

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles  
**Band:** 95 (1972)

**Artikel:** Prévision de la variation du chimisme d'un lac par augmentation des apports solubles : application : le sodium dans le lac de Neuchâtel  
**Autor:** Kiraly, Laszlo / Kubler, Bernard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-89031>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## **NOTE DE GÉOCHIMIE DE L'ENVIRONNEMENT**

### **PRÉVISION DE LA VARIATION DU CHIMISME D'UN LAC PAR AUGMENTATION DES APPORTS SOLUBLES.**

#### **APPLICATION: LE SODIUM DANS LE LAC DE NEUCHATEL**

par

**LASZLO KIRALY et BERNARD KUBLER**

AVEC 1 FIGURE

---

#### **INTRODUCTION**

Le temps de renouvellement des eaux d'un lac, plus généralement, d'un réservoir superficiel ou souterrain, a souvent été calculé par la méthode du bilan (rapport du volume total au débit annuel des exutoires). Toutefois il s'est avéré que cette méthode qui donne un premier ordre de grandeur, est beaucoup trop simpliste. Des modèles théoriques (TOTH 1963, KIRALY 1970) et des résultats expérimentaux (travaux du Centre de recherches géodynamiques de Thonon) confirment ce fait.

Dans le besoin de prévoir avec plus de rigueur l'augmentation des teneurs moyennes, par exemple de  $\text{Na}^+$ , dans un réservoir : le lac de Neuchâtel, une méthode générale de calcul a été élaborée. Elle comporte encore toutefois des simplifications importantes.

Cette méthode est valable pour toute augmentation de polluants hydrosolubles inertes dans un réservoir. Par « inerte », il faut entendre les éléments qui n'entrent pas directement dans un biocycle (comme le  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{Na}^+$ ,  $\text{SO}_4^{2-}$ , etc.) ou dans un cycle de précipitation ( $\text{Fe}^{+3}$ ,  $\text{Al}^{+3}$ , etc.).

Les résultats de ces calculs vont fournir une base de comparaison des plus utiles pour analyser et comprendre, par référence, la distribution des éléments biophiles (P, N, etc.), des éléments qui participent aux cycles biochimiques de précipitation (Ca, Mg, etc.), des éléments poisons (métaux lourds : Pb et Hg) et enfin des substances de synthèse tels que les pesticides ou les détergents.

1. *Variation de la concentration C dans un réservoir alimenté par des courants d'eau et muni d'un exutoire*

Soit un réservoir contenant un volume d'eau  $V$ , la concentration de  $\text{Na}^+$  étant  $C$  mg/l dans l'eau du réservoir. Ce réservoir est alimenté par des courants d'eau, d'un débit total  $Q_E$  m<sup>3</sup>/an et d'une teneur en  $\text{Na}^+$   $C_E$  mg/l. Le débit de l'exutoire est  $Q_S$  m<sup>3</sup>/an, et l'eau sortant contient  $C_S$  mg/l de  $\text{Na}^+$ .

Le changement de la concentration moyenne du réservoir est exprimée, à un moment donné, par

$$dC = \frac{(Q_E \cdot C_E - Q_S \cdot C_S) \cdot dt}{V + (Q_E - Q_S) \cdot dt} \quad (1)$$

Pour pouvoir calculer facilement la concentration moyenne  $C$  dans le réservoir à tous les moments, introduisons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- $Q_S$  et  $Q_E$  sont constants dans le temps.
- $Q_S = Q_E = Q$ , donc le volume d'eau  $V$  reste constant.
- $C_S = C$ , c'est-à-dire, la concentration de l'eau sortant est égale à la concentration moyenne de l'eau du réservoir.
- On admet, en première approximation, que la concentration moyenne  $C$  est uniforme dans le réservoir.

