Zeitschrift: Bulletins des séances de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 7 (1860-1863)

Heft: 48

Artikel: Formules nouvelles pour calculer l'épaisseur de la culée dans les voûtes plein-cintre, anse de panier et ars de cercle

Autor: Marguet, P.-J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-253493

FORMULES NOUVELLES

pour calculer l'épaisseur de la culée dans les voûtes plein-cintre, anse de panier et arc de cercle.

Par Mr P.-J. MARGUET,

professeur à l'Ecole spéciale,
ingénieur en chef des ponts et chaussées de France, en retraite.

Les géomètres et les ingénieurs ont étudié le problème relatif à la stabilité des voûtes en faisant entrer dans les calculs toutes les données de la théorie et celles qui résultent d'une pratique éclairée. De là découlent des formules compliquées, des tableaux nombreux dont les applications à un cas déterminé exigent encore un travail long et fastidieux et point du tout satisfaisant pour le constructeur qui veut par lui-même s'assurer du degré de stabilité de l'œuvre qu'il doit créer.

Aussi d'autres ingénieurs, non moins savants que leurs devanciers, ont proposé des formules empiriques plus simples dans l'emploi que les formules théoriques, et pour inspirer la confiance aux praticiens ils ont montré par des tableaux que les dimensions principales de certains ponts exécutés s'accordaient parfaitement avec les dimensions tirées de ces mêmes formules. Mais ces rapprochements, ces points de contact plus ou moins nombreux, ont peu de valeur pour convaincre les esprits positifs, et la méthode d'examen proposée par l'ingénieur Méry est bien plus satisfaisante pour ces mêmes esprits que toutes les formules empiriques dont on vient de parler.

Une méthode de résolution du problème dont il s'agit qui n'aurait pas toute la rigueur des savantes théories, ni la routine des formules empiriques, pourrait faciliter, très certainement, la rédaction des projets des ponts en maçonnerie, et c'est pour ce motif que nous soumettons notre théorie à toutes les personnes compétentes en cette matière.

La théorie n'indique point l'épaisseur qu'il convient de donner à la clé des voûtes, plein-cintre, anse de panier ou arc de cercle. Il faut donc adopter une formule empirique sanctionnée par les ouvrages les mieux établis. Sous ce rapport on peut admettre la formule de l'ingénieur Léveillé qui n'est d'ailleurs qu'une traduction simplifiée de celle des ingénieurs nos maîtres.

Cette formule est $\frac{1}{3}(1+0{,}2\,R)$........(1) dans laquelle R est le rayon de l'intrados du berceau. Cette épaisseur des voûtes à la clé, que l'on peut regarder comme très convenable pour le corps des voûtes, peut être modifiée pour les têtes suivant la décoration que nécessite le pont à cause de son emplacement, ou le goût de celui qui est chargé du projet.

Dans les voûtes plein-cintre, que nous considérons d'abord, les constructeurs les plus habiles reconnaissent que la rupture du berceau a lieu généralement suivant un rayon qui fait avec l'horizontale un angle de 30 degrés; c'est donc en cet endroit que la voûte doit avoir sa plus grande épaisseur et d'après les théoriciens et les praticiens, une épaisseur double de la clé est suffisante.*

Nous admettons encore cette donnée, et par suite l'extrados de la voûte sera tracé selon un arc de cercle passant par le point supérieure de la clé et le point extrême du rayon incliné à 30° prolongé au-delà de l'intrados de deux épaisseurs à la clé.

Ainsi dans la figure ci-contre on aura $ok = R$, $ab = E = \frac{1}{3}(1+0{,}2\,R)$, $cd = 2\,ab = 2\,E$.

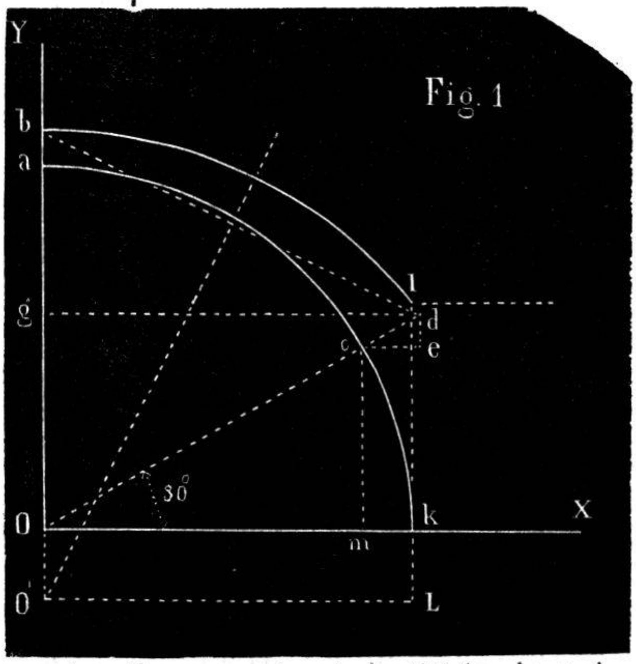


Fig. 1

Pour déterminer le rayon R' de l'extrados on se servira de la formule connue $R' = \frac{a^2+f^2}{2f}$, dans laquelle on mettra pour a la longueur gd et pour f, gb. La ligne gd du triangle rectangle gdo est égale à l'hypoténuse od multipliée par le cosinus de l'angle compris entre les lignes qui est de 30°, c'est-à-dire $(R+2E)\cos 30° = (R+2E)\,0.866$, en mettant pour cos 30°, son expression trigonométrique naturelle, et gb est visiblement égale à $\frac{R}{2}$ d'où il suit;

$$R' = \frac{\overline{(R+2E)\,0.866}^{\,2} + \frac{R^2}{4}}{R} \quad \ldots\ldots (2)$$

Nous admettons maintenant que la construction sera stable, si le voussoir agissant est toute la figure *ablka*, et que le massif de la maçonnerie au-dessus de la naissance de la voûte ayant une hauteur *lk* et une longueur *x* lui fasse équilibre. En d'autres termes, le

* *Routine des voûtes*, par Desjardins.

moment du voussoir *ablka* par rapport à l'horizontale passant en k doit être égal au moment de la culée pris par rapport au même axe. Ainsi pour l'équilibre mathémathique on doit avoir *moment de la voûte égal moment de la culée.*

$$MV = MC.$$

En prenant une tranche droite de la voûte d'une épaisseur égale à l'unité (un mètre) on n'aura à considérer que la surface de la voûte *ablka*, celle de la culée, comme elle a été désignée, et les centres de gravité de ces surfaces.

