Zeitschrift: Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles

Band: 40 (1912-1913)

Artikel: Sur les Théorèmes de Sylvester et la Règle de Newton, dans la théorie des équations algébriques à coefficients réels

Autor: Marchand, Emile

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88581

Sur les Théorèmes de Sylvester et la Règle de Newton,

dans la théorie des équations algébriques à coefficients réels.

Par Emile MARCHAND

AVANT-PROPOS

En 1637, Descartes publiait dans sa *Géométrie* sa fameuse règle, connue depuis sous le nom de Règle des signes de Descartes, et qui permet de déterminer une limite supérieure du nombre des racines positives d'une équation algébrique par l'unique examen des signes des coefficients de cette équation.

Newton, dans ses leçons, alors qu'il était professeur à l'Université de Cambridge, donna une règle qui permet de préciser les résultats obtenus par l'application de la Règle de Descartes, en faisant intervenir, non pas seulement les signes des coefficients de l'équation, mais aussi la valeur elle-même de ces coefficients. En 1707, Newton publiait sa règle, sans démonstration, dans l'*Arithmetica universalis*.

Dans le courant du XVIIIme siècle, et dans la première moitié du XIXme, plusieurs mathématiciens distingués essayèrent de la démontrer; on peut citer, en particulier, Maclaurin, Campbell, Waring, Euler; leurs efforts échouèrent.

Voici ce que dit M. Cantor dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (1898) t. 3, p. 554, en parlant des travaux de Maclaurin et de Campbell, à ce sujet:

« Diese Abhandlungen (de Maclaurin et de Campbell) brachten Erläuterungen zu Newton's Regel für die Auffindung der Anzahl complexer Wurzeln einer gegebenen Gleichung, behaupteten auch seine Regel beweisen zu können, blieben aber thatsächlich den Beweis schuldig und berührten nicht einmal die Schwierigkeit der Ausnahmsfälle. »

Il faut attendre jusqu'en 1864, époque où Sylvester, alors professeur de mathématiques, à la « Royal Military Academy », de Woolwich, publia plusieurs travaux à ce sujet. Il commença à donner la démonstration de la Règle de Newton pour quelques équations de degré inférieur, dans un mémoire publié dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* (1864), vol. 154.

Poursuivant ses recherches, il trouva le principe d'une démonstration nouvelle, et découvrit une série de théorèmes, qui sont exactement à la Règle de Newton, ce que le théorème de Budan-Fourier est à la Règle de Descartes, la Règle se déduisant des théorèmes comme un cas particulier. Sylvester publia ses travaux dans diverses revues anglaises; spécialement dans *The Transactions of the Royal Irish Academy,* vol. 24, et dans *The Philosophical Magazine,* 4. série, vol. 31.

Budan, en 1811, et Fourier, en 1831, en généralisant la Règle de Descartes, ont donné leur nom au théorème. Il est donc de même juste et logique de faire une distinction entre, d'une part, la Règle de Newton, et, d'autre part, les théorèmes de Sylvester, et de ne plus les comprendre dans l'appellation commune de théorème de Newton.

Depuis Sylvester, plusieurs mathématiciens se sont intéressés à cette question et ont publié divers articles, soit dans des revues scientifiques, soit dans des traités d'algèbre supérieure. Leurs buts ont été, en général, non de refaire le travail de Sylvester, mais de l'exposer.

On peut mentionner:

AUG. POULAIN (Revue hebdomadaire des sciences *Les Mondes,* 1866, vol. 11).

A. GENOCCHI (*Nouvelles annales de mathématiques,* 2[me] série, t. 6, 1867).

LAGUERRE. Œuvres.

M. DE JONQUIÈRES (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* 1884, t. 99, quatre articles).

JUL. PETERSEN (*Theorie der algebraischen Gleichungen,* 1878).

HEINRICH WEBER (*Lehrbuch der Algebra,* 1898).

Le but de cette étude a été de refaire complètement le travail de Sylvester, en ne faisant aucune restriction au sujet des fonctions qui interviennent, et en attachant une importance spéciale à l'examen de certains cas particuliers, pas même mentionnés par Sylvester, et qui, jusqu'à aujourd'hui, n'ont, comme il semble, jamais été traités avec rigueur. Il s'agit, en particulier, de ce que M. Cantor, dans la citation ci-dessus, appelle « die Schwierigkeit der Ausnahmsfälle ».

M. H. Weber dit aussi dans son *Lehrbuch der Algebra,* en parlant des théorèmes de Sylvester:

« Ob der Satz bei richtiger Zählung der mehrfachen Wurzeln auch noch im Falle mehrfacher Wurzeln gültig bleibt, mag dahin gestellt bleiben. »

Ce travail comprend trois parties:

I. Le premier et le deuxième théorème de Sylvester.

II. La Règle de Newton.

III. Compléments aux théorèmes de Sylvester.

PREMIÈRE PARTIE

Le premier et le deuxième théorème de Sylvester.

CHAPITRE PREMIER

Notions préliminaires. — Enoncé des théorèmes.

§ 1.

Introduction.

Soit $f(x) = o$ une équation algébrique à coefficients réels du $n^{ème}$ degré.

Le problème qui fait l'objet de cette étude consiste à déterminer une limite supérieure du nombre des racines de cette équation comprises dans un intervalle réel donné ; il s'agit de préciser le théorème de Budan-Fourier [1].

$$f(x), \text{ et ses dérivées successives,}$$

$$f'(x),\ f''(x),\ \ldots.,\ f^{(n)}(x).$$

fournissent une première série de fonctions.

A cette série, adjoignons-en une seconde :

$$F_0(x),\ F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots.,\ F_n(x),$$

où les fonctions sont définies comme suit :

$$F_0(x) = [f(x)]^2$$

$$F_p(x) = r_p[f^{(p)}(x)]^2 - r_{p-1}[f^{(p-1)}(x)][f^{(p+1)}(x)]$$

$$F_n(x) = [f^{(n)}(x)]^2$$

p pouvant être 1, 2, ..., $(n-1)$.

[1] Au sujet du théorème du Budan-Fourier, voir le travail de M. A. Hurwitz, dans les *Mathematische Annalen*, vol. 71 (1911).

La double série de fonctions

$$\left.\begin{matrix} f(x), & f'(x), & \dots, & f^{(n)}(x) \\ F_0(x), & F_1(x), & \dots, & F_n(x) \end{matrix}\right\}$$

joue un rôle prépondérant dans les théorèmes de Sylvester.

Les constantes r_p, $p=0, 1, \dots, (n-1)$., introduites ci-dessus, sont assujetties à satisfaire deux conditions :

a) ces constantes doivent être positives

$$\text{I} \qquad \underline{r_p > 0} \qquad p=0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

b) pour arriver à la deuxième condition, on peut remarquer que, lorqu'on se propose de déterminer $F_p'(x)$, on rencontre l'expression

$$2r_p - r_{p-1}$$

et, dans le but de simplifier les expressions des dérivées des fonctions $F_p(x)$, on assujettit les constantes r_p à satisfaire la formule de récurrence :

$$\text{II} \qquad \underline{r_{p+1} = 2r_p - r_{p-1}}. \qquad p=1, 2, \dots, (n-2).$$

Telles sont les deux conditions pour la détermination des r_p.