Dans ces conditions, l'équation (1) devient

$$dC = \frac{Q}{V} (C_E - C) \cdot dt$$

ou

$$\frac{dC}{dt} + \frac{Q}{V} C = \frac{Q}{V} C_E \quad (2)$$

C'est une équation différentielle linéaire, de premier ordre, que l'on résout facilement si l'on connaît la variation de la concentration d'entrée  $C_E$  dans le temps.

1.1. *La concentration d'entrée  $C_E$  est constante*

Admettons d'abord que la concentration  $C_E$  des affluents est constante dans le temps. Après la séparation des variables et l'intégration des deux côtés, l'équation (2) devient

$$\ln \left( \frac{Q}{V} C_E - \frac{Q}{V} C \right) = - \frac{Q}{V} t + \ln K$$

et

$$C = C_E - \frac{V}{Q} \cdot K \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t}$$

À  $t = 0$ , la concentration dans le réservoir est égale à  $C_0$  et l'on aura pour  $C(t)$

$$C(t) = C_E - (C_E - C_0) e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} \quad (3)$$

L'équation (3) montre que dans ce premier cas la concentration moyenne du réservoir tend asymptotiquement vers la concentration  $C_E$  des affluents, mais ne dépassera pas cette dernière.

### 1.2. La concentration d'entrée $C_E$ varie dans le temps

Si la concentration  $C_E$  est une fonction du temps, l'équation (2) s'écrit

$$\frac{dC}{dt} + \frac{Q}{V} C = \frac{Q}{V} f(t)$$

Si la fonction  $f(t)$  est une fonction simple, on peut calculer la concentration  $C(t)$  par une formule analytique simple. Mentionnons trois cas :

#### a) $C_E$ varie linéairement avec le temps

soit

$$C_E = f(t) = A + B \cdot t$$

et

$$\frac{dC}{dt} + \frac{Q}{V} C = \frac{Q}{V} (A + B \cdot t) \quad (4)$$

L'équation (4) est résolue facilement par la méthode de Lagrange et l'on obtient pour  $C(t)$  l'expression

$$C(t) = (A - \frac{V}{Q} B) + B \cdot t + K \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} \quad (5)$$

#### b) $C_E$ varie non-linéairement

soit la fonction

$$C_E = f(t) = D + A \cdot e^{B \cdot t}$$

et

$$\frac{dC}{dt} + \frac{Q}{V} C = \frac{Q}{V} (D + A \cdot e^{B \cdot t})$$

En appliquant la même méthode que précédemment on obtient pour  $C(t)$

$$C(t) = D + \frac{(Q/V)}{(Q/V) + B} \cdot A \cdot e^{B \cdot t} + K \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} \quad (6)$$

Pour  $t = 0$ ,  $C(t) = C_0$  et l'on obtient pour  $K$

$$K = C_0 - D - \frac{(Q/V)}{(Q/V) + B} \cdot A$$

c)  $C_E$  varie de façon quelconque dans le temps

Si  $C_E$  varie de façon « irrégulière » dans le temps,  $C(t)$  doit être calculée par approximations. En admettant, par exemple, que  $C_E$  moyenne est constante dans l'intervalle de temps  $\Delta t$ , nous aurons :

$$C(t) = \frac{C_E(t) + C_E(t - \Delta t)}{2} - \left[ \frac{C_E(t) + C_E(t - \Delta t)}{2} - C(t - \Delta t) \right] \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot \Delta t}$$

Le choix du pas de temps  $\Delta t$  influencera considérablement le résultat.

## 2. Application pour le lac de Neuchâtel

L'assimilation du lac de Neuchâtel au réservoir décrit dans le paragraphe 1 représente une simplification considérable, mais elle permet de calculer, en première approximation, les variations de la concentration moyenne de  $\text{Na}^+$  pour les années à venir.

