Zeitschrift: Bulletins des séances de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 2 (1846-1849)
Heft: 16

Artikel: Séance du 4 août 1847
Autor: [s.n.]
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-248555

SÉANCE DU 4 AOUT 1847.

Présidence de M. le Dr. Ch. Mayor.

Lecture est faite du mémoire suivant de M. *Fréd. Chavannes*, renfermant *la démonstration d'un lemme fréquemment employé.*

« Il y a, dans le champ élémentaire des sciences mathématiques, certains *lemmes* dont la démonstration générale est hors de la portée des jeunes adeptes et dont on a néanmoins besoin pour asseoir sur des bases rigoureuses, la doctrine à leur communiquer. Cette difficulté, assez considérable, est ordinairement éludée plutôt que surmontée. Mais il doit y avoir un moment où l'élève doit obtenir une démonstration à la fois générale et rigoureuse. C'est pour cela que je propose, comme exemple, la démonstration suivante. Le lemme spécial qu'elle établit sert à démontrer de nombreux théorèmes de mathématiques pures et appliquées, et pourra, sous ce point de vue, intéresser les personnes vouées à l'enseignement de ces sciences.

LEMME.

Une fonction est proportionnelle à la variable dont elle dépend, quelle que soit la raison de la proportion, lorsque l'on peut démontrer que la proportionnalité existe dans le cas particulier où la raison est un nombre entier.

Soit x la variable indépendante, $f(x)$ sa fonction. On accorde que, quel que soit d'ailleurs x, on a, n étant un nombre entier :

$$(1) \qquad x : nx = f(x) : f(nx).$$

Il faut démontrer que, k étant un nombre quelconque fractionnaire ou irrationnel, on a aussi :

$$(2) \qquad x : kx = f(x) : f(kx).$$

Il résulte de la proportion (1) que

$$(3) \qquad f(nx) = nf(x).$$

Cette égalité est vraie quel que soit x; nous pouvons donc y représenter x par x', x' étant une seconde valeur de notre variable, nous avons ainsi, en intervertissant les membres de notre égalité :

$$n\, f(x') = f(nx').$$

Faisons $x' = \frac{x}{n}$, substituons cette valeur dans cette dernière égalité et divisons les deux membres par n. Il vient :

$$(4) \qquad f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x).$$

D'un autre côté, p étant un nombre entier, nous avons, par l'hypothèse sur laquelle est fondée l'égalité (3),

$$f(px') = pf(x');$$

Substituons à x' sa valeur $\frac{x}{n}$, il vient :

$$f\left(\frac{px}{n}\right) = p\, f\left(\frac{x}{n}\right),$$

et à cause de (4),

$$f\left(\frac{px}{n}\right) = \frac{p}{n} f(x).$$

Cette dernière égalité fait voir que la proportion (2) est vraie lorsque k est égal à une fraction rationnelle quelconque $\frac{p}{n}$.

La proportion (2) étant ainsi vérifiée, nous en déduisons cette suite de rapports égaux :

$$\frac{x}{n} : f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{2\,x}{n} : f\left(\frac{2\,x}{n}\right) = \frac{3\,x}{n} : f\left(\frac{3\,x}{n}\right) = \\ \ldots\ldots \frac{px}{n} : f\left(\frac{px}{n}\right).$$

Cette suite nous fait voir que la fonction croit en même temps que la variable, toutes les fois que les accroissements de la variable sont rationnels. Mais si nous faisons n plus grand qu'aucune quantité assignable, la variable croîtra par degrés insensibles et nous conclurons de la proportion, qui subsiste encore, que la fonction croit toujours avec la variable et décroît avec elle. Ou, en d'autres termes, que, dans tous les cas, à une plus grande variable correspond une plus grande fonction et réciproquement.

Supposons maintenant que, dans la proportion (2), k exprime un nombre irrationnel quelconque ; il s'agit de faire voir que

$$(5) \qquad f(kx) = kf(x).$$

Si cette dernière égalité n'est pas vraie, nous pourrons poser par hypothèse, t étant une quantité positive ou négative égale à l'erreur à corriger :

$$(6) \qquad f(kx) = kf(x) + t.$$

Supposons t positif. Réduisons k en fraction continue et calculons une réduite $\frac{p}{n}$, telle que l'on ait $\frac{p}{n} > k$, et $\frac{p}{n} - k < \frac{t}{f(x)}$, ce qui est toujours possible, comme on le sait par la théorie des fractions continues. Nous avons ainsi :

$$\frac{px}{n} > kx \text{ et } \left(\frac{p}{n} - k\right) f(x) < t.$$

On tire de cette dernière inégalité en développant la parenthèse, en transposant $kf(x)$, en remplaçant $\frac{p}{n}f(x)$ par $f\left(\frac{px}{n}\right)$ et $kf(x) + t$ par $f(kx)$:

$$f\left(\frac{px}{n}\right) < f(kx).$$

C'est-à-dire que tandis que la première variable $\frac{px}{n}$ est plus grande que la seconde kx, la fonction correspondante à la première est plus petite que la fonction correspondante à la seconde; ce qui est absurde.

Si nous supposons t négatif, ou l'égalité $f(kx) = kf(x) - t$, en prenant $\frac{p}{n} < k$ et $\left(k - \frac{p}{n}\right) < \frac{t}{f(x)}$. On obtient par des moyens analogues, $f\left(\frac{p}{n}x\right) > f(kx)$; ce qui est absurde aussi.

Donc l'égalité (6) est absurde dans les deux suppositions, et par conséquent l'égalité (5) est vraie, et la proportion (2) est démontrée dans tous les cas. »

Ouvrages reçus :

E. WARTMANN, prof. *Recherches sur l'induction, IV Mémoire*, tiré des Archives des sciences physiques et naturelles, supplément à la Bibliothèque Universelle. n°. 18. 8°. pl. De la part de l'auteur.

J. GAY. *Dissertation sur les différents principes de la statique.* 4°. Lausanne, 1847. De la part de l'auteur.

ERRATA.

Page 257,	ligne 20,	lisez la
258	1	entre autres
259	15	une
261	8	créées
»	23	c'est l'avantage
262	24	les unes les autres
263	3	animal et
»	»	obtenez.
»	11	forme élémentaire
265	28	ait
266	5	ménagera
»	dernière	phosphates
267	1	semble
»	»	sol
»	23	minérales ;
»	30	bouse
»	31	chaux
268	28	entre elles
271	16	aura
»	17	sera
272	29	atteindra
»	»	seneçons
274	6	ils ne peuvent
275	2	suffira pas de
»	8	jeter
»	16 et 17	les eaux
»	18	des égoûts
276	2	houilles ; celle-ci
»	17	*Gesellschaft*
»	18	*Zurich ;*
»	20	*Doubs ;*
277	15	Ducros
279	2 et 3,	effacez : en employant la disposition précédemment décrite
280	3,	lisez le courant de cinq couples
»	4	extrémités du fil induit aboutissaient
»	9	communiquait
281	12	oxygène
»	13	oxyde
282	2	oxygène
»	15	Elles paraissent
283	2	siphon
284	13	qu'on
»	18	*Gesellschaft*
»	29	Vosges ;
285	titre	séance ordinaire