La formule ci-dessus deviendra, en représentant la surface de la voûte par S, la distance de son centre de gravité à l'axe par G, la distance du centre de gravité de la section de la culée par $\frac{x}{2}$, rapportée au même axe, et l'ordonnée kl du cercle d'extrados comptée seulement de la naissance de la voûte par H,

$$S \times G = H \times \frac{x^2}{2}$$

D'où l'on tire pour l'épaisseur de la culée à la naissance,

$$x = \sqrt{\frac{2\,SG}{H}} \cdots\cdots (3).$$

Les dimensions en épaisseur données aux voûtes plein-cintre, comme au tracé exécuté sur la fig. 1, suffisent dans tous les cas, ainsi que l'on pourra le vérifier en comparant les résultats donnés par cette méthode avec ceux que donnent les formules théoriques les plus exactes. Ces résultats s'accorderont aussi avec les dimensions données aux culées des mêmes voûtes par les praticiens les plus consciencieux. On n'aura pas besoin de s'occuper des surcharges, ni de la hauteur des culées comprises entre le sol et la naissance de la voûte, car cette augmentation de maçonnerie donnera toujours un surcroit de stabilité. L'attention du constructeur devra donc porter essentiellement sur la nature des matériaux et sur la parfaite exécution du travail.

Nous avons opéré de deux manières très différentes pour obtenir les valeurs de x ou l'épaisseur des culées des voûtes en plein-cintre, à la naissance, d'après l'équation (3).

Nous avons employé le calcul pour déterminer la surface S de la voûte; à cet effet nous avons cherché la surface totale $O'Llb$ de laquelle nous avons retranché le quart de cercle *oka* augmenté du rectangle $OO'Lk$. La surface totale $O'Llb$ a été obtenue en divisant cette surface en trapèzes de même hauteur, et les côtés parallèles de ces trapèzes ont été déduits de l'équation du cercle

$$X^2 + Y^2 = R'^2.$$

Les surfaces à retrancher de la surface totale ont été données simplement par l'expression $\frac{\pi R^2}{4} = 0{,}7854\,R^2$ pour le quart de cercle, et celle du rectangle par $\big(R' - (R + E)\big)\,R$.

Les calculs sont très longs pour avoir la surface totale O′L lb avec une approximation suffisante, et non moins fastidieux pour trouver la distance du centre de gravité de la surface S à l'horizontale en k. Pour nous affranchir de ces opérations arithmétiques, nous avons cherché cette surface *S* directement en employant la méthode ancienne *des pesées,* et la distance de son centre de gravité à l'axe par le procédé mécanique qui consiste, *à suspendre la surface en deux points différents, à tracer sur cette surface les deux verticales qui passent par les points de suspension, lesquelles se coupent au point cherché.*

Cette méthode est excellente, très pratique, et les résultats que l'on obtient lorsqu'on se donne la peine de découper dans un carton mince et d'une épaisseur régulière, la surface *S,* sont des plus satisfaisants.

Exemple :

Nous avons pris une feuille de carton mince et blanc, du commerce, composé de deux feuilles de papier collées et cylindrées. Cette feuille pesait 84,65 grammes et ses dimensions étaient en longueur 62,555 centimètres, et en hauteur $47^{c},275$. La surface était donc de $2957^{c^2},287625$ et le poids par centimètre carré de $0,^{gr.}028624$.

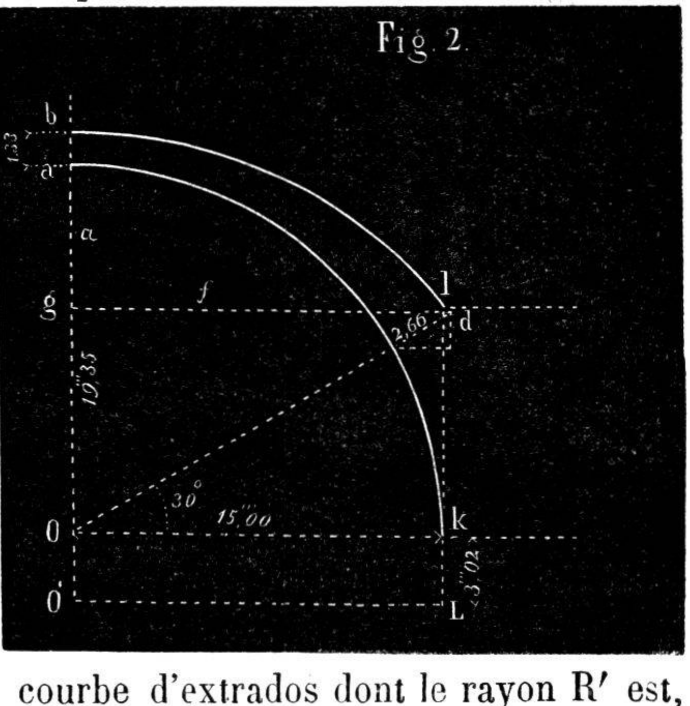


Fig. 2.

La voûte a été tracée sur ce carton à l'échelle d'un centimètre pour mètre et découpée ensuite selon le contour $ablka$.

Ce morceau de carton mis dans la balance pesait $1^{gr.},0225$, divisant ce nombre par $0^{gr.},028624$ qui à l'échelle dont il s'agit représente le poids d'un mètre carré, on a $35^{m^2},711$ pour la surface de la section de la voûte.

Nous avons calculé la surface totale O′bLlO′ au moyen de l'équation de la courbe d'extrados dont le rayon R′ est, d'après la formule (2) indiquée précédemment, égal à $19^{m}.3533$. Le rayon du cercle d'intrados étant 15 mètres, l'épaisseur à la clé $1^{m},333$, les quantités a et f étant égales à $15^{m}.2987$ et $7^{m}.50$.

Nous avons obtenu les ordonnées suivantes en les prenant de 50 en 50 centimètres.

Abscisses	Ordonnées	Sommes des ordonnées prises 2 à 2	Ordonnées moyennes
0,00	19,353	38,699	19,349
0,50	19,346	38,673	19,336
1,00	19,327	38,622	19,311
1,50	19,295	38,544	19,272
2,00	19,249	38,440	19,220
2,50	19,191	38,310	19,155
3,00	19,119	38,153	19,076
3,50	19,034	37,969	18,984
4,00	18,935	37,757	18,878
4,50	18,822	37,518	18,759
5,00	18,696	37,251	18,625
5,50	18,555	36,954	18,477
6,00	18,399	36,628	18,314
6,50	18,229	36,272	18,136
7,00	18,043	35,883	17,941
7,50	17,840	35,462	17,731
8,00	17,622	35,008	17,504
8,50	17,386	34,519	17,259
9,00	17,133	33,994	16,997
9,50	16,861	33,430	16,715
10,00	16,569	32,826	16,413
10,50	16,257	32,180	16,090
11,00	15,923	31,488	15,744
11,50	15,565	30,748	15,374
12,00	15,183	29,957	14,978
12,50	14,774	29,111	14,555
13,00	14,337	28,204	14,102
13,50	13,867	27,229	13,614
14,00	13,362	26,179	13,089
14,50	12,817	25,046	12,523
15,00	12,229		

Somme des ordonnées moyennes 515,521
Hauteur commune des trapèzes 0,50
Surface totale de la figure $O'bLlO'$ . . . . . . 257^{m^2},760

En retranchant de cette surface, 1° celle du quart de cercle *oka* qui est $\frac{\Pi R^2}{4}$ ou 0.7854R². on a en mettant pour R 15ᵐ. ci 176^{m2},715

2° Celle du rectangle OO′L*k* représentée par 15 × 3,02 ci 45, 300

En totalité ci	222, 015
Ainsi la surface totale OO′L*k* égale	257,760
à retrancher	222,015
Il reste pour la surface de la voûte.	35^{m2},745

Résultat qui ne diffère de celui que l'on a obtenu par la pesée que de . . . . 0^{m2},034

En général les pesées des surfaces donnent des résultats un peu plus élevés que le calcul, c'est pourquoi on peut les admettre comme suffisamment exactes dans la pratique.