### 2.1. Variation de la concentration d'entrée $C_E$ dans le temps

Les concentrations d'entrée  $C_E(t)$  ont été calculées d'après les données numériques de B. KUBLER (voir ce *Bulletin*). Si le débit quittant le lac de Neuchâtel est  $Q \text{ m}^3/\text{an}$  et le poids total du sel arrivant dans le lac est  $P \text{ tonne/an}$ , alors la concentration d'entrée  $C_E$  moyenne annuelle de  $\text{Na}^+$  est donnée par

$$C_E = C_N + 0,393 \frac{P}{Q} \cdot 10^6 [\text{mg/l}]$$

où  $C_N$  est la teneur en  $\text{Na}^+$  naturelle des eaux. Nous admettons que  $C_N = 1,5 \text{ mg/l}$  et  $Q = 1,67 \cdot 10^9 \text{ m}^3/\text{an}$ .

D'après les données de B. KUBLER, l'apport de sel P dû à l'homme, varie logarithmiquement dans le temps, et nous admettons deux lois de variation pour P :

de 1955 à 1964  $\log P = 3,55630 + 0,0107 \cdot t$

ou  $P = 3600 \cdot e^{0,0246 \cdot t}$

à partir de 1964  $\log P = 3,65321 + 0,0645 \cdot t$

ou  $P = 4500 \cdot e^{0,1483 \cdot t}$

La variation de  $C_E$  sera, donc, donnée également par deux expressions :

de 1955 à 1964  $C_E(t) = 1,5 + 0,85 \cdot e^{0,0246 \cdot t}$

à partir de 1964  $C_E(t) = 1,5 + 1,058 \cdot e^{0,1483 \cdot t}$

Les premières colonnes du tableau I donnent les valeurs de P et de  $C_E$ , extrapolées jusqu'à 1980.

## 2.2. Variation de la concentration moyenne C dans le temps

Etant donné que  $C_E$  varie exponentiellement, nous utilisons la formule (6) pour calculer les concentrations moyennes  $C(t)$  du lac pour les années allant de 1955 à 1980. Généralement :

si  $C_E(t) = C_N + A \cdot e^{B \cdot t}$

alors  $C(t) = C_N + \frac{(Q/V)}{(Q/V) + B} \cdot A \cdot e^{B \cdot t} + K \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t}$

avec  $K = C_0 - C_N - \frac{(Q/V)}{(Q/V) + B} \cdot A$

Le volume V du lac est estimé à  $13,7 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ , donc le rapport Q/V est égal à  $0,122 \text{ [an}^{-1}\text{]}$ .

Nous avons admis deux lois de variation pour  $C_E(t)$ , par conséquent nous devons utiliser deux formules pour calculer C(t) :

entre 1955 et 1964  $C(t) = 1,5 + 0,708 \cdot e^{0,0246 \cdot t} + 0,092 \cdot e^{-8,122 \cdot t}$

K est calculé avec  $C_0 = C(1955) = 2,30 \text{ mg/l}$

à partir de 1964  $C(t) = 1,5 + 0,48 \cdot e^{0,1483 \cdot t} + 0,44 \cdot e^{-0,122 \cdot t}$

K est calculé avec  $C_0 = C(1964) = 2,42 \text{ mg/l}$

La quatrième colonne du tableau I donne les valeurs de la concentration moyenne de  $\text{Na}^+$  dans le lac de Neuchâtel jusqu'à 1980 et la variation de C est montrée graphiquement sur la figure 1 (trait plein).