A l'aide de II, on peut exprimer $r_2, r_3, \dots, r_{n-1}$, en fonction de r_0 et de r_1.

$$\begin{aligned} r_2 &= 2r_1 - r_0 \\ r_3 &= 3r_1 - 2r_0 \\ &\dots\dots\dots \\ r_p &= pr_1 - (p-1)r_0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ r_{n-1} &= (n-1)r_1 - (n-2)r_0. \end{aligned}$$

$$\underline{r_p} = pr_1 - (p-1)r_0 = r_0 + p(r_1 - r_0) = \underline{r_0 + \alpha p}.$$

$r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ doivent être positifs ; il faut alors que α soit plus grand que $\dfrac{-r_0}{n-1}$ $\left(\alpha > \dfrac{-r_0}{n-1}\right)$.

Les fonctions $f^{(p)}(x)$, $p=1, 2, \dots, n$, ne peuvent pas être identiquement nulles ; il en est autrement de $F_p(x)$, $p=1, 2, \dots, (n-1)$.

On peut montrer que les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $F_p(x)$ soit identiquement nulle sont :

1. α, la constante de la formule des r_p, doit être $\alpha = \frac{-r_0}{n}$.

2. $f^{(p-1)}(x)$ doit être de la forme

$$f^{(p-1)}(x) = \bar{c}(x - x_1)^{n-p+1}$$

$\bar{c}$ désignant une constante, positive ou négative.

Supposons,

$$F_p(x) \equiv r_p[f^{(p)}(x)]^2 - r_{p-1}\, f^{(p-1)}(x) .\, f^{(p+1)}(x) \equiv 0$$

$$r_p \frac{f^{(p)}(x)}{f^{(p-1)}(x)} \equiv r_{p-1} \frac{f^{(p+1)}(x)}{f^{(p)}(x)}$$

d'où, par intégration, c désignant une constante,

$$[f^{(p-1)}(x)]^{r_p} \equiv c[f^{(p)}(x)]^{r_{p-1}} \qquad (1).$$

$f^{(p-1)}(x)$ et $f^{(p)}(x)$ sont des polynômes dont le degré est respectivement $(n-p+1)$ et $(n-p)$. L'identité précédente exige donc

$$r_p(n-p+1) = r_{p-1}(n-p) \qquad \text{ou}$$

$$(r_0 + \alpha p)(n-p+1) = [r_0 + \alpha(p-1)](n-p)$$

$$\text{d'où} \qquad \alpha = \frac{-r_0}{n} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il est facile, de plus, de montrer que l'identité (1) exige encore

$$f^{(p-1)}(x) \equiv \bar{c}\,(x - x_1)^{n-p+1}.$$

En effet, cette identité (1) devient, pour $\alpha = \frac{-r_0}{n}$,

$$[f^{(p-1)}(x)]^{n-p} \equiv c_1[f^{(p)}(x)]^{n-p+1} \qquad c_1 = \text{const.} \neq 0.$$

Si, pour un instant, on pose

$$f^{(p-1)}(x) = y, \quad \text{on a } f^{(p)}(x) = y',$$

et l'identité ci-dessus devient

$$y^{n-p} \equiv c_1\, y'^{n-p+1}$$

d'où

$$y' \equiv c_2\, y^{\frac{n-p}{n-p+1}} \qquad c_2 = \text{const.} \neq 0.$$

$$dy \,.\, y^{\frac{p-n}{n-p+1}} \equiv c_2 \,.\, dx.$$

d'où, par intégration,

$$y^{\frac{p-n}{n-p+1}+1} = \bar{c} \,.\, x + C \qquad \bar{c} = \text{const.} \neq 0$$

$$y^{\frac{1}{n-p+1}} = \bar{c} \,.\, x + C.$$

Si x_1 désigne une racine de $y \equiv f^{(p-1)}(x) = 0$,

$$C = -\bar{c} \,.\, x_1$$

et $\qquad \underline{y \equiv f^{(p-1)}(x) = \bar{c}\,(x - x_1)^{n-p+1}}$

C. Q. F. D.

Il est aisé de démontrer que, réciproquement, lorsque

$$f^{(p-1)}(x) \equiv \bar{c}\,(x - x_1)^{n-p+1}$$

on a $\quad F_p(x) \equiv 0$, dans le cas où $\alpha = \dfrac{-r_0}{n}$.

On voit ainsi que, lorsque $F_p(x) \equiv 0$, on a nécessairement $F_{p+1}(x) \equiv 0, \ldots, F_{n-1}(x) \equiv 0$.

L'expression générale des constantes r_p est donc

$$r_p = r_0 + \alpha p \qquad \alpha > \frac{-r_0}{n-1}$$

r_0 étant une quantité positive, d'ailleurs quelconque, comme toujours, du reste, dans la suite. Mais, pour $\alpha = \dfrac{-r_0}{n}$, et seulement pour cette valeur particulière, une $[F_{n-1}(x)]$ ou plusieurs fonctions $F_p(x)$ peuvent être identiquement nulles.

Pour la clarté de la démonstration des théorèmes de Sylvester, il est alors utile de traiter spécialement ce cas particulier, et de considérer :

a) $\quad \alpha > \dfrac{-r_0}{n}$ impossibilité de $F_p(x) \equiv 0$ $p = 1, \ldots (n-1)$,

b) $\quad \alpha = \dfrac{-r_0}{n}$ possibilité de $F_p(x) \equiv 0$ $p = 1, \ldots, (n-1)$,

c) $\quad \dfrac{-r_0}{n-1} < \alpha < \dfrac{-r_0}{n}$.

Disons, tout de suite, que ce dernier cas ne présente aucun intérêt pour les théorèmes de Sylvester, et, qu'à l'avenir, on considérera les constantes r_p données par la formule

$$\underline{r_p = r_0 + \alpha \,.\, p} \qquad \underline{\alpha \geqq \frac{-r_0}{n}}.$$

§ 2.

Définitions et conventions.

Considérons, au point de vue des signes, les deux séries de nombres réels:

$$\left.\begin{matrix} t_0, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ T_0, & T_1, & T_2, & \ldots, & T_n \end{matrix}\right\} R.$$

Supposons $t_n \neq 0$ et $T_n \neq 0$, et désignons cette double série R par l'expression double série primaire.

S'il se trouve un couple d'éléments correspondants $\begin{matrix} t_r \\ T_r \end{matrix}$, tel que $t_r \neq 0$ et $T_r \neq 0$, on pourra décomposer R en deux groupes secondaires R′ et R″:

$$\left.\begin{matrix} t_0, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_r \\ T_0, & T_1, & T_2, & \ldots, & T_r \end{matrix}\right\} R' \text{ et } \left.\begin{matrix} t_r, & t_{r+1}, & \ldots, & t_n \\ T_r, & T_{r+1}, & \ldots, & T_n \end{matrix}\right\} R''.$$

On écrira alors symboliquement $R = R' + R''$. R′ et R″ pourront aussi à leur tour être décomposés.

Considérons, dans ce qui suit, l'un des groupes ainsi formés, par exemple, R′:

$$\left.\begin{matrix} t_0, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_r \\ T_0, & T_1, & T_2, & \ldots, & T_r \end{matrix}\right\} R'.$$

Une succession de deux éléments peut présenter une variation ou une permanence. Le nombre total des variations dans la ligne supérieure sera désigné par $v(R')$; $p(R')$ sera le nombre des permanences; $V(R')$ et $P(R')$ seront les nombres analogues relatifs à la ligne inférieure.

Chaque couple de successions correspondantes, $\begin{matrix} t_i & t_{i+1} \\ T_i & T_{i+1} \end{matrix}$, peut présenter quatre combinaisons, qu'on appellera permanence-permanence ou double-permanence, variation-variation ou double-variation, variation-permanence, et permanence-variation.