Sur ce même exemple nous avons voulu nous rendre compte de la différence qui pouvait exister entre la distance du centre de gravité de la section de la voûte à l'axe *k* prise par suspension et déterminée par le calcul : voici les résultats de ces deux opérations.

La suspension nous a donné en quelques secondes le nombre 5ᵐ,40. Par le calcul nous avons dû former le tableau suivant, et nous l'avons encore abrégé en prenant de suite : 1° pour les ordonnées du cercle *oka* les ordonnées moyennes des trapèzes correspondants aux ordonnées moyennes des trapèzes de l'arc d'extrados.

2° En supposant le centre de gravité des trapèzes placé au milieu de leur hauteur, ce qui a dû nous donner une distance un peu plus forte pour la distance cherchée.

Aux ordonnées moyennes du cercle d'intrados, représentant la demi-somme des côtés parallèles des trapèzes précédemment calculés pour la surface totale O′*b*L*l*O′, nous avons ajouté la hauteur 3ᵐ,02 du rectangle inférieur O′L*ko* afin de n'avoir qu'une soustraction à effectuer pour obtenir la différence entre les grands trapèzes du cercle d'extrados et les trapèzes correspondants, jusqu'à la ligne O′L, ou les moyennes des côtés parallèles des trapèzes composant la surface *aklb* de la section de la voûte.

En multipliant ces différences moyennes par leurs distances à l'axe *kl*, prenant la moitié de la somme de ces produits et la divisant par la surface totale de la voûte, nous avons eu pour résultat 5ᵐ,44 ou 4 centimètres de plus que le nombre trouvé mécaniquement et graphiquement.

TABLEAU RÉSUMANT LES CALCULS.

Abscisses	ORDONNÉES correspondantes	ORDONNÉES plus 3,02	ORDONNÉES moyennes de la courbe d'extrados	Différences	Distances des centres de gravité à l'axe	Moments partiels des trapèzes à diviser pr 2
0,25	14,999	18,019	19,349	1,330	14,75	19,617
0,75	14,981	18,001	19,336	1,335	14,25	19,023
1,25	14,947	17,967	19,311	1,344	13,75	18,480
1,75	14,897	17,917	19,272	1,355	13,25	17,953
2,25	14,830	17,850	19,220	1,370	12,75	17,467
2,75	14,745	17,765	19,155	1,390	12,25	17,027
3,25	14,643	17,663	19,076	1,413	11,75	16,602
3,75	14,523	17,543	18,984	1,441	11,25	16,211
4,25	14,385	17,405	18,878	1,473	10,75	15,834
4,75	14,228	17,248	18,759	1,511	10,25	15,487
5,25	14,051	17,071	18,625	1,554	9,75	15,151
5,75	13,854	16,874	18,477	1,603	9,25	14,827
6,25	13.635	16,655	18,314	1,659	8,75	14,516
6,75	13,395	16,415	18,136	1,721	8,25	14,198
7,25	13,131	16,151	17,941	1,790	7,75	13,872
7,75	12,842	15,862	17,731	1,869	7,25	13,550
8,25	12,527	15,547	17,504	1,957	6,75	13,209
8,75	12,183	15,203	17,259	2,056	6,25	12,850
9,25	11,808	14,828	16,997	2,169	5,75	12,471
9,75	11,399	14,419	16,715	2,296	5,25	12,054
10,25	10,951	13,971	16,413	2,442	4,75	11,599
10,75	10,461	13,481	16,090	2,609	4,25	11,088
11,25	9,921	12,941	15,744	2,803	3,75	10,511
11,75	9,324	12,344	15,374	3,030	3,25	9,847
12,25	8,656	11,676	14,978	3,302	2,75	9,080
12,75	7,901	10,921	14,555	3,634	2,25	8,176
13,25	7,031	10,051	14,102	4,151	1,75	7,264
13,75	5,994	9,014	13,614	4,600	1,25	5,750
14,25	4,683	7,703	13,089	5,386	0,75	4,039
14,75	2,727	5,747	12,523	6,776	0,25	1,694

Total 389,447

Dont la moitié est . . . 194,723

Cette moitié divisée par 35,745 donne pour quotient . . 5,44

Nous avons calculé les épaisseurs des culées des voûtes, plein-cintre, de un mètre d'ouverture jusqu'à huit mètres, et de huit mètres jusqu'à quarante, comme on le voit dans le tableau ci-dessous :

Ouverture de l'arche	Epaisseur de la culée	Différence	Ouverture de l'arche	Epaisseur de la culée	Différence
1,00	0,320		12,00	2,797	0,201
1,50	0,491	0,171	13,00	2,994	0,197
2,00	0,622	0,131	14,00	3,230	0,236
3,00	0,760	0,138	15,00	3,432	0,202
4,00	1,199	0,439	16,00	3,556	0,124
5,00	1,300	0,101	17,00	3,852	0,296
6,00	1,539	0,239	18,00	4,011	0,159
7,00	1,738	0,199	19,00	4,252	0,241
8,00	1,983	0,245	20,00	4,464	0,212
9,00	2,168	0,185	30,00	6,474	2,010
10,00	2,381	0,213	40,00	8,550	2,076
11,00	2,596	0,215			

Les résultats que nous avons obtenus par le calcul et les moyens mécaniques expliqués plus haut, nous ont conduit à les tracer graphiquement, en négligeant les petites irrégularités qui doivent nécessairement se montrer dans les deux modes d'opérer.

Ainsi nous avons reconnu : 1° que d'un mètre à huit mètres d'ouverture, les épaisseurs des culées pouvaient être données plutôt fortes que faibles, au moyen de l'équation de la ligne droite

$$y = 0,2257\,x + 0,42$$

en mettant pour x l'ouverture de la voûte diminuée d'une unité.

2° Que de huit mètres à quarante mètres et au-delà, les épaisseurs des culées pouvaient être données au moyen de l'équation de la ligne droite $y = 0,206\,x + 2$

en mettant pour x l'ouverture de la voûte diminuée de huit unités.

