place de $\frac{1}{1 - \frac{\delta}{9M}}$, on trouve enfin :

$$(Z'' - Z')^2 = \frac{8\delta}{9M}\left(1 + \frac{\delta}{9M}\right).$$

Ces formules approchées sont bien faciles à calculer au moyen des logarithmes d'addition et de soustraction, ainsi que log Z' et log Z'' connaissant log $(Z'' + Z')$ et log $(Z'' - Z')$; d'autant plus que δ est toujours une quantité très petite. Les résultats seront exacts à 5 décimales pour des valeurs de log $a > \bar{1},585$ au-delà de laquelle la table II cesse d'être applicable.

Exemple. — Racines correspondantes à

$$\log a = \bar{1},585$$

$$\log \sqrt{\frac{4}{27}} \qquad \bar{1},5853481136$$

$$\delta \qquad 0,0003481136 \qquad \log \delta \qquad \bar{4},54172$$

Calcul de Z'''.

$$\delta \qquad \bar{4},54172$$

$$\frac{1}{9M} \qquad \bar{1},40797$$

$$\bar{5},94969$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad 0,06247$$

$$\text{T : soustraction} \qquad -\ 3$$

$$\log Z''' \qquad 0,06244$$

Calcul de $Z'' - Z'$.

$$\delta \qquad \bar{4},54172$$

$$\frac{8}{9M} \qquad 0,31106$$

$$\text{même argument, T : d'addition} \qquad +\ 3$$

$$\bar{4},85281$$

$$\log (Z'' - Z') \qquad \bar{2},42641$$

Calcul de Z′ et de Z″.

$Z'' - Z'$	$\bar{2},42641$	$0,5$	$\bar{1},69897$		
$Z'' + Z'$	$0,06244$	$Z'' + Z'$	$0,06244$		
diff.	$\bar{2},36397$		$\bar{1},76141$		$\bar{1},76141$
		T : soust.	-1016	T : add.	$+993$
		$\log Z'$	$\bar{1},75125$	$\log Z''$	$\bar{1},77134$

Les logarithmes exacts à 7 décimales sont :

$\log Z''' = 0,0624308$, $\log Z' = \bar{1},7512442$, $\log Z'' = \bar{1},7713251$.

Les erreurs provenant des formules n'affecteraient que légèrement la 6e décimale, si le calcul avait été fait avec 7 décimales.

Pour déterminer la quantité δ avec précision, sans avoir recours aux logarithmes à 7 ou à 10 décimales, il suffira quelquefois de faire entrer dans le calcul les coefficients p et q de l'équation :

$$x^2 - px + 9 = 0.$$

Posons : $$i = 2p\sqrt{p} - 3\sqrt{3}q.$$

L'on aura : $$\delta = \log\frac{2}{3\sqrt{3}} - \log a = \log\frac{2}{3\sqrt{3}} - \log\frac{q}{p\sqrt{p}}$$

$$\delta = \log\frac{2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}q} = \log\left(1 + \frac{i}{3\sqrt{3}q}\right) = \frac{Mi}{3\sqrt{3}q} - \dots$$

Pour mettre en nombre la quantité i, on la transformera de la manière suivante :

$$i = \frac{4p^3 - 27q^2}{2p\sqrt{p} + 3\sqrt{3}q}.$$

Exemple. $X^3 + 11X^2 - 102X + 181 = 0.$ (Algèbre de Briot.)

$$p = \frac{427}{3}, \quad q = \frac{17647}{27}.$$

On trouvera : $$\frac{i}{3\sqrt{3}q} = \frac{27}{12710894};$$ le numérateur est exact ; l'erreur du dénominateur ne porte que sur les unités.

On arrive ainsi, avec toute la précision désirable, à

$$\delta = 0,00000\ 09225\ 12.$$

Le procédé par lequel je cherche les deux dernières décimales du log de la racine au moyen de l'indéterminée α, peut évidemment s'appliquer à d'autres équations, algébriques ou transcendantes; ainsi à la résolution de l'équation complète du 3e degré.

Soit l'équation $X^3 + 11X^2 - 102X + 181 = 0$.

Je suppose connus les deux premiers chiffres de la racine $X = -17$. Je pose $X = -x$, et je mets l'équation en x sous la forme :

$$102\left(x + \frac{181}{102}\right) = x^2(x - 11).$$

Je calcule $\frac{181}{102} = 1{,}77451$, et je pose $x = 17{,}0 + \alpha$, α exprimant des dixièmes. Je vais égaler les logarithmes des 2 membres en me bornant à 4 décimales, pour commencer, afin que les différences tabulaires restent sensiblement constantes.