Les nombres qui expriment combien de fois chacune de ces combinaisons se trouve répétée dans les deux suites accouplées, seront représentés par les notations $pP(R')$, $vV(R')$, $vP(R')$ et $pV(R')$.

Il est évident que l'on a

$$vP(R) = vP(R') + vP(R''), \text{ etc.}$$

Il peut arriver que, parmi les nombres t_i et T_i, un ou plusieurs d'entre eux soient nuls. Il s'agit maintenant d'expliquer comment on les interprétera.

Les conventions au sujet des zéros, qui vont suivre, pourront paraître quelque peu arbitraires. On les préférera cependant à d'autres par le fait qu'une partie d'entre elles ont été établies par Newton lui-même, dans son *Arithmetica universalis,* et qu'elles permettent de démontrer la Règle de Newton jusque dans ses moindres détails.

Si, pour le premier couple d'éléments correspondants $\left.\begin{matrix} t_0 \\ T_0 \end{matrix}\right\}$ on a, soit $t_0 = 0$, soit $T_0 = 0$, on *supprimera* tout simplement ce couple; et, ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un couple $\left.\begin{matrix} t_i \\ T_i \end{matrix}\right\}$ tel que $t_i \neq 0$ et $T_i \neq 0$.

Lorsqu'il n'existe qu'un couple $\left.\begin{matrix} t_i \\ T_i \end{matrix}\right\}$, tel que l'on ait simultanément $t_i \neq 0$, et $T_i \neq 0$, à savoir $\left.\begin{matrix} t_r \\ T_r \end{matrix}\right\}$, on aura, par définition,

$$v(R') = 0 \quad p(R') = 0 \quad pP(R') = 0 \quad vP(R') = 0, \text{ etc.}$$

Pour plus de simplicité, on remettra maintenant à la place de $\left.\begin{matrix} t_i \\ T_i \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} t_0 \\ T_0 \end{matrix}\right\}$, en supposant donc $t_0 \neq 0$ et $T_0 \neq 0$.

Entre le couple ainsi défini $\left.\begin{matrix} t_0 \\ T_0 \end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix} t_r \\ T_r \end{matrix}\right\}$, un ou plusieurs des nombres intermédiaires t ou T peuvent être nuls. Par convention, on considérera ces zéros-là, suivant les cas, soit comme quantités positives, et on les écrira, $\oplus$, soit comme quantités négatives, $\ominus$.

Formulons les conventions suivantes A et B.

A. Supposons que

$$t_{m-1} \neq 0 \quad t_m = t_{m+1} = \ldots = t_{m+m'-1} = 0 \quad t_{m+m'} \neq 0$$

quels que soient les T correspondants; m étant l'un des nombres 1, 2, . . ., (r — 1), et m', l'un des nombres 1, 2, . . ., $(r - m)$; ce que, à l'avenir, on écrira

$$m = 1, 2, \ldots, (r-1)$$
$$m' = 1, 2, \ldots, (r-m).$$

On donnera alors aux zéros représentant t_m, t_{m+1}, ..., $t_{m+m'-1}$, *le même signe que celui de* $t_{m+m'}$.

B. Supposons que

$$T_{l-1} \neq 0 \quad T_l = T_{l+1} = \ldots = T_{l+l'-1} = 0 \quad T_{l+l'} \neq 0$$
$$l = 1, 2, \ldots, (r-1)$$
$$l' = 1, 2, \ldots, (r-l).$$

En général, on donnera

au zéro représentant $T_{l+l'-1}$, le signe contraire de celui de $T_{l+l'}$
» » $T_{l+l'-2}$, le même signe que » » »
» » $T_{l+l'-3}$, le signe contraire de » » »
. . . .
et ainsi de suite, *en variant toujours les signes.*

Il y a deux cas d'exception :

Premier cas d'exception.

Supposons qu'on ait simultanément :

$$t_{p-1} \neq 0 \quad t_p = t_{p+1} = \ldots = t_{p+p'-1} = 0 \quad t_{p+p'} \neq 0$$
$$T_{p-1} \neq 0 \quad T_p = T_{p+1} = \ldots = T_{p+p'-1} = 0 \quad T_{p+p'} \neq 0$$
$$p = 1, 2, \ldots, (r-1)$$
$$p' = 1, 2, \ldots, (r-p).$$

Pour les zéros de la série des t, on a la convention précédente A : tous les zéros prennent le même signe que celui de $t_{p+p'}$.

Pour les zéros de la série des T, on donne au dernier, $T_{p+p'-1}$, le signe contraire de celui de $T_{p+p'}$; à $T_{p+p'-2}$, le même signe que celui de $T_{p+p'}$; etc., comme l'indique la convention précédente B, sauf dans le cas où t_{p-1} et $t_{p+p'}$ sont de signes contraires,

$$\underline{t_{p-1} \ t_{p+p'} < 0.}$$

Dans ce cas, il faut que le zéro représentant T_p ait le même signe que T_{p-1}.

Ainsi, lorsque

$$t_{p-1} > 0, \ t_{p+5} > 0, \ T_{p-1} > 0, \ T_{p-5} > 0, \text{ on a}$$
$$+ \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus \quad +$$
$$+ \quad \ominus \quad \oplus \quad \ominus \quad \oplus \quad \ominus \quad +$$

tandis que, lorsque

$$t_{p-1} > 0,\ t_{p+5} < 0,\ T_{p-1} > 0,\ T_{p+5} > 0, \text{ on a}$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & \ominus & \ominus & \ominus & \ominus & \ominus & - \\ + & \oplus & \oplus & \ominus & \oplus & \ominus & + \end{array}$$

Deuxième cas d'exception.

Ce cas d'exception est très particulier; il ne se présente jamais pour un groupe secondaire, mais seulement pour la double série primaire, et seulement lorsqu'on a:

$$\left.\begin{array}{l} t_0 \neq 0\ t_1 \neq 0\ t_2 \neq 0\ \ldots\ t_{n-1} \neq 0\ t_n \neq 0 \\ T_0 \neq 0\ T_1 = T_2 = \ldots = T_{n-1} = 0\ T_n \neq 0 \end{array}\right\} R.$$

Dans ce cas, très particulier, les zéros représentant T_1, T_2, ..., T_{n-2}, T_{n-1}, seront tous considérés comme des quantités positives

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_{n-1} = \oplus.$$

Telles sont les conventions qui seront maintenues dans tout le cours de ce travail.

§ 3

Principe de la démonstration des théorèmes de Sylvester.

Considérons les deux séries de fonctions, introduites au § 1,

$$\left.\begin{array}{l} f(x),\quad f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x) \\ F_0(x),\ F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_n(x) \end{array}\right\} (1).$$

Remarquons que $f^{(n)}(x)$ est une constante différente de zéro, et que $F_n(x) = [f^{(n)}(x)]^2$ est constamment positif.

Pour une valeur bien déterminée x, il est clair que pP, vP, vV, pV correspondant à cette double série ont des valeurs bien déterminées. Lorsque x varie, pP, vP, vV, pV varient également, de sorte qu'on peut envisager ces expressions comme des fonctions de x.