Pour nous prémunir contre une adoption trop légère de notre manière d'opérer, nous avons voulu vérifier notre formule pour une voûte de cent mètres d'ouverture.

Dans ce cas il faut mettre pour x, $100 - 8 = 92$, et en effectuant les calculs on trouve $y = 20^{\mathrm{m}},952$ pour l'épaisseur de la culée à la naissance.

Procédant mécaniquement nous avons découpé la demi-voûte dans notre carton mince en prenant l'échelle de 4 millimètres pour mètre. Nos données étaient donc : $R = 50$ mètres, $E = 3.666$, $a = 49.6495$, $f = 25$. $R' = 61,801457$, $R'^2 = 3819^{\mathrm{m}^2},420087$, $H = 36,32 - 8,14 = 28,18$, cette dernière quantité étant la hauteur de la maçonnerie de la culée au-dessus de la naissance.

La demi-voûte pesait $1^{\mathrm{gr}},58125$. Pour obtenir la surface nous avons dû chercher quel était le poids du mètre carré à cette nouvelle échelle. Nous avons posé l'égalité suivante : **100 : 16 = 0^{gr},028624 :** x **d'où l'on tire....** $x = 0^{gr},00457984$. Divisant le poids **trouvé par ce nombre le quotient** est 345,263 qui représente des mètres carrés.

D'après ces opérations on a donc MV $= 345,263 \times 17,95 =$ 6197,47085* et MC $= \frac{x^2}{2} \times 28,18$, d'où l'on tire en égalant ces deux expressions....... $x = 20^m,97$, épaisseur de la culée.

Comparant ce nombre à celui qui est donné ci-dessus la différence est de 0,018, à laquelle il est inutile de s'arrêter, car elle ne serait d'aucune importance pour la stabilité du pont.

Nous avons tracé cette demi-voûte sur une feuille de dessin en prenant l'échelle de 4 millimètres pour mètre et nous avons cherché quelle serait la courbe des pressions d'après la méthode Méry, en nous donnant deux points de cette courbe, l'un sur l'axe de la clé, l'autre sur la naissance.

Ces points sont distants de la courbe d'intrados, savoir : le premier de $2^m,666$, le second de 10 mètres.

Nous avons divisé la voûte en huit parties, dont cinq comprennent l'extrados et les trois autres le reste de la voûte et le mur de culée.

Nous avons pesé la voûte et sa culée et nous avons eu pour poids total $4^{gr},28763$ représentant une surface totale de $936^{m^2},20$ égale à celle de la voûte et de la culée calculée. Nous avons ensuite pris les poids partiels de la première partie ; de la première partie et de la seconde ; des deux premières et de la troisième, et ainsi de suite jusqu'au poids primitif de toutes les parties. A la fin de chaque pesée partielle nous avons déterminé, au moyen de la suspension, le centre de gravité des parties.

Numéro d'ordre	Parties successives	Poids	Surface	Evaluation en millimètres	Distance des centres de gravité	Observations
1	1	0,16000	34,93	6,99	44,32	Les distances des centres de gravité sont à l'échelle du plan.
2	1 et 2	0,36000	78,60	15,72	39,12	
3	1. 2 et 3	0,60300	131,66	26,33	33,55	
4	1... et 4	0,83625	182,59	36,52	28,32	
5	1... et 5	1,12625	245,91	49,18	24,14	
6	1... et 6	2,27230	496,15	99,23	8,62	
7	1... et 7	3,31418	723,64	144,73	2,85	
8	1... et 8	4,28763	936,20	187,24	0,00	

*** Le nombre 17.95 est la distance du centre de gravité de la demi-voûte à l'axe des moments trouvée mécaniquement.**

Avec ces données nous avons tracé la courbe des pressions en prenant pour représenter les surfaces une échelle de 1 millimètre pour 5 mètres, comme on le voit au tableau ci-dessus.

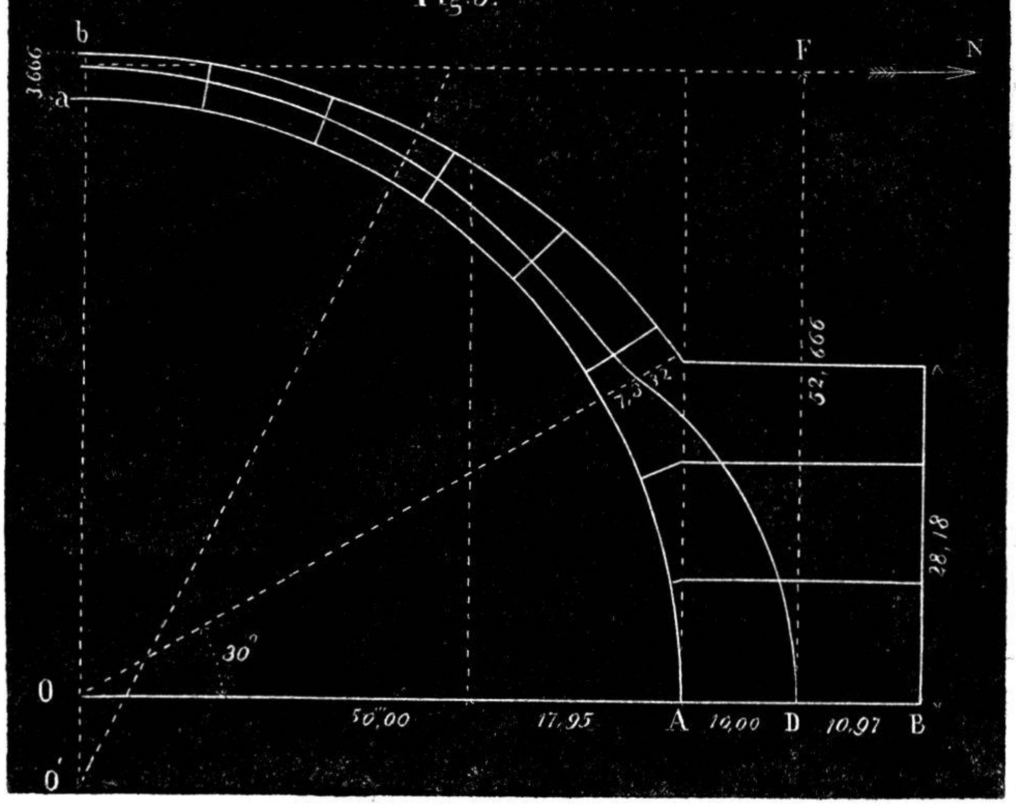
Par le point de la clé nous avons mené une ligne horizontale, et nous avons prolongé les lignes verticales des centres de gravité jusqu'à cette ligne.