TABLEAU I

Année	P (NaCl) tonnes	$C_E (\text{Na}^+)$ mg/litre	$C (\text{Na}^+)$ mg/litre	C ( $\text{Na}^+$ ) après la stabilisation de $C_E (\text{Na}^+)$			
				2 ans après	5 ans après	10 ans après	20 ans après
1955	3 600	2,35	2,30	2,31	2,32	~2,34	~2,35
1956	3 690	2,37	2,31	2,32	~2,34	~2,35	~2,37
1958	3 876	2,41	2,33	2,35	2,37	2,39	2,40
1958	3 876	2,41	2,33	2,35	2,37	2,39	2,40
1960	4 072	2,46	2,35	2,37	2,40	2,43	2,45
1962	4 278	2,51	2,38	2,41	2,44	2,47	2,50
1964	4 500	2,56	2,42	2,45	2,48	2,52	2,55
1966	6 066	2,92	2,49	2,58	2,69	2,79	2,88
1968	8 151	3,42	2,64	2,81	3,00	3,19	3,35
1970	10 970	4,06	2,88	3,14	3,42	3,71	3,96
1972	14 755	4,97	3,22	3,60	4,02	4,46	4,82
1974	19 870	6,17	3,74	4,27	4,85	5,46	5,96
1976	26 742	7,80	4,45	5,18	5,98	6,82	7,51
1978	35 992	9,98	5,42	6,41	7,50	8,64	9,58
1980	48 500	12,90	6,72	8,06	9,54	11,07	12,36

### 2.3. Evolution de la concentration moyenne C en cas de stabilisation des apports

Dans les paragraphes précédents nous avons admis que les apports de sel augmentent exponentiellement jusqu'en 1980. Evidemment, les apports de sel pourraient se stabiliser bien avant 1980. Dans ce cas, on peut considérer la concentration d'entrée  $C_E$  comme constante et l'évolution de la concentration moyenne dans le lac est donnée par la formule (3) :

$$C(t) = C_E - (C_E - C_0) \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} \quad (3)$$

où  $C_0$  est la concentration moyenne dans le lac au moment de la stabilisation des apports.

Pour visualiser l'effet qu'aurait pu avoir et que pourrait avoir la stabilisation des apports de sel entre 1955 et 1980, nous avons calculé une famille de courbes, représentées par des tirets sur la figure 1. Chaque courbe indique l'évolution de la concentration moyenne de  $\text{Na}^+$  dans le lac pour le cas où les apports de sel se seraient stabilisés ou se stabiliseraient pendant l'année indiquée près des courbes.