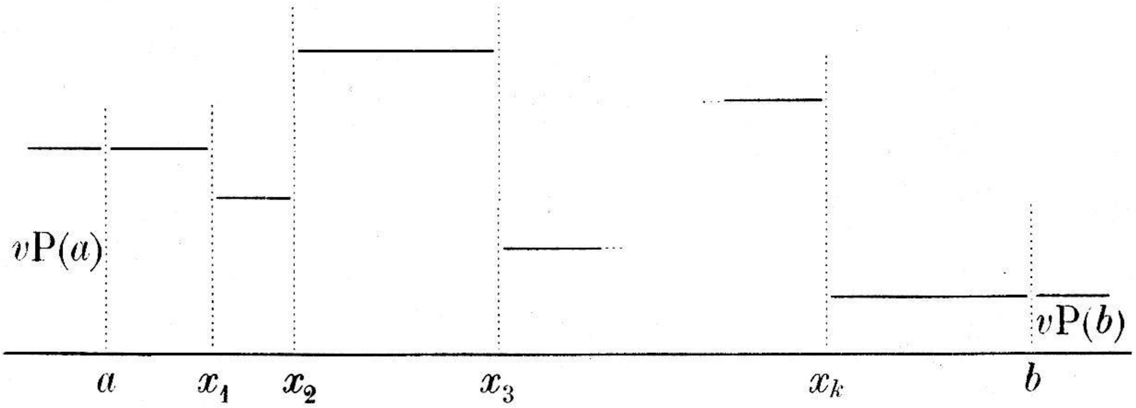
Ainsi se trouvent définies les quatre fonctions $p\mathrm{P}(x)$, $v\mathrm{P}(x)$, $v\mathrm{V}(x)$ et $p\mathrm{V}(x)$, par rapport aux séries (1).

Ce qui sera dit dans la suite de ce paragraphe de $v\mathrm{P}(x)$ s'appliquera aussi à $p\mathrm{P}(x)$, $v\mathrm{V}(x)$ et $p\mathrm{V}(x)$.

Dans les séries (1), faisons $x = X_1$, X_1 réel; on a $vP(X_1)$; pour une deuxième valeur réelle de x, $x = X_2$, $X_2 > X_1$, on a $vP(X_2)$. Supposons que dans l'intervalle $X_1 \ldots X_2$ $(X_1 \leqq x \leqq X_2)$, aucune des fonctions f, aucune des fonctions F ne s'annule; il est évident, en vertu de la continuité des fonctions f et F que

$$vP(X_1) = vP(X_2).$$

Si on se propose de représenter graphiquement la fonction $vP(x)$, dans un intervalle réel, $a \ldots b$, $a < b$, on a:



$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ étant les seules valeurs de x de l'intervalle $a \ldots b$, $(a \leqq x \leqq b)$ qui annulent une ou plusieurs fonctions f ou F. Ces racines sont nécessairement en nombre fini, d'après la nature des fonctions f et F. (Lorsqu'une ou plusieurs fonctions F sont identiquement nulles, on les considère comme constantes, positives ou négatives).

Pour les théorèmes de Sylvester, il est de première importance de chercher à déterminer $vP(a) - vP(b)$.

Soit, par définition,

$$\Delta_i = vP(x_i - h) - vP(x_i + h) \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

h étant un infiniment petit, comme toujours dans la suite.

On voit alors que

$$vP(a) - vP(b) = \sum_i^{1 \ldots k} \Delta_i$$

Examinons de très près Δ_i.

Par hypothèse, une ou plusieurs valeurs de la double suite

$$\left.\begin{array}{l} f(x_i),\ \ f'(x_i),\ \ f''(x_i),\ \ \ldots,\ \ f^{(n)}(x_i) \\ F_0(x_i),\ \ F_1(x_i),\ \ F_2(x_i),\ \ \ldots,\ \ F_n(x_i) \end{array}\right\} \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

sont nulles.

On décompose cette double série, en un certain nombre de groupes γ_i et en un certain nombre de groupes g_i, de la même façon qu'on a décomposé R en $(R'+R'')$ au commencement du § 2.

Pour la distinction des groupes γ_i et g_i, on observe les règles suivantes:

A) pour les groupes γ_i, *tous les éléments doivent être différents de zéro.*

B) pour les groupes g_i, les éléments des couples extrêmes doivent être différents de zéro (sauf toutefois dans le cas où $f(x_i)=0$; il suffit alors que les éléments du dernier couple soient différents de zéro); *pour les couples intermédiaires, il est nécessaire qu'un au moins des éléments soit nul.*

Par exemple, on peut avoir:

$$g_i', \gamma_i', g_i'', \gamma_i'', \gamma_i''', g_i''', \ldots, g_i^{(m)}, \gamma_i^{(m_1)}.$$

La différence des variations-permanences, par rapport à un groupe $g_i^{(l)}$, pour (x_i-h) et (x_i+h) est désignée par

$$\delta[g_i^{(l)}] \qquad l=1, 2, \ldots, m.;$$

on définirait, d'une manière analogue,

$$\delta[\gamma_i^{l_1}] \qquad l_1=1, 2, \ldots, m_1.$$

On peut remarquer que $\delta[\gamma_i^{(l_1)}]=0$, d'après la loi de formation des groupes γ_i.

Δ_i devient

$$\Delta_i=\sum_l^{1\ldots m}\delta[g_i^{(l)}].$$

d'où
$$vP(a)-vP(b)=\sum_i^{1\ldots k}\sum_l^{1\ldots m}\delta[g_i^{(l)}].$$

Donc, la détermination de $vP(a)-vP(b)$ revient à celle des

$$\delta[g_i^{(l)}]. \qquad \begin{array}{l} l=1, 2, \ldots, m. \\ i=1, 2, \ldots, k. \end{array}$$

Quelle pourra être la constitution de ces groupes $g_i^{(l)}$? Elle ne varie pas à l'infini, et on répartit les groupes $g_i^{(l)}$ en trois catégories.

Pour la distinction qui va suivre, il est nécessaire de se rappeler la loi de formation des groupes g_i et la définition des fonctions $F_0(x)$, $F_1(x)$, $\ldots$, $F_n(x)$.

Catégorie I.

Cette catégorie ne renferme que les groupes, tels que les éléments du premier couple du groupe soient nuls. On a donc

$$f(x_i) = 0$$
$$F_0(x_i) = [f(x_i)]^2 = 0.$$

Supposons $f'(x_i) \neq 0$; alors

$$F_1(x_i) = r_1 [f'(x_i)]^2 - r_0 \cdot f(x_i) \cdot f''(x_i) = r_1 [f'(x_i)]^2 > 0,$$

et le groupe ne se compose que de deux couples.

Si $f'(x_i) = 0$, alors $F_1(x_i) = r_1 [f'(x_i)]^2 = 0$, et ainsi de suite.

On reconnaît que tous les éléments du groupe, à l'exception de ceux du dernier couple, sont nuls.

Par exemple :

$$f(x_i) = 0 \quad f'(x_i) = 0 \quad \ldots \quad f^{(r-1)}(x_i) = 0 \; f^{(r)}(x_i) \neq 0$$
$$F_0(x_i) = 0 \quad F_1(x_i) = 0 \quad \ldots \quad F_{r-1}(x_i) = 0 \quad F_r(x_i) \neq 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, k.$$
$$r = 1, 2, \ldots, n.$$

Pour les deux catégories suivantes, les éléments des couples extrêmes des groupes, sont différents de zéro ; les groupes qui rentrent dans l'une ou l'autre des catégories II et III ont, au minimum, trois couples.

Catégorie II.