Pour trouver la tension horizontale résultant du point choisi sur la naissance nous avons joint ce point à celui de la rencontre de la verticale passant par le centre de gravité de la masse totale (voûte et culée) avec l'horizontale, et ayant porté sur cette verticale, de haut en bas, une longueur égale à $187^{m},24$, nous avons mené par son extrémité une horizontale dont la longueur comprise entre les deux lignes déjà tracées nous a donné la tension horizontale cherchée. Nous avons porté cette tension, d'une longueur de $35^{m},5$, représentant à l'échelle de 1 millimètre pour 5 mètres une surface de $177^{m2},50$, sur l'horizontale à chaque point de rencontre des verticales des centres de gravité avec cette ligne, et sur ces verticales les diverses longueurs afférentes 6.99. 15.72.... etc.

Construisant sur ces lignes ainsi limitées les parallèlogrammes et traçant les diagonales, les rencontres de ces lignes avec les divisions de la voûte, faites selon les rayons, et celles des culées faites horizontalement, nous ont donné les points de la courbe des pressions.

Cette courbe montre que les pressions sur les divisions ou joints de la voûte s'exerceront presque normalement à ces joints et que la stabilité de la construction est assurée.

Fig. 3.



Si par le point D où la courbe des pressions rencontre la ligne des naissances de la voûte, on mène la verticale DF et que l'on prenne les moments du système par rapport à cette ligne on aura en nommant N la tension horizontale pour maintenir le système en équilibre l'équation

$$345,263\times27,95+281,8\times5=N\times52,666+309,137\times5,485.$$

D'où l'on tire

$$N=\frac{345,263\times27,95-286,616}{52,666}=\frac{9363,485}{52,666}=177,79$$

quantite qui diffère très peu de celle qui a été trouvée graphiquement.

Nous pensons pouvoir conclure de tout ce qui précède que la solution du problème de le stabilité des voûtes, plein-cintre, est satisfaisante à notre point de vue, celui de la simplicité des opérations mises à la portée de tous les constructeurs, et que notre formule, réduite à l'équation d'une droite, est plus pratique que toutes celles qui ont été données précédemment.

Nous n'avons considéré que des surfaces parce que nous supposons toute la maçonnerie homogène, celle de la voûte comme celle de la culée, et la longueur du berceau divisée en tranches d'un mètre d'épaisseur.

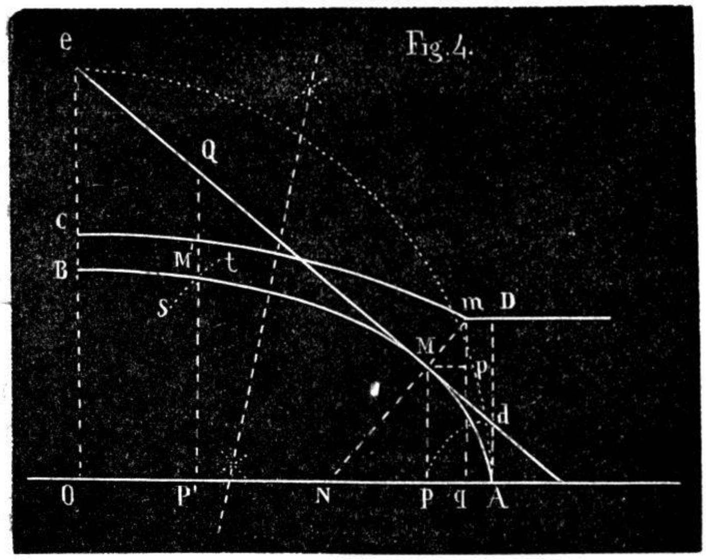
Dans le cas où la culée serait exécutée en maçonnerie mixte, il suffirait d'augmenter sa hauteur au-dessus de la naissance dans le rapport des pesanteurs spécifiques des dites maçonneries.

Voûtes elliptiques ou anse de panier.

Cherchons à appliquer notre méthode aux voûtes dont la section est une ellipse ou une anse de panier. La question ne peut plus être prise dans son ensemble par la raison que ces courbes sont variables à l'infini. Nous allons donc la restreindre au cas d'une section elleptique dont la flèche ou le demi petit axe est le quart du grand axe. Ainsi $2\,a$ et $2b$ étant, l'un le grand axe, l'autre le petit axe, nos ellipses auront toujours pour le rapport des demi-arcs $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$.

Nous avons adopté pour la courbe d'extrados un arc de cercle, et pour l'épaisseur de la voûte à la clé, celle qui résulte de la formule que nous avons admise pour les voûtes en plein-cintre, en remplaçant le rayon d'intrados par le demi grand axe.

Il nous restait à déterminer l'épaisseur de la voûte vers les reins et à fixer le point où cette épaisseur maximum devait être placée. Après avoir exécuté divers tracés, nous nous sommes arrêtés à celui qui nous a paru le plus rationnel. Ce point correspond à l'ordonée, du foyer sur la courbe, et c'est sur la normale passant par ce point que nous portons le double de l'épaisseur à la clé, suffisante pour donner à la voûte une résistance capable de supporter les surcharges les plus ordinaires.



Pour tracer les ellipses nous avons suivi le procédé graphique suivant.

Les deux demi-axes étant OB et OA, du point O centre de l'ellipse, et avec un rayon OA, égal à la demi-ouverture de la voûte, nous décrivons l'arc A*e*; ensuite nous portons ce même rayon de B en P, pour obtenir le foyer de l'ellipse, par ce point nous menons l'ordonnée PM, et par le point A la verticale AD. Du point A comme centre et arc AP pour rayon, nous traçons l'arc P*d* qui coupe AD en *d*, nous joignons le point *d* au point *e*, et la ligne *ed* est une tangente à l'ellipse au point M qui se trouve ainsi déterminé. Nous menons la normale MN et sur son prolongement nous portons M*m* égale à 2 B*c*, B*c* étant l'épaisseur de la voûte à la clé, calculée comme il a été dit pour les voûtes plein-cintre.

Par ces deux points C et *m* nous traçons l'arc de cercle C*m* dont le centre est en O'; cet arc de cercle est la courbe d'extrados, et la hauteur de la culée est AD égale à la hauteur du point *m* au-dessus de la ligne des naissances OA.

Tous les points de l'ellipse s'obtiennent, comme M' par exemple, en menant l'ordonnée P'Q de la tangente *e*M*d*, prenant la longueur P'Q et traçant avec elle, du foyer P l'arc de cercle *st*, le point d'intersection M' est un point de la courbe. La même construction doit être faite pour tous les points de l'ellipse.

Nous avons fait aussi exactement qu'il nous a été possible le tracé ci-contre d'une voûte elliptique dont les demi-axes étaient 19m,50 et 9m,75 dont le rapport est celui que nous avons indiqué ci-dessus, sur une feuille de carton mince, et nous avons découpé la voûte selon le contour BCDA.

Cette découpure, pesée, a été trouvée de 1gr,2875, le mètre carré pèse 0gr,028404 à l'échelle d'un centimètre pour mètre, la surface de la section de la voûte est donc de 45m²,329.