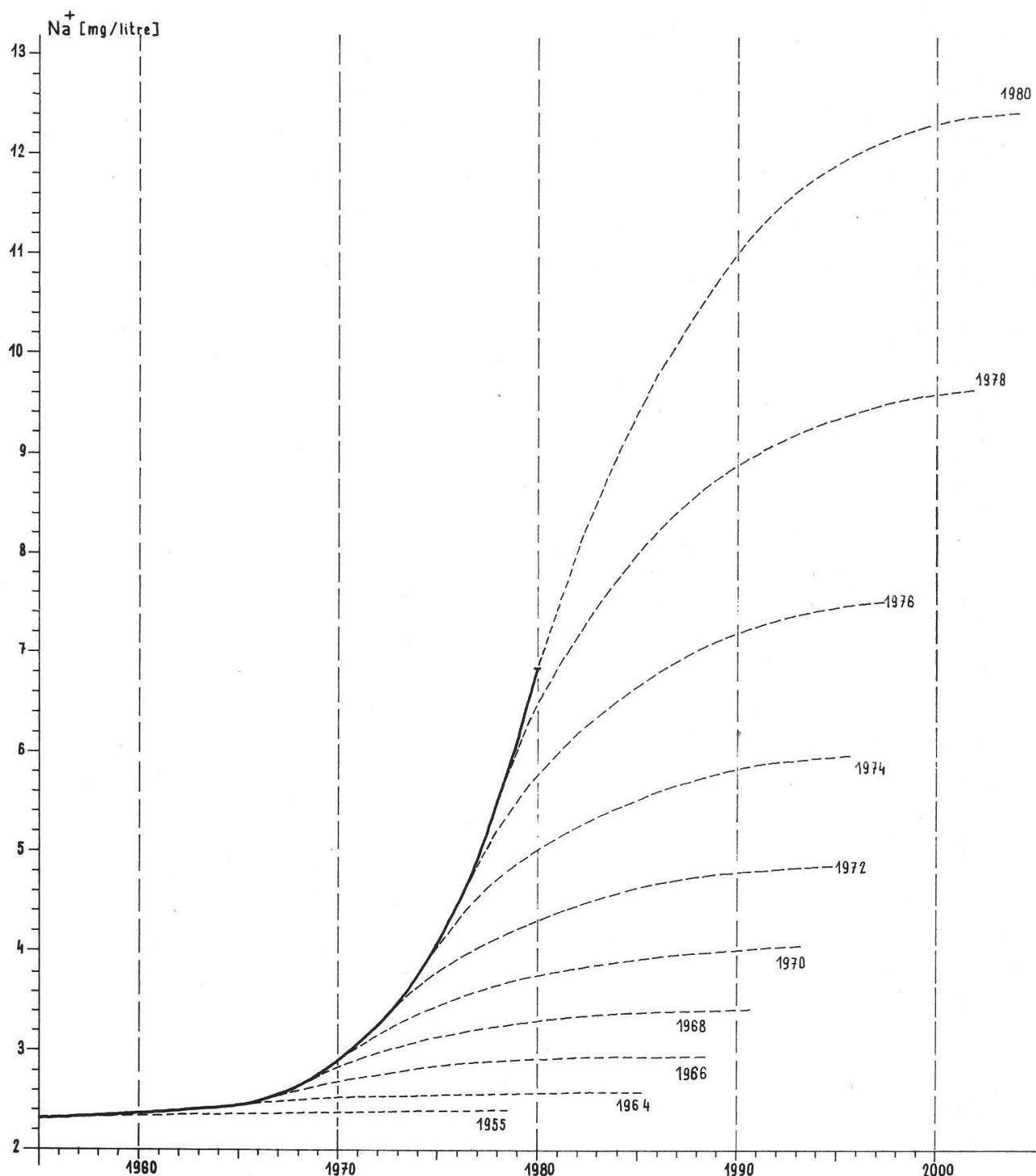


Fig. 1. Variations théoriques de la teneur en  $\text{Na}^+$  dans le lac de Neuchâtel

Il apparaît clairement que la concentration moyenne  $C$  continuera à évoluer encore longtemps après la stabilisation de la concentration d'entrée  $C_E$ . Les courbes de la figure 1 et les dernières colonnes du tableau I indiquent que, dans le lac de Neuchâtel, la concentration moyenne  $C$  arrive à un palier vingt à vingt-cinq ans après la stabilisation de  $C_E$ , seulement.

Soulignons que dans ces calculs nous n'avons pris en considération ni l'écoulement à potentiel de vitesse, ni la diffusion ionique, ni les convections thermiques dans le lac, alors que ces phénomènes jouent certainement un rôle important dans la distribution des concentrations à l'intérieur de la masse d'eau. La simulation de ces phénomènes à l'aide de modèles plus élaborés (modèles à éléments finis) exigerait, toutefois, une meilleure connaissance des concentrations d'entrée tout autour du lac.

---

### Résumé

L'augmentation de la consommation de sel augmente la quantité de  $\text{Na}^+$  apporté dans les lacs. Une méthode de calcul simplifiée permet de calculer l'augmentation de la teneur moyenne en  $\text{Na}^+$  des lacs en fonction de la quantité de sel apporté. Après avoir fait des hypothèses sur la variation des apports de sel, nous avons appliqué la méthode pour le lac de Neuchâtel. Les résultats montrent que la concentration moyenne de  $\text{Na}^+$  se stabilisera une vingtaine d'années après la stabilisation de l'apport annuel de sel.

---

### BIBLIOGRAPHIE

KIRALY, L. — (1970). L'influence de l'hétérogénéité et de l'anisotropie de la perméabilité sur les systèmes d'écoulement. *Bull. Ver. Schweiz. Pétrol.-Géol. u. Ing.* 37 (Nr. 91) : 50-57.

TOTH, J. — (1963). A theoretical analysis of groundwater flow in small drainage basins. *Journ. of Geophysical Res.* 68/16 : 4795-4812.

---