On répartit les groupes de cette catégorie en deux sous-catégories :

II*a*. — Les groupes de cette sous-catégorie ne sont composés que de trois couples ; le premier élément du couple intermédiaire est nul. On a donc :

$$f^{(p-1)}(x_i) \neq 0 \qquad f^{(p)}(x_i) = 0 \qquad f^{(p+1)}(x_i) \neq 0$$
$$F_{p-1}(x_i) > 0 \; F_p(x_i) = -r_{p-1} f^{(p-1)}(x_i) \cdot f^{(p+1)}(x_i) \neq 0 \; F_{p+1}(x_i) > 0.$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$i = 1, 2, \ldots, k.$$

Il résulte donc que le second élément du couple intermédiaire est différent de zéro, puisque $f^{(p-1)}(x_i) \neq 0$ et $f^{(p+1)}(x_i) \neq 0$.

IIb. — Les groupes de cette sous-catégorie ont au minimum quatre couples d'éléments correspondants; le premier élément du premier couple intermédiaire est nul. On a donc:

$$f^{(p-1)}(x_i) \neq 0 \quad f^{(p)}(x_i) = 0$$
$$F_{p-1}(x_i) > 0.$$

Quant à $F_p(x_i) = r_p\,[f^{(p)}(x_i)]^2 - r_{p-1}\,f^{(p-1)}(x_i)\,f^{(p+1)}(x_i) = -\,r_{p-1}\,f^{(p-1)}(x_i)\,f^{(p+1)}(x_i)$, si elle est différente de zéro, il faut que

$$f^{(p+1)}(x_i) \neq 0 \text{ d'où } F_{p+1}(x_i) = r_{p+1}\,[f^{(p+1)}(x_i)]^2 > 0,$$

et le groupe ne serait composé que de trois couples et rentrerait dans la sous-catégorie IIa.

Il faut donc supposer ici $F_p(x_i) = 0$, ce qui entraîne $f^{(p+1)}(x_i) = 0$, puis

$$F_{p+1}(x_i) = r_{p+1}\,[f^{(p+1)}(x_i)]^2 - r_p\,f^{(p)}(x_i)\,f^{(p+2)}(x_i) = 0.$$

Si on suppose $f^{(p+2)}(x_i) \neq 0$, alors

$$F_{p+2}(x_i) = r_{p+2}\,[f^{(p+2)}(x_i)]^2 - r_{p+1}\,f^{(p+1)}(x_i)\,f^{(p+3)}(x_i) =$$
$$= r_{p+2}\,[f^{(p+2)}(x_i)]^2 > 0$$

et le groupe est composé de quatre couples.

Si $f^{(p+2)}(x_i) = 0$, on a aussi $F_{p+2}(x_i) = 0$; et, ainsi de suite.

On reconnait que tous les éléments d'un groupe de IIb sont nuls, à l'exception de ceux des couples extrêmes.

Par exemple:

$$f^{(p-1)}(x_i) \neq 0 \;\; f^{(p)}(x_i) = f^{(p+1)}(x_i) = \ldots = f^{(p+r-1)}(x_i) = 0 \;\; f^{(p+r)}(x_i) \neq 0$$
$$F_{p-1}(x_i) > 0 \;\; F_p(x_i) = F_{p+1}(x_i) = \ldots = F_{p+r-1}(x_i) = 0 \;\; F_{p+r}(x_i) > 0.$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-2)$$
$$r = 2, 3, \ldots, (n-p)$$
$$i = 1, 2, \ldots, k.$$

Catégorie III.

Pour les groupes de cette catégorie, le premier élément du premier couple intermédiaire est différent de zéro. On a donc:

$$f^{(p-1)}(x_i) \neq 0 \qquad f^{(p)}(x_i) \neq 0$$
$$F_{p-1}(x_i) \neq 0.$$

En vertu de la loi de formation des groupes $g_i^{(l)}$, il faut qu'un élément au moins du ou des couples intermédiaires soit nul. Il faut donc, dans ce cas, que

$$F_p(x_i) = r_p[f^{(p)}(x_i)]^2 - r_{p-1} f^{(p-1)}(x_i) \cdot f^{(p+1)}(x_i) = 0$$

ce qui entraîne, puisque $f^{(p)}(x_i) \neq 0$,

$$f^{(p+1)}(x_i) \neq 0.$$

Si $F_{p+1}(x_i)$ est différent de zéro, le groupe se compose alors de trois couples.

$F_{p+1}(x_i) = 0$, entraîne $f^{(p+2)}(x_i) \neq 0$, et ainsi de suite.

On reconnaît donc, que tous les éléments du groupe sont différents de zéro, à l'exception des seconds éléments de tous les couples intermédiaires.

Par exemple :

$$f^{(p-1)}(x_i) \neq 0 \ f^{(p)}(x_i) \neq 0 \ f^{(p+1)}(x_i) \neq 0 \ldots f^{(p+r-1)}(x_i) \neq 0 \ f^{(p+r)}(x_i) \neq 0$$
$$F_{p-1}(x_i) \neq 0 \ F_p(x_i) = F_{p+1}(x_i) = \ldots = F_{p+r-1}(x_i) = 0 \ F_{p+r}(x_i) \neq 0$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$r = 1, 2, \ldots, (n-p)$$
$$i = 1, 2, \ldots, k.$$

Tous les groupes $g_i^{(l)}$ rentrent dans l'une de ces catégories ; il ne peut pas se présenter d'autres alternatives.

On sait que pour évaluer $v\text{P}(a) - v\text{P}(b)$, il faut avant tout déterminer $\delta[g_i^{(l)}]$, et on reconnaît maintenant qu'il suffit de calculer $\delta[g_i^{(l)}]$ pour quatre groupes seulement, représentant les catégories précédentes.

Sans l'avoir spécialement formulée, on a pourtant fait la supposition que pour $x = a$ et $x = \text{b}$, aucune des fonctions f, aucune des fonctions F ne s'annule. On peut se débarrasser de cette restriction.

Posons :

$$\delta[g_i^{(l)}] = \delta_1[g_i^{(l)}] + \delta_2[g_i^{(l)}].$$

$\delta_1[g_i^{(l)}]$ est la différence des variations-permanences, par rapport au groupe $g_i^{(l)}$, pour $(x_i - h)$ et x_i ; $\delta_2[g_i^{(l)}]$ est la différence des variations-permanences, par rapport au même groupe $g_i^{(l)}$, pour x_i et $(x_i + h)$.

Il est évident qu'on aura alors:

$$v\mathrm{P}(a)-v\mathrm{P}(b)=\sum_{l'}^{1\ldots m'}\delta_2[g_a^{(l')}]+\sum_{i}^{1\ldots k}\sum_{l}^{1\ldots m}\delta[g_i^{(l)}]+\sum_{l''}^{1\ldots m''}\delta_1[g_b^{(l'')}].$$

$g_a^{(l')}$ étant l'un des m' groupes g que présente la double série :

$$\left.\begin{matrix} f(a), & f'(a), & f''(a), & \ldots, & f^{(n)}(a) \\ \mathrm{F}_0(a), & \mathrm{F}_1(a), & \mathrm{F}_2(a), & \ldots, & \mathrm{F}_n(a) \end{matrix}\right\}$$

$g_b^{(l'')}$ se définirait d'une manière analogue.

L'objet des calculs des chapitres suivants est précisément la détermination des $\delta_1[g_i^{(l)}]$ et des $\delta_2[g_i^{(l)}]$, qui conduira aux théorèmes de Sylvester.

Remarque.

A l'avenir, dans les séries (1), on négligera l'argument x, et par raison de symétrie, on posera:

$$f(x)=f_0,\ f'(x)=f_1,\ f''(x)=f_2,\ldots,f^{(p)}(x)=f_p,\ldots,f^{(n)}(x)=f_n.$$
$$\mathrm{F}_0(x)=\mathrm{F}_0,\mathrm{F}_1(x)=\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_2(x)=\mathrm{F}_2,\ldots,\mathrm{F}_p(x)=\mathrm{F}_p,\ldots,\mathrm{F}_n(x)=\mathrm{F}_n.$$

§ 4.