Par la suspension on trouve le centre de gravité à 7m,70 de la ligne AD, et la hauteur AD calculée est de 7m,342.

L'équation d'équilibre MV = MC devient donc

$$45,329 \times 7,70 = \frac{x^2}{2} \times 7,342$$

D'où l'on tire pour l'épaisseur de la culée à la naissance $x = 9^m,75$.

Cette voûte à section elliptique se rapproche beaucoup de l'anse de panier adoptée par l'ingénieur Perronet au pont de Neuilly, l'épaisseur de la culée de ce pont aux naissances est de $9^m,83$.

Pour appliquer le calcul aux voûtes à section elliptique, il faut faire usage de l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes rectangulaires dont l'équation résolue par rapport à y est

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdots\cdots\cdots (1)$$

et des formules suivantes déduites de l'équation ci-dessus pour obtenir dans tous les cas les valeurs des lignes désignées ci-dessous.

Distance du foyer au centre O... $OP = \sqrt{a^2 - x^2} \cdots\cdots (2)$

Ordonnée du foyer ..... $PM = \dfrac{b^2}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

Longueur de la normale... $MN = \dfrac{b^2}{a^2} \sqrt{2ab - b^2} \cdots (4)$

Longueur de la sous-normale $NP = \dfrac{b^2}{a^2} \sqrt{a^2 - b^2} \cdots\cdots (5)$

Epaisseur de la voûte aux reins $Mm = 2E \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$

Coordonnées du point m... Extrémité de l'arc d'extrados

$$\left\{ \begin{aligned} Oq &= d = \frac{\left(2E + \sqrt{2a^2 - b^2}\right) \times \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{2a^2 - b^2}} \ldots (7) \\ mq &= \frac{2Ea^2 + b^2 \sqrt{2a^2 - b^2}}{a\sqrt{2a^2 - b^2}} \ldots\ldots\ldots (8) \end{aligned} \right.$$

On aura le rayon R' de l'arc d'extrados par la formule $R' = \dfrac{d^2 + f^2}{2f}$; d étant l'abscisse Oq et f la différence entre la hauteur $OC = b + E$ diminuée de l'ordonnée mq.

Les calculs sont longs pour obtenir la surface des sections des voûtes et les centres de gravité de ces mêmes sections; c'est pourquoi nous avons tracé des arches de 15, 20, 25,30.... 39 et 50 mètres d'ouverture sur le carton mince. Nous les avons découpées toutes selon le profil BADC et les découpures pesées avec autant de soin qu'il nous a été possible, puis les suspensions rigoureusement effectuées, nous avons obtenu les résultats suivants pour les épaisseurs des culées aux naissances. *

Voûte	de 15	mètres	d'ouverture.	Epaisseur	à la culée	m 4,03
»	20	»	»	»	»	5.35
»	25	»	»	»	»	6.47
»	30	»	»	»	»	7.78
»	39	»	»	»	»	9.75
»	50	»	»	»	»	12.68.

Ces épaisseurs peuvent être déduites approximativement d'une équation du premier degré de la forme

$$y = 0,25\,x + 4,05$$

en mettant pour x l'ouverture de la voûte diminuée de 15.

En effet, on aura pour les épaisseurs calculées des culées ci-dessus, savoir:

Pour la	voûte	de 15	mètres	d'ouverture.	Epaisseur	de la culée	4.05
»	»	20	»	»	»	»	5.30
»	»	25	»	»	»	»	6.55
»	»	30	»	»	»	»	7.80
»	»	39	»	»	»	»	10.05
»	»	50	»	»	»	»	12.80

Pour les ouvertures intermédiaires et au-dessous on aura évidemment des épaisseurs suffisantes, puisque celles qui correspondent aux ouvertures ci-dessus sont généralement égales aux dimensions des meilleurs ouvrages exécutés.

* Les pesées se font très exactement dans une petite balance servant à peser l'or.

Les suspensions s'obtiennent comme il suit. Sur une paroi verticale, le montant d'une bibliothèque, de table, par exemple, nous avons planté une pointe d'aiguille, et au moyen d'un fil à plomb, nous avons tracé sur cette paroi la verticale passant par le milieu de l'aiguille.

C'est à cette petite tige, dont la point fine est en avant, que nous avons suspendu nos découpures en y faisant préalablement deux trous avec un poinçon très effilé, en deux endroits opposés, pour avoir deux verticales se coupant sous un angle le moins aigu que possible. A chaque suspension nous faisions au bas du carton une marque correspondant à la verticale et nous tracions des lignes au crayon. Deux suspensions suffisent pour déterminer le centre de gravité, mais il est bon de faire une troisième suspension afin d'avoir trois lignes qui se coupent en un même point.

Ce résultat ne s'obtient quelquefois qu'après plusieurs opérations successives.

Lorsque la section de la voûte sera une anse de panier, on pourra la tracer et chercher directement par notre méthode l'épaisseur à donner à la culée. Dans ce cas on déterminera l'épaisseur à la clé au moyen de la formule que nous avons adoptée, et pour l'épaisseur aux reins on pourra chercher le foyer de l'ellipse qui serait construite sur les axes de l'anse de panier, c'est-à-dire, la montée et la demi-ouverture. On construira le point de l'ellipse correspondant au foyer ; on mènera la tangente en ce point et ensuite la normale, et on portera sur cette normale, à partir de la courbe en anse de panier, la double épaisseur de la clé.

Nous donnons ci-dessous le tableau des calculs relatifs à la voûte elliptique de 39 mètres d'ouverture et de $9^{m},75$ de montée. Le résultat de ces opérations comparé à celui que nous avons obtenu mécaniquement nous donne une différence en moins de 20 centimètres pour l'épaisseur de la culée.

Mécaniquement nous avons trouvé pour cette épaisseur $9^{m},75$ et par le calcul $9^{m},55$. Il y a évidemment des erreurs de part et d'autre, mais l'opération mécanique faite avec quelque soin et répétée plusieurs fois sans absorber beaucoup de temps ne trompera jamais le constructeur.

D'ailleurs dans le tracé graphique que nous avons donné des épaisseurs des culées pour des voûtes elliptiques de 15 à 50 mètres d'ouverture, nous avons à dessein augmenté la première et la dernière cote pour éviter dans les valeurs intermédiaires des dimensions trop faibles.