L'on a : $\log x = 1{,}2304 + \alpha.26$; puis le calcul dont voici le tableau :

102 . .	$2{,}0086$	x^2 . .	$2{,}4608 + \alpha.52$
$18{,}77 + \alpha$	$1{,}2735 + \alpha.24$	$6{,}0 + \alpha$	$0{,}7782 + \alpha.71$
	$3{,}2821 + \alpha.24$	$=$	$3{,}2390 + \alpha.123$

d'où :
$$\alpha = \frac{431}{99} = 4{,}353 = 4{,}4$$
$$x = 17{,}0 + 0{,}44 = 17{,}44..$$

Je refais ce même calcul avec cinq décimales en partant de $x = 17{,}44 + \alpha$, ce qui me conduit à $x = 17{,}4425$. — Puis avec les logarithmes à sept décimales, $x = 17{,}442648$.

Enfin, voici un exemple d'une équation transcendante résolue par cette méthode.

Connaissant les longueurs d'un arc de cercle et de sa corde, trouver le rayon.

Appelons : $2a$ l'arc, $2c$ la corde, l'équation du problème est:

$$\frac{c}{R} = \sin\frac{a}{R} \text{ ou bien en posant } x = \frac{a}{R}\,;\ K = \frac{c}{a}$$
$$K\,x = \sin x.$$

Une première solution approchée se trouvera par tâtonnement, ou bien par une construction graphique, en cherchant l'intersection de la courbe $y = \sin x$ avec la droite $y = kx$ (il peut y avoir plusieurs points d'intersections) ; ou bien encore, lorsque k est peu différent de 1, en développant $\sin x$.

La méthode ne comporte pas nécessairement l'emploi des logarithmes ; cela dépend de l'équation, des fonctions qui y entrent ; enfin des tables dont on dispose.

Ici, je prends le log des deux membres, je suppose que x soit un nombre de degrés, et j'aurai l'équation :

$$\log K + \log (1^\circ) + \log x = \log \sin x.$$

Pour $2a = 1^m$ et $2c = 0^m,46$, on trouve par une construction comme première valeur approchée, $x = 114$ degrés.

Je pose donc $x = 114^\circ + \alpha$, α exprimant des degrés, j'effectue le calcul avec 4 décimales.

$$\begin{array}{ll}
K & \bar{1},6628 \\
(1^\circ) & \bar{2},2419 \\
144 + \alpha & \underline{2,0569 + 38\alpha} \\
 & \bar{1},9616 + 38\alpha = \bar{1},9607 - 34\alpha
\end{array}$$

réduisant : $-9 = 72\,\alpha$; $\alpha = -0^\circ,125 = -7'$.

Ainsi : $x = 114^\circ - 7' = 113^\circ\,53'$.

Comme vérification, ou pour atteindre une plus grande approximation, on refera ces calculs avec 5 décimales, en partant de $x = 113^\circ\,53' + \alpha = 6833' + \alpha$, α exprimant des minutes, et l'on trouvera $\alpha = 0',2$.

Si l'on s'arrête là, la longueur du rayon sera :

$$R = \frac{a}{x} = \frac{1}{2 \times 6833,2 \times (1')} = 0^m,25155.$$

NOTE.

Dans un ouvrage intitulé : *Zusætze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tafeln*, etc., Berlin 1770, Lambert avait déjà ramené la résolution de l'équation du 3me degré à celle de $Z^3 \pm Z + a = 0$. — La table XXIX de ce recueil sert comme notre table II, à trouver les racines que nous désignons par Z' et Z''. — L'argument de la table de Lambert est Z, qu'il fait varier par intervalle d'un millième de 0 à 1 et même jusqu'à 1,155 ; la fonction tabulaire correspondante est a donné avec 7 décimales. Ensorte que c'est par une *entrée inverse* que l'on trouvera les racines pour une valeur donnée de a.

J'ignore si cette table a jamais été reproduite. Mais il me semble que, pour le cas des 3 racines réelles, les formules et les tables trigonométriques fournissent une solution plus simple que celle proposée par Lambert.