Enoncé des théorèmes de Sylvester.

Les théorèmes, qu'il s'agit de démontrer dans toute leur généralité, peuvent s'énoncer de la façon suivante:

Premier théorème de Sylvester.

Soit N le nombre de racines de l'équation algébrique à coefficients réels du $n^{ème}$ degré

$$f(x)=0 \quad ,$$

qui appartiennent à l'intervalle réel

$$a<x\leqq b.$$

Chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

Formons les deux séries de fonctions suivantes :

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_n$$
$$\mathrm{F}_0,\ \mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}_2,\ \ldots,\ \mathrm{F}_n$$

où les fonctions sont définies comme suit:

a) $f_0 = f(x) \quad f_p = f^{(p)}(x) \quad p = 1, 2, \ldots, n.$

b) $F_0 = f_0^2 \quad F_p = r_p f_p^2 - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+1} \quad F_n = f_n^2$

$$p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

où les quantités r_p sont des constantes positives, dont l'expression générale est

$$\underline{r_p = r_0 + \alpha . p} \qquad p = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

$r_0 > 0$ absolument arbitraire

$\alpha \geqq \frac{-r_0}{n}$ rationnel ou irrationnel.

Soit alors $v\mathrm{P}(x)$ le nombre de variations-permanences que présentent les deux séries

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$$
$$F_0,\ F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$$

avec les conventions exposées précédemment au sujet des zéros.

On a la formule

$$\underline{\underline{N = v\mathrm{P}(a) - v\mathrm{P}(b) - 2\mu.}}$$

μ étant un nombre entier non-négatif.

Deuxième théorème de Sylvester.

Soit N' le nombre de racines de l'équation algébrique à coefficients réels du $n^{ème}$ degré

$$f(x) = 0,$$

qui appartiennent à l'intervalle réel

$$a \leqq x < b.$$

Chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

Soit $p\mathrm{P}(x)$, le nombre de permanences-permanences que présentent les deux séries

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$$
$$F_0,\ F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$$

où les fonctions sont définies comme ci-dessus, et avec les conventions exposées précédemment au sujet des zéros.

On a alors la formule:

$$\underline{\underline{N' = p\mathrm{P}(b) - p\mathrm{P}(a) - 2\mu'.}}$$

μ' étant un nombre entier non-négatif.

CHAPITRE II

$$\alpha > \frac{-r_0}{n}$$

Dans ce chapitre, les constantes r_p sont données par

$$r_p = r_0 + \alpha p \qquad \alpha > \frac{-r_0}{n} \qquad p = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Aucune fonction F ne peut être identiquement nulle.

On pose, par définition,

$$r_n = r_0 + \alpha n \qquad r_n > 0$$

et les fonctions F peuvent, dans ce chapitre, être définies comme suit:

$$F_0 = f_0^2 \quad F_p = r_p f_p^2 - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+1}$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-1), n.$$

r_n étant positif, il importe peu pour notre étude que $F_n = f_n^2$ ou $F_n = r_n f_n^2$ $(f_{n+1} = 0)$.

Il faut déterminer

$$\delta_1[g] = vP(x-h) - vP(x)$$
$$\text{et } \delta_2[g] = vP(x) - vP(x+h)$$

(on supprimera l'indice à x)

pour les quatre groupes g suivants, représentant les catégories établies au chapitre premier.

1.
$$f_{p-1} \neq 0 \quad f_p = 0 \quad f_{p+1} \neq 0$$
$$F_{p-1} > 0 \quad F_p \neq 0 \quad F_{p+1} > 0$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

2.
$$f_{p-1} \neq 0 \quad f_p = f_{p+1} = \ldots = f_{p+r-1} = 0 \quad f_{p+r} \neq 0$$
$$F_{p-1} \neq 0 \quad F_p = F_{p+1} = \ldots = F_{p+r-1} = 0 \quad F_{p+r} \neq 0$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-2)$$
$$r = 2, 3, \ldots, (n-p).$$

3.
$$f_0 = f_1 = f_2 = \ldots = f_{r-1} = 0 \quad f_r \neq 0$$
$$F_0 = F_1 = F_2 = \ldots = F_{r-1} = 0 \quad F_r \neq 0$$
$$r = 1, 2, \ldots, n.$$

4. $f_{p-1} \neq 0 \; f_p \neq 0 \; f_{p+1} \neq 0 \ldots f_{p+r-1} \neq 0 \; f_{p+r} \neq 0$

$$F_{p-1} \neq 0 \; F_p = F_{p+1} = \ldots = F_{p+r-1} = 0 \; F_{p+r} \neq 0$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$r = 1, 2, \ldots, (n-p).$$

§ 1.

$$f_{p-1} \neq 0 \quad f_p = 0 \quad f_{p+1} \neq 0.$$

On suppose que, parmi les fonctions

$$f_0, f_1, \ldots, f_n,$$

on ait

$$f_{p-1} \neq 0 \; f_p = 0 \; f_{p+1} \neq 0 \qquad p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

pour une certaine valeur x $(a \leq x \leq b)$; et on examine ce que sont les fonctions

$$\left.\begin{matrix} f_{p-1}, f_p, f_{p+1} \\ F_{p-1}, F_p, F_{p+1} \end{matrix}\right\} g.$$

pour $(x-h)$, x et $(x+h)$, quant aux signes.

La formule de Taylor donne:

$$f_p(x+h) = f_p + h\, f_{p+1} + \frac{h^2}{2} f_{p+2} + \ldots$$

or $f_p = 0$, donc

$$f_p(x+h) = h\, f_{p+1} + \frac{h^2}{2} f_{p+2} + \ldots$$

On choisit h très petit, de telle sorte qu'on peut se borner à écrire le premier terme du développement suivant les puissances croissantes de h, celui qui donne son signe à la fonction; de même $f_{p-1}(x \pm h)$ et $f_{p+1}(x \pm h)$ conservent le même signe que f_{p-1} et f_{p+1}.

Rappelons que

$$F_{p-1} = r_{p-1}\,[f_{p-1}]^2 - r_{p-2}\, f_{p-2}\, f_p$$
$$F_p = r_p\, f_p^2 - r_{p-1}\, f_{p-1}\, f_{p+1}$$
$$F_{p+1} = r_{p+1}\,[f_{p+1}]^2 - r_p\, f_p\, f_{p+2} \quad p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

(pour $p = 1$, on a, par définition,

$$r_{p-2} = r_{-1} = 0 \text{ et } f_{p-2} = f_{-1} = 0).$$

Pour $(x+h)$, on peut former le tableau suivant, en écrivant les fonctions uniquement quant aux signes, ce qui seul, pour cette étude, est intéressant :

$f_{p-1}(x+h)$	f_{p-1}	$r_{p-1}[f_{p-1}]^2 - h[\ldots\ldots]$	$F_{p-1}(x+h)$
$f_p(x+h)$	$h\,f_{p+1}$	$r_p h^2 [f_{p+1}]^2 - r_{p-1} f_{p-1}\cdot f_{p+1}$	$F_p(x+h)$
$f_{p+1}(x+h)$	f_{p+1}	$r_{p+1}[f_{p+1}]^2 - h[\ldots\ldots]$	$F_{p+1}(x+h)$

ou encore, plus simplement,

$f_{p-1}(x+h)$	f_{p-1}	>0	$F_{p-1}(x+h)$
$f_p(x+h)$	$h\,f_{p+1}$	$-f_{p-1}\cdot f_{p+1}$	$F_p(x+h)$
$f_{p+1}(x+h)$	f_{p+1}	>0	$F_{p+1}(x+h)$.