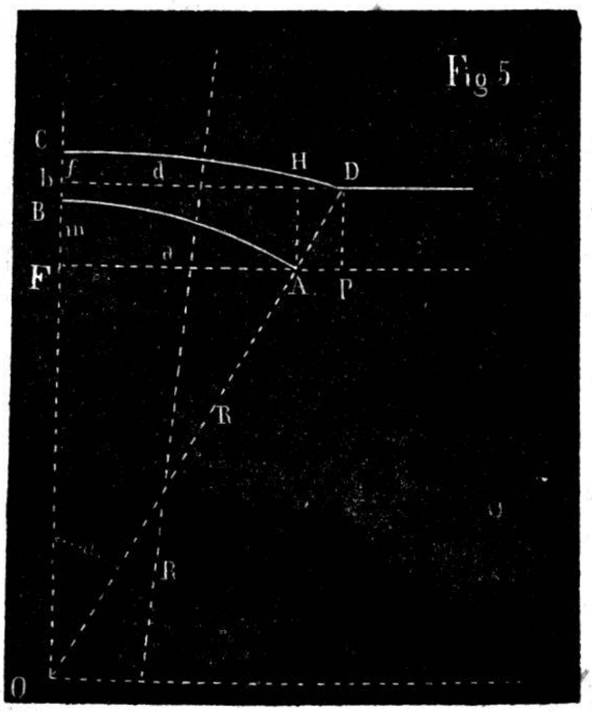
Tableau des opérations relatives à la voûte elliptique de 39 mètres d'ouverture et de $9^m,75$ de montée. L'équation de l'ellipse est $y^2=95.0625-0,25\,x^2$; celle du cercle est $y^2=2191,644225-x^2$.

ABSCISSE	Valeur de x^2	Ordonnée de l'ellipse	Ordonnée de l'ellipse, augmentée de 35,432	Ordonnée correspondante de l'arc de cercle	DIFFÉRENCE	Moyenne des côtés parallèles des trapèzes	SURFACE	Distance du centre de gravité de la surface à l'axe des y	MOMENT PARTIEL
0,00	0,00	9,750	45,182	46,815	1,633				
0,50	0,25	9,746	45,178	46,812	1,634	1,6335	0,8168	0,25	0,2042
1,00	1,00	9,737	45,169	46,804	1,635	1,6345	0,8173	0,75	0,6129
1,50	2,25	9,721	45,153	46,790	1,637	1,6360	0,8180	1,25	1,0225
2,00	4,00	9,698	45,130	46,772	1,642	1,6395	0,8198	1,75	1,4346
2,50	6,25	9,669	45,101	46,748	1.647	1,6445	0,8223	2,25	1,8501
3,00	9,00	9,663	45,095	46,718	1,623	1,6350	0,8175	2,75	2,2481
3,50	12,25	9,591	45,023	46,683	1,660	1,6415	0,8208	3,25	2,6674
4,00	16,00	9,542	44,974	46,643	1,669	1,6645	0,8323	3,75	3,1209
4,50	20,25	9,486	44,918	46,598	1,680	1,6745	0,8373	4,25	3,5583
5,00	25,00	9,476	44,908	46,547	1,639	1,6595	0,8298	4,75	3,9413
5,50	30,25	9,407	44,839	46,490	1,651	1,6450	0,8225	5,25	4,3181
6,00	36,00	9,330	44,762	46,428	1,666	1,6585	0,8293	5,75	4,7682
6,50	42,25	9,246	44,678	46,361	1,683	1,6745	0,8373	6,25	5,2328
7,00	49,00	9,154	44,586	46,288	1.702	1,6925	0,8463	6,75	5,7122
7,50	56,25	9.000	44,432	46,210	1,778	1,7400	0,8700	7,25	6,3075
8,00	64,00	8,891	44,323	46,126	1,803	1,7905	0,8953	7,75	6,9382
8,50	72,25	8,774	44,206	46,036	1,830	1,8415	0,9208	8,25	7,5962
9,00	81,00	8,649	44,081	45,941	1,860	1,8450	0,9225	8,75	8,0719
9,50	90,25	8,514	43,946	45,840	1,894	1,8770	0,9385	9,25	8,6811
10,00	100,00	8.370	43,802	45,734	1,932	1,9130	0,9565	9,75	9,3259
10,50	110,25	8,215	43,647	45,720	2,073	2,0025	1,0013	10,25	10,2628
11,00	121,00	8,050	43,482	45,504	2,022	2,0475	1,0238	10,75	11,0053
11,50	132,25	7,874	43,306	45,380	2,074	2,0480	1,0240	11,25	11,5200
12,00	144,00	7,685	43,117	45,250	2,133	2,1035	1,0518	11,75	12,3581
12,50	156,25	7,483	42,915	45,115	2,200	2,1665	1,0833	12,25	13,2698
13,00	169,00	7,267	42,699	44,973	2,274	2,2370	1,1185	12,75	14,2609
13,50	182,25	7,035	42,467	44,826	2,359	2,3165	1,1583	13,25	15,3468
14,00	196,00	6,786	42,218	44,672	2,454	2,4065	1,2033	13,75	16,5447
14,50	210,25	6,519	41,951	44,512	2,561	2,5075	1,2538	14,25	17,8659
15,00	225,00	6,309	41,741	44,346	2,605	2,5830	1,2915	14,75	19,0496
15,50	240,25	5,915	41,347	44,174	2,827	2,7160	1,3580	15,25	20,7095
16,00	256,00	5,573	41,005	43,995	2,990	2,9085	1,4543	15,75	22,9044
16,50	272,25	5,196	40,628	43,810	3,182	3,0860	1,5430	16,25	25,0738
17,00	289,00	4,776	40,208	43,619	3,411	3,2965	1,6483	16,75	27,6082
17,50	306,25	4.301	39,733	43,421	3,688	3,5495	1,7748	17,25	30,6144
18,00	324,00	3,750	39,182	43,216	4.036	3,8620	1,9310	17,75	34,2753
18,50	342,25	3,082	38,514	43,004	4,490	4,2630	2,1315	18,25	38,8999
19,00	361,00	2,193	37,625	42,786	5,161	4,8255	2,4128	18,75	45,2391
19,025	361,95	2,138	37,570	42,774	5,204	5,1825	0,1296	19,0125	2,4633
19,500	380,25	0,000	35,432	42,774	7,342	6,2975	2,9913	19,25	57,5825
				TOTAUX	. . . .		45,6611		534,4667

De ces nombres on déduit pour la distance du centre de gravité à l'origine de la courbe $7^m,80$ et pour l'épaisseur de la culée $9^m,789$.

Voûtes en arc de cercle.

Ces voûtes présentent de très grandes variétés suivant l'angle au centre déterminé directement ou calculé d'après l'ouverture et la montée. Pour que l'épaisseur à la naissance de la voûte varie selon l'angle au centre, nous avons porté cette épaisseur selon le rayon de l'arc qui passe par la naissance, et cette épaisseur est double de celle à la clé déterminée comme pour les autres voûtes sur l'ouverture ou la corde de l'arc. Ainsi on aura pour tous les arcs, a étant la demi-ouverture ou la moitié de la corde $E = \frac{1}{3}(1 + 0,2a)$.



En nommant m la montée ou la flèche, on aura le rayon de l'arc AB, $R = \frac{m^2 + a^2}{2m}$.