Table I. $Z^3 + Z = a.$

log a	log Z	diff.	log a	log Z	diff.	log a	log Z	diff.
$\bar{2}$,0	$\bar{2}$,000	100	0,0	$\bar{1}$,834	59	2,0	0,660	34
$\bar{2}$,1	,100	100	0,1	,893	55	2,1	,694	34
$\bar{2}$,2	,200	100	0,2	$\bar{1}$,948	52	2,2	,728	34
$\bar{2}$,3	,300	100	0,3	0,000	48	2,3	,762	34
$\bar{2}$,4	,400	100	0,4	,048	46	2,4	,796	34
$\bar{2}$,5	,500	99	0,5	,094	45	2,5	,830	34
$\bar{2}$,6	,599	100	0,6	,139	42	2,6	,864	34
$\bar{2}$,7	,699	99	0,7	,181	41	2,7	,898	34
$\bar{2}$,8	,798	99	0,8	,222	40	2,8	,932	32
$\bar{2}$,9	,897	99	0,9	,262	39	2,9	,964	34
$\bar{1}$,0	$\bar{2}$,996	97	1,0	,301	38	3,0	0,998	33
$\bar{1}$,1	$\bar{1}$,093	97	1,1	,339	37	3,1	1,031	35
$\bar{1}$,2	,190	94	1,2	,376	37	3,2	,066	33
$\bar{1}$,3	,284	92	1,3	,413	37	3,3	,099	34
$\bar{1}$,4	,376	89	1,4	,450	35	3,4	,133	33
$\bar{1}$,5	,465	84	1,5	,485	36	3,5	,166	33
$\bar{1}$,6	,549	79	1,6	,521	35	3,6	,199	34
$\bar{1}$,7	,628	74	1,7	,556	35	3,7	,233	33
$\bar{1}$,8	,702	69	1,8	,591	34	3,8	,266	34
$\bar{1}$,9	,771	63	1,9	,625	35	3,9	,300	33
0,0	$\bar{1}$,834		2,0	0,660		4,0	1,333	

Table II. Racines conjuguées de $Z - Z^3 = a$.

log a	log Z'	diff.	log Z''	diff.
$\bar{4}$,0	$\bar{4}$,000		0,000	
$\bar{3}$,0	$\bar{3}$,000		0,000	
$\bar{2}$,0	$\bar{2}$,000		$\bar{1}$,998	
$\bar{2}$,0	$\bar{2}$,000		$\bar{1}$,998	
		100		1
$\bar{2}$,1	,100		,997	
		100		0
$\bar{2}$,2	,200		,997	
		100		1
$\bar{2}$,3	,300		,996	
		100		2
$\bar{2}$,4	,400		,994	
		100		1
$\bar{2}$,5	,500		,993	
		101		2
$\bar{2}$,6	,601		,991	
		100		3
$\bar{2}$,7	,701		,988	
		101		3
$\bar{2}$,8	,802		,985	
		101		4
$\bar{2}$,9	,903		,981	
		101		5
$\bar{1}$,0	$\bar{1}$,004		,976	
		103		8
$\bar{1}$,1	,107		,968	
		105		10
$\bar{1}$,2	,212		,958	
		107		14
$\bar{1}$,3	$\bar{1}$,319		$\bar{1}$,944	
$\bar{1}$,30	$\bar{1}$,319		$\bar{1}$,944	
		11		2
$\bar{1}$,31	$\bar{1}$,330		$\bar{1}$,942	

log a	log Z'	diff.	log Z''	diff.
$\bar{1}$,31	$\bar{1}$,330		$\bar{1}$,942	
		11		1
$\bar{1}$,32	,341		,941	
		11		2
$\bar{1}$,33	,352		,939	
		11		2
$\bar{1}$,34	,363		,937	
		11		2
$\bar{1}$,35	,374		,935	
		12		2
$\bar{1}$,36	,386		,933	
		11		2
$\bar{1}$,37	,397		,931	
		12		3
$\bar{1}$,38	,409		,928	
		12		3
$\bar{1}$,39	,421		,925	
		12		3
$\bar{1}$,40	,433		,922	
		12		2
$\bar{1}$,41	,445		,920	
		12		3
$\bar{1}$,42	,457		,917	
		13		4
$\bar{1}$,43	,470		,913	
		12		3
$\bar{1}$,44	,482		,910	
		13		3
$\bar{1}$,45	,495		,907	
		12		4
$\bar{1}$,46	,507		,903	
		14		4
$\bar{1}$,47	,521		,899	
		13		5
$\bar{1}$,48	,534		,894	
		14		4
$\bar{1}$,49	,548		,890	
		14		6
$\bar{1}$,50	,562		,884	
		15		5
$\bar{1}$,51	$\bar{1}$,577		$\bar{1}$,879	