Remarquons que, dans ces tableaux, comme du reste dans les suivants, h est une quantité très petite *quelconque*, tandis que, dans les expressions $v\mathrm{P}(x+h)$, $v\mathrm{P}(x-h)$, dont nous allons nous occuper, h désigne une quantité très petite *positive*.

Déterminons $v\mathrm{P}(x+h)$, $v\mathrm{P}(x-h)$, puis $v\mathrm{P}(x)$.

$$v\mathrm{P}(x+h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1}\cdot f_{p+1}]}{2}\cdot\frac{1 - sign\,[f_{p-1}\cdot f_{p+1}]}{2}$$

sign $[r]$ a ici, comme dans la suite du reste, la valeur $+1$, lorsque r est positif ou $\oplus$, et la valeur -1, lorsque r est négatif ou $\ominus$.

$$v\mathrm{P}(x+h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1}\cdot f_{p+1}]}{2} \qquad (1).$$

$$v\mathrm{P}(x-h) = \frac{1 + sign\,[f_{p-1}\cdot f_{p+1}]}{2}\cdot\frac{1 - sign\,[f_{p-1}\cdot f_{p+1}]}{2} + \frac{1 - sign\,[f_{p-1}\cdot f_{p+1}}{2}$$

$$v\mathrm{P}(x-h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1}\cdot f_{p+1}]}{2} \qquad (2).$$

Pour x lui-même, on a

$$\begin{array}{ccc} f_{p-1} & 0 & f_{p+1} \\ r_{p-1}[f_{p-1}]^2 & -r_{p-1} f_{p-1}\cdot f_{p+1} & r_{p+1}[f_{p+1}]^2 \end{array}$$

ou, en tenant compte uniquement des signes, et en faisant usage des conventions au sujet des zéros :

$$\begin{array}{ccc} f_{p-1} & f_{p+1} & f_{p+1} \\ + & - \ f_{p-1} \cdot f_{p+1} & + \end{array}$$

d'où $$vP(x) = \frac{1 - sign[f_{p-1} \cdot f_{p+1}]}{2} \cdot \frac{1 - sign[f_{p-1} \cdot f_{p+1}]}{2}$$

$$vP(x) = \frac{1 - sign[f_{p-1} \cdot f_{p+1}]}{2} \quad (3).$$

Des expressions (1), (2) et (3), on conclut :

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1[g] = vP(x-h) - vP(x) = 0 \\ \delta_2[g] = vP(x) - vP(x+h) = 0 \end{array}\right\} .$$

Ainsi, pour un point x, qui n'est que racine simple d'une ou de plusieurs fonctions f intermédiaires, le passage par zéro de ces fonctions n'a aucune influence sur la fonction $vP(x)$.

§ 2

$$f_{p-1} \neq 0 \ f_p = f_{p+1} = \ldots = f_{p+r-1} = 0 \ f_{p+r} \neq 0.$$

On suppose que, parmi les fonctions

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n,$$

on ait

$$f_{p-1} \neq 0 \ f_p = f_{p+1} = \ldots = f_{p+r-1} = 0 \ f_{p+r} \neq 0$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-2)$$
$$r = 2, 3, \ldots, (n-p)$$

pour une valeur bien déterminée x, $(a \leq x \leq b)$; et on examine ce que deviennent les fonctions

$$\left.\begin{array}{l} f_{p-1}, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{p+r-1}, f_{p+r} \\ F_{p-1}, F_p, F_{p+1}, \ldots, F_{p+r-1}, F_{p+r} \end{array}\right\} g.$$

pour $(x+h)$, $(x-h)$ et x ; et, comme c'est le signe de ces fonctions qui est avant tout intéressant, on se borne à écrire le premier terme du développement suivant les puissances croissantes de h, étant donné que pour des valeurs suffisamment petites de h, le premier terme donne son signe à la fonction.

D'après Taylor, on a

$$f_p(x+h)=f_p+\frac{h}{1!}f_{p+1}+\frac{h^2}{2!}f_{p+2}+\ldots+\frac{h^r}{r!}f_{p+r}+\ldots$$

$$f_{p+1}(x+h)=f_{p+1}+\frac{h}{1!}f_{p+2}+\frac{h^2}{2!}f_{p+3}+\ldots+\frac{h^{r-1}}{(r-1)!}f_{p+r}+\ldots$$

. . . .

$$f_{p+r-2}(x+h)=f_{p+r-2}+\frac{h}{1!}f_{p+r-1}+\frac{h^2}{2!}f_{p+r}+\ldots$$

$$f_{p+r-1}(x+h)=f_{p+r-1}+\frac{h}{1!}f_{p+r}+\ldots$$

mais $f_p=f_{p+1}=\ldots=f_{p+r-1}=0$; donc

$$f_p(x+h)=\frac{h^r}{r!}f_{p+r}+\ldots$$

$$f_{p+1}(x+h)=\frac{h^{r-1}}{(r-1)!}f_{p+r}+\ldots$$

. . . .

$$f_{p+r-2}(x+h)=\frac{h^2}{2!}f_{p+r}+\ldots$$

$$f_{p+r-1}(x+h)=h\,.\,f_{p+r}+\ldots$$

Pour les F, rappelons que

$$F_p=r_p f_p^2-r_{p-1}f_{p-1}f_{p+1}$$

On peut former le tableau suivant:

$f_{p-1}(x+h)$	$f_{p-1}+\ldots$	$r_{p-1}\,[f_{p-1}]^2+\ldots$	$F_{p-1}(x+h)$
$f_p(x+h)$	$\frac{h^r}{r\,!}\,f_{p+r}+\ldots$	$r_p\left[\left(\frac{h^r}{r\,!}\right)^2[f_{p+r}]^2+\ldots\right]-r_{p-1}\left[\frac{h^{r-1}}{(r-1)\,!}\,f_{p-1}\,f_{p+r}+\ldots\right]$	$F_p(x+h)$
$f_{p+1}(x+h)$	$\frac{h^{r-1}}{(r-1)\,!}f_{p+r}+\ldots$	$r_{p+1}\left[\left(\frac{h^{r-1}}{(r-1)\,!}\right)^2[f_{p+r}]^2+\ldots\right]-r_p\left[\frac{h^{2r-2}}{r\,!\,(r-2)\,!}\,[f_{p+r}]^2+\ldots\right]$	$F_{p+1}(x+h)$
$f_{p+2}(x+h)$	$\frac{h^{r-2}}{(r-2)\,!}f_{p+r}+\ldots$	$r_{p+2}\left[\left(\frac{h^{r-2}}{(r-2)\,!}\right)^2[f_{p+r}]^2+\ldots\right]-r_{p+1}\left[\frac{h^{2r-4}}{(r-1)\,!\,(r-3)\,!}[f_{p+r}]^2+\ldots\right]$	$F_{p+2}(x+h)$
. . . . .	. . . . . .	. . . .	. . . . .
$f_{p+r-2}(x+h)$	$\frac{h^2}{2\,!}\,f_{p+r}+\ldots$	$r_{p+r-2}\left[\frac{h^4}{4}\,[f_{p+r}]^2+\ldots\right]-r_{p+r-3}\left[\frac{h^4}{3\,!}\,[f_{p+r}]^2+\ldots\right]$	$F_{p+r-2}(x+h)$
$f_{p+r-1}(x+h)$	$h\,f_{p+r}+\ldots$	$r_{p+r-1}\left[h^2\,[f_{p+r}]^2+\ldots\right]-r_{p+r-2}\left[\frac{h^2}{2\,!}\,[f_{p+r}]^2+\ldots\right]$	$F_{p+r-1}(x+h)$
$f_{p+r}(x+h)$	$f_{p+r}+\ldots$	$r_{p+r}\,.\,[f_{p+r}]^2+\ldots$	$F_{p+r}(x+h)$

