

**Zeitschrift:** Bulletins des séances de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 2 (1846-1849)  
**Heft:** 16

**Artikel:** Séance du 4 août 1847  
**Autor:** [s.n.]  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-248555>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SÉANCE DU 4 AOUT 1847.

Présidence de M. le Dr. Ch. Mayor.

Lecture est faite du mémoire suivant de M. Fréd. Chavannes, renfermant *la démonstration d'un lemme fréquemment employé*.

« Il y a, dans le champ élémentaire des sciences mathématiques, certains *lemmes* dont la démonstration générale est hors de la portée des jeunes adeptes et dont on a néanmoins besoin pour asseoir sur des bases rigoureuses, la doctrine à leur communiquer. Cette difficulté, assez considérable, est ordinairement éludée plutôt que surmontée. Mais il doit y avoir un moment où l'élève doit obtenir une démonstration à la fois générale et rigoureuse. C'est pour cela que je propose, comme exemple, la démonstration suivante. Le lemme spécial qu'elle établit sert à démontrer de nombreux théorèmes de mathématiques pures et appliquées, et pourra, sous ce point de vue, intéresser les personnes vouées à l'enseignement de ces sciences.

LEMME.

*Une fonction est proportionnelle à la variable dont elle dépend, quelle que soit la raison de la proportion, lorsque l'on peut démontrer que la proportionnalité existe dans le cas particulier où la raison est un nombre entier.*

Soit  $x$  la variable indépendante,  $f(x)$  sa fonction. On accorde que, quel que soit d'ailleurs  $x$ , on a,  $n$  étant un nombre entier :

$$(1) \quad x : nx = f(x) : f(nx).$$

Il faut démontrer que,  $k$  étant un nombre quelconque fractionnaire ou irrationnel, on a aussi :

$$(2) \quad x : kx = f(x) : f(kx).$$

Il résulte de la proportion (1) que

$$(3) \quad f(nx) = nf(x).$$

Cette égalité est vraie quel que soit  $x$ ; nous pouvons donc y représenter  $x$  par  $x'$ ,  $x'$  étant une seconde valeur de notre variable, nous avons ainsi, en intervertissant les membres de notre égalité :

$$n f(x') = f(nx').$$

Faisons  $x' = \frac{x}{n}$ , substituons cette valeur dans cette

dernière égalité et divisons les deux membres par  $n$ . Il vient :

$$(4) \quad f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x).$$

D'un autre côté,  $p$  étant un nombre entier, nous avons, par l'hypothèse sur laquelle est fondée l'égalité (3),

$$f(px') = pf(x');$$

Substituons à  $x'$  sa valeur  $\frac{x}{n}$ , il vient :

$$f\left(\frac{px}{n}\right) = pf\left(\frac{x}{n}\right),$$

et à cause de (4),

$$f\left(\frac{px}{n}\right) = \frac{p}{n} f(x).$$

Cette dernière égalité fait voir que la proportion (2) est vraie lorsque  $k$  est égal à une fraction rationnelle quelconque  $\frac{p}{n}$ .

La proportion (2) étant ainsi vérifiée, nous en déduisons cette suite de rapports égaux :

$$\frac{x}{n} : f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{2x}{n} : f\left(\frac{2x}{n}\right) = \frac{3x}{n} : f\left(\frac{3x}{n}\right) = \dots \dots \dots \frac{px}{n} : f\left(\frac{px}{n}\right).$$

Cette suite nous fait voir que la fonction croît en même temps que la variable, toutes les fois que les accroissements de la variable sont rationnels. Mais si nous faisons  $n$  plus grand qu'aucune quantité assignable, la variable croîtra par degrés insensibles et nous conclurons de la proportion, qui subsiste encore, que la fonction croît toujours avec la variable et décroît avec elle. Ou, en d'autres termes, que, dans tous les cas, à une plus grande variable correspond une plus grande fonction et réciproquement.

Supposons maintenant que, dans la proportion (2),  $k$  exprime un nombre irrationnel quelconque; il s'agit de faire voir que

$$(5) \quad f(kx) = kf(x).$$

Si cette dernière égalité n'est pas vraie, nous pourrons poser par hypothèse,  $t$  étant une quantité positive ou négative égale à l'erreur à corriger :

$$(6) \quad f(kx) = kf(x) + t.$$

Supposons  $t$  positif. Réduisons  $k$  en fraction continue et calculons une réduite  $\frac{p}{n}$ , telle que l'on ait  $\frac{p}{n} > k$ , et

$\frac{p}{n} - k < \frac{t}{f(x)}$ , ce qui est toujours possible, comme on le sait par la théorie des fractions continues. Nous avons ainsi :

$$\frac{px}{n} > kx \text{ et } \left(\frac{p}{n} - k\right)f(x) < t.$$

On tire de cette dernière inégalité en développant la parenthèse, en transposant  $k f(x)$ , en remplaçant  $\frac{p}{n} f(x)$  par  $f\left(\frac{px}{n}\right)$  et  $k f(x) + t$  par  $f(kx)$  :

$$f\left(\frac{px}{n}\right) < f(kx).$$

C'est-à-dire que tandis que la première variable  $\frac{px}{n}$  est plus grande que la seconde  $kx$ , la fonction correspondante à la première est plus petite que la fonction correspondante à la seconde ; ce qui est absurde.

Si nous supposons  $t$  négatif, ou l'égalité  $f(kx) = k f(x) - t$ , en prenant  $\frac{p}{n} < k$  et  $\left(k - \frac{p}{n}\right) < \frac{t}{f(x)}$ . On obtient par des moyens analogues,  $f\left(\frac{p}{n} x\right) > f(kx)$ ; ce qui est absurde aussi.

Donc l'égalité (6) est absurde dans les deux suppositions, et par conséquent l'égalité (5) est vraie, et la proportion (2) est démontrée dans tous les cas. »

#### Ouvrages reçus :

*E. WARTMANN*, prof. *Recherches sur l'induction, IV Mémoire*, tiré des Archives des sciences physiques et naturelles, supplément à la Bibliothèque Universelle. n°. 18. 8°. pl. De la part de l'auteur.

*J. GAY*. *Dissertation sur les différents principes de la statique*. 4°. Lausanne, 1847. De la part de l'auteur.

---

## ERRATA.

---

- Page 257 , ligne 20 , lisez la
- 258 1 entre autres  
259 15 une  
261 8 créées  
» 23 c'est l'avantage  
262 24 les unes les autres  
263 3 animal et  
» » obtenez.  
» 11 forme élémentaire  
265 28 ait  
266 5 ménagera  
» dernière phosphates  
267 1 semble  
» » sol  
» 23 minérales ;  
» 50 bouse  
» 31 chaux  
268 28 entre elles  
271 16 aura  
» 17 sera  
272 29 atteindra  
» » seneçons  
274 6 ils ne peuvent  
275 2 suffira pas de  
» 8 jeter  
» 16 et 17 les eaux  
» 18 des égoûts  
276 2 houilles ; celle-ci  
» 17 *Gesellschaft*  
» 18 *Zurich* ;  
» 20 *Doubs* ;  
277 15 Ducros  
279 2 et 3 , effacez : en employant la disposition précédem-  
ment décrite  
280 3 , lisez le courant de cinq couples  
» 4 extrémités du fil induit aboutissaient  
» 9 communiquait  
281 12 oxygène  
» 13 oxyde  
282 2 oxygène  
» 13 Elles paraissent  
283 2 siphon  
284 13 qu'on  
» 18 *Gesellschaft*  
» 29 Vosges ;  
285 titre séance ordinaire
-