Les deux triangles rectangles semblables FAO et ADp donneront en prenant $BC = E$ et $AD = 2E$.

$Dp = \frac{2E(R-m)}{R}$; $Ap = \frac{a \times 2E}{R}$; d'où l'on tirera $Db = d = a + \frac{a \times 2E}{R}$;

La flèche f correspondante à la demi-corde d sera $f = m + E\frac{2E(R-m)}{R}$; *

Pour calculer le rayon R′ de l'arc d'extrados on aura $R' = \frac{f^2 + d^2}{2f}$.

* La montée ou la flèche m s'obtiendra en posant l'égalité $\frac{m}{a} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$ d'où l'on tire $m = \frac{a(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha}$. Pour les voûtes dont l'angle au centre est de 60, 90 ou 120 degrés on aura pour α 30, 45 et 60 degrés. Les tables des expressions trigonométriques naturelles donnent

$\cos 30^o = 0,86603$, $\cos 45^o = 0,70711$, $\cos 60^o = 0,50000$.
$\sin 30^o = 0,50000$, $\sin 45^o = 0,70711$, $\sin 60^o = 0,86603$.

En mettant successivement ces valeurs dans la formule ci-dessus et pour a la demi-ouverture de la voûte on aura la flèche m.

Elles sont les expressions des données nécessaires pour calculer la surface de la voûte ABCH et son centre de gravité par rapport à la ligne AH.

La longueur calculée de la ligne AH sera la hauteur du massif formant culée à la naissance de la voûte. On aura ensuite l'épaisseur de la culée au moyen de l'expression générale $MV = MC$.

Nous n'avons pas fait de calculs pour les voûtes en arc de cercle; ceux que nous avons donnés indiquent suffisamment la marche à suivre lorsqu'on veut appliquer à ces voûtes les formules algébriques consignées dans le cours de ce mémoire.

Comme application, en employant la méthode mécanique, nous avons pris pour les voûtes en arc de cercle, les angles au centre de 60, 90 et 120 degrés dont les résultats sont écrits dans le tableau suivant :

Ouverture des voûtes	Poids de la 1/2 voûte	Poids du mètre carré	Surface	Distance du centre de gravité	Moment MV	Moment MC	Épaisseur de la culée
Voûtes en arc de cercle dont l'angle au centre est de 60 degrés.							
5,00	0gr,04375	0gr,028404	1m²,540	1m,00	1,57000	$\frac{x^2}{2} \times 0,97$	1m,781
10,00	0,12500	»	4,400	2,14	9,41600	$\frac{x^2}{2} \times 1,30$	3,806
15,00	0,22525	»	7,932	3,23	25,62036	$\frac{x^2}{2} \times 1,72$	5,458
20,00	0,38100	»	13,413	4,27	57,27351	$\frac{x^2}{2} \times 2,10$	7,385
25,00	0,55000	»	19,363	5,30	102,62390	$\frac{x^2}{2} \times 2,45$	9,152
30,00	0,76500	»	26,932	6,40	172,36480	$\frac{x^2}{2} \times 2,80$	11,095
50,00	1,92750	»	67,860	10,65	722,70900	$\frac{x^2}{2} \times 4,25$	18,441
Voûtes en arc de cercle dont l'angle au centre est de 90 degrés.							
10,00	0,12952	»	4,56	2,25	10,26	$\frac{x^2}{2} \times 1,50$	3,60
20,00	0,41248	»	14,522	4,34	63,02548	$\frac{x^2}{2} \times 2,45$	7,17
30,00	0,82999	»	29,221	6,53	190,81313	$\frac{x^2}{2} \times 3,25$	10,84
50,00	2,00623	»	70,632	10,65	752,23080	$\frac{x^2}{2} \times 4,85$	17,61
Voûtes en arc de cercle dont l'angle au centre est de 120 degrés.							
5,00	0,050000	»	1,7603	1,10	1,93633	$\frac{x^2}{2} \times 1,25$	1,76
10,00	0,135625	»	4,7748	2,08	9,931584	$\frac{x^2}{2} \times 1,80$	3,32
15,00	0,275000	»	9,6817	3,13	30,303721	$\frac{x^2}{2} \times 2,35$	5,07
20,00	0,42375	»	14,9186	4,15	61,912190	$\frac{x^2}{2} \times 2,93$	6,49
25,00	0,613125	»	21,5858	5,25	113,325450	$\frac{x^2}{2} \times 3,35$	8,22
30,00	0,841875	»	29,6393	6,24	184,949232	$\frac{x^2}{2} \times 3,95$	9,68
50,00	2,13875	»	75,2974	10,30	775,563220	$\frac{x^2}{2} \times 6,10$	15,94

En rassemblant ces résultats nous remarquons bientôt qu'ils peuvent être représentés sous une forme simple par une équation du premier degré, savoir :

Voûtes en arc de cercle dont l'angle au centre est de 60 degrés.

$$y = 0,3675\,x + 3,80.$$

De l'ouverture x il faut retrancher 10 mètres pour avoir l'épaisseur de la culée.

Voûtes en arc de cercle dont l'angle au centre est de 90 degrés.

$$y = 0,351\,x + 3,65.$$

De l'ouverture x il faut retrancher 10 mètres pour avoir l'épaisseur de la culée.

Voûtes en arc de cercle dont l'angle au centre est de 120 degrés.

$$y = 0,315\,x + 1,80.$$

De l'ouverture x il faut retrancher 5 mètres pour avoir l'épaisseur de la culée.

On pourrait former d'autres séries d'arcs d'un plus ou moins grand nombre de degrés. On aurait pour chaque série une équation particulière du premier degré, en déterminant d'après les mêmes formules l'épaisseur à la clé, et en prenant pour l'épaisseur aux reins de la voûte, extradossée en arc de cercle, deux fois l'épaisseur à la clé, portée sur le prolongement du rayon passant par la naissance de l'arc.

Nous engageons les constructeurs à mettre notre méthode en pratique et à la vérifier dans toutes les constructions qui se présenteront à eux. Il est visible, en formant une table des épaisseurs des culées des ponts construits, que les constructeurs ont suivi des routes différentes pour fixer ces épaisseurs; qu'elles présentent souvent des anomalies dont on ne peut se rendre compte; qu'enfin dans les formules empiriques données par les auteurs, pour régulariser ces épaisseurs, on ne se rend point raison des motifs, qui les ont guidés dans la composition de ces formules.

Dans notre manière de résoudre la question de l'épaisseur des culées à la naissance de la voûte, le constructeur peut apprécier le degré de confiance qu'il convient d'accorder au résultat obtenu. Il lui fera subir telle modification qu'il jugera utile selon la nature des matériaux mis à sa disposition et celle du sol sur lequel sera élevée la construction. Enfin il aura égard à la hauteur des piédroits et à toutes les circonstances particulières du projet qu'il doit exécuter.