Table II. *(Suite.)*

log a	log Z′	diff.	log Z″	diff.
$\bar{1}$,51	$\bar{1}$,577		$\bar{1}$,879	
		15		7
$\bar{1}$,52	,592		,872	
		16		7
$\bar{1}$,53	,608		,865	
		17		8
$\bar{1}$,54	,625		,857	
		18		9
$\bar{1}$,55	,643		,848	
		21		12
$\bar{1}$,56	,664		,836	
		24		14
$\bar{1}$,57	$\bar{1}$,688		$\bar{1}$,822	
$\bar{1}$,570	$\bar{1}$,688		$\bar{1}$,822	
		2		2
$\bar{1}$,571	,690		,820	
		3		2
$\bar{1}$,572	,693		,818	
		3		2
$\bar{1}$,573	,696		,816	
		3		2
$\bar{1}$,574	$\bar{1}$,699		$\bar{1}$,814	

log a	log Z′	diff.	log Z″	diff.
$\bar{1}$,574	$\bar{1}$,699		$\bar{1}$,814	
		3		2
$\bar{1}$,575	,702		,812	
		3		3
$\bar{1}$,576	,705		,809	
		3		2
$\bar{1}$,577	,708		,807	
		4		3
$\bar{1}$,578	,712		,804	
		4		3
$\bar{1}$,579	,716		,801	
		4		3
$\bar{1}$,580	,720		,798	
		4		3
$\bar{1}$,581	,724		,795	
		5		4
$\bar{1}$,582	,729		,791	
		5		4
$\bar{1}$,583	,734		,787	
		7		6
$\bar{1}$,584	,741		,781	
		10		10
$\bar{1}$,585	$\bar{1}$,751		$\bar{1}$,771	

$$\log \frac{2}{3\sqrt{3}} = \bar{1},5853481136 \qquad \log \frac{2}{\sqrt{3}} = 0,06247$$

$$\log \frac{1}{9M} = \bar{1},40797 \qquad \log \frac{8}{9M} = 0,31106.$$

Racines Z′ et Z″ très peu différentes.

$$\delta = \log \frac{2}{3\sqrt{3}} - \log a.$$

$$Z'' + Z' = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\delta}{9M}\right) \qquad (Z'' - Z')^2 = \frac{8\delta}{9M}\left(1 + \frac{\delta}{9M}\right)$$

Table III. Racine isolée de $Z^3 - Z = a$.

log a	log Z'''	diff.	log a	log Z'''	diff.	log a	log Z'''	diff.
$\bar{4}$,0	0,000		$\bar{1}$,6	0,064	12	1,6	0,546	31
$\bar{3}$,0	,000		$\bar{1}$,7	,076	14	1,7	,577	32
$\bar{2}$,0	0,002		$\bar{1}$,8	,090	15	1,8	,609	32
			$\bar{1}$,9	,105	17	1,9	,641	32
$\bar{2}$,0	0,002	1	0,0	,122	19	2,0	,673	33
$\bar{2}$,1	,003	0	0,1	,141	20	2,1	,706	32
$\bar{2}$,2	,003	1	0,2	,161	21	2,2	,738	33
$\bar{2}$,3	,004	1	0,3	,182	23	2,3	,771	33
$\bar{2}$,4	,005	2	0,4	,205	24	2,4	,804	32
$\bar{2}$,5	,007	1	0,5	,229	25	2,5	,836	33
$\bar{2}$,6	,008	2	0,6	,254	26	2,6	,869	33
$\bar{2}$,7	,010	3	0,7	,280	27	2,7	,902	33
$\bar{2}$,8	,013	3	0,8	,307	28	2,8	,935	33
$\bar{2}$,9	,016	4	0,9	,335	28	2,9	0,968	33
$\bar{1}$,0	,020	4	1,0	,363	30	3,0	1,001	
$\bar{1}$,1	,024	6	1,1	,393	30			
$\bar{1}$,2	,030	7	1,2	,423	30	3,0	1,001	
$\bar{1}$,3	,037	7	1,3	,453	30	4,0	,334	
$\bar{1}$.4	,044	9	1,4	,483	31	5,0	,667	
$\bar{1}$,5	,053	11	1,5	,514	32	6,0	2,000	
$\bar{1}$,6	0,064		1,6	0,546				