On peut faire les remarques suivantes au sujet des fonctions F de ce tableau :

a) L'expression de $F_p(x+h)$ contient un terme en h^{2r} et un terme en h^{r-1} ; on peut négliger le terme en h^{2r}, h étant suffisamment petit.

b) Les fonctions

$$F_{p+1}(x+h),\ F_{p+2}(x+h),\ \ldots,\ F_{p+r-1}(x+h)$$

peuvent s'écrire :

$$F_{p+i}(x+h)=r_{p+i}\left[\left(\frac{h^{r-i}}{(r-i)!}\right)^2[f_{p+r}]^2+\ldots\right]-$$

$$-r_{p+i-1}\left[\frac{h^{2r-2i}}{(r-i+1)!(r-i-1)!}[f_{p+r}]^2+\ldots\right]$$

$$p=1,2,\ldots,(n-2)$$
$$r=2,3,\ldots,(n-p)$$
$$i=1,2,\ldots,(r-1)\qquad(0!=1)$$

$$F_{p+i}(x+h)=\frac{h^{2(r-i)}}{(r-i)!(r-i-1)!}[f_{p+r}]^2\left[\frac{r_{p+i}}{r-i}-\frac{r_{p+i-1}}{r-i+1}\right]+\ldots$$

$$F_{p+i}(x+h)=\frac{h^{2(r-i)}}{(r-i)!(r-i-1)!}[f_{p+r}]^2\frac{1}{(r-i)(r-i+1)}\cdot$$
$$\cdot[r_{p+i}(r-i+1)-r_{p+i-1}(r-i)]+\ldots$$

mais
$$\left.\begin{aligned}r_{p+i}&=r_0+\alpha(p+i)\\ r_{p+i-1}&=r_0+\alpha(p+i-1)\end{aligned}\right\}$$

car
$$(p+i)_{max}=n-1$$
$$\text{et }(p+i-1)_{min}=1.$$

$$F_{p+i}(x+h)=\frac{h^{2(r-i)}}{(r-i)!(r-i-1)!}[f_{p+r}]^2\frac{1}{(r-i)(r-i+1)}\cdot$$
$$\cdot[r_0+\alpha(p+r)]+\ldots$$

mais
$$(p+r)_{max}=n$$
$$\text{et }(p+r)_{min}=3$$

donc
$$r_0+\alpha(p+r)=r_{p+r}>0.$$

d'après l'hypothèse en vigueur dans ce chapitre.

Ainsi, on reconnaît que, pour h suffisamment petit,

$$F_{p+i}(x+h)>0 \qquad \begin{array}{l} p=1,2,\ldots,(n-2) \\ r=2,3,\ldots,(n-p) \\ i=1,2,\ldots,(r-1). \end{array}$$

quel que soit le signe de h.

On peut écrire à nouveau, le tableau précédent qui devient, en négligeant les facteurs positifs :

$f_{p-1}(x+h)$	f_{p-1}	>0	$F_{p-1}(x+h)$
$f_p(x+h)$	$h^r f_{p+r}$	$-h^{r-1} f_{p-1} f_{p+r}$	$F_p(x+h)$
$f_{p+1}(x+h)$	$h^{r-1} f_{p+r}$	>0	$F_{p+1}(x+h)$
$f_{p+2}(x+h)$	$h^{r-2} f_{p+r}$	>0	$F_{p+2}(x+h)$
. . . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
$f_{p+r-2}(x+h)$	$h^2 f_{p+r}$	>0	$F_{p+r-2}(x+h)$
$f_{p+r-1}(x+h)$	$h f_{p+r}$	>0	$F_{p+r-1}(x+h)$
$f_{p+r}(x+h)$	f_{p+r}	>0	$F_{p+r}(x+h)$.

Déterminons $vP(x+h)$, $vP(x-h)$ et $vP(x)$.

$$vP(x+h)=\frac{1-sign[h^r f_{p-1}f_{p+r}]}{2}\cdot\frac{1-sign\,[h^{r-1} f_{p-1} f_{p+r}]}{2}+$$

$$+\frac{1-sign\,[h^{2r-1}]}{2}\cdot\frac{1-sign[h^{r-1} f_{p-1} f_{p+r}]}{2}+\frac{1-sign[h^{2r-3}]}{2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1-sign\,[h^3]}{2}+\frac{1-sign\,[h]}{2}.$$

$$vP(x+h)=\frac{1-sign\,[f_{p-1} f_{p+r}]}{2}.$$

$$vP(x-h)=\frac{1-sign[(-1)^r f_{p-1}f_{p+r}]}{2}\cdot\frac{1-sign[(-1)^{r-1} f_{p-1} f_{p+r}]}{2}+$$

$$+\frac{1-sign[(-1)^{r-1} f_{p-1} f_{p+r}]}{2}+r-1.$$

$$vP(x-h)=\frac{1-sign[(-1)^{r-1}f_{p-1} f_{p+r}]}{2}+r-1.$$

Il faut faire une distinction suivant que r est pair ou impair.

r pair.

$$r = 2\nu \qquad \nu \geqq 1.$$

$$vP(x+h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1} f_{p+r}]}{2}$$

$$vP(x-h) = \frac{1 + sign\,[f_{p-1} f_{p+r}]}{2} + 2\nu - 1.$$

Pour x lui-même, les séries se présentent comme suit :

$$\begin{array}{cccccccccc} f_{p-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & f_{p+r} \\ r_{p-1}[f_{p-1}]^2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & r_{p+r}[f_{p+r}]^2. \end{array}$$

Eu égard uniquement aux signes, et d'après les conventions, elles deviennent :

$$\begin{array}{ccccccccc} f_{p-1} & f_{p+r} & f_{p+r} & f_{p+r} & \ldots & f_{p+r} & f_{p+r} & f_{p+r} & f_{p+r} \\ + & \oplus & \ominus & \oplus & \ldots & \ominus & \oplus & \ominus & + \end{array}$$

d'où $\qquad vP(x) = \dfrac{1 - sign\,[f_{p-1} f_{p+r}]}{2}.$

et enfin,

$$vP(x-h) - vP(x) = \frac{1 + sign\,[f_{p-1} f_{p+r}]}{2} - \frac{1 - sign\,[f_{p-1} f_{p+r}]}{2} + 2\nu - 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} vP(x-h) - vP(x) = 2\nu' \\ vP(x) - vP(x+h) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{où} \quad \nu' = \left\{\begin{array}{l} \nu \\ \nu - 1 \end{array}\right. \qquad \nu' \geqq 0.$$

r impair.

$$r = 2\bar{\nu} + 1 \qquad \bar{\nu} \geqq 1.$$

$$vP(x+h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1} f_{p+r}]}{2}$$

$$vP(x-h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1} f_{p+r}]}{2} + 2\bar{\nu}.$$

On fera une distinction, suivant que

$$sign\,[f_{p-1}f_{p+r}] = +1 \qquad \text{ou}$$
$$sign\,[f_{p-1}f_{p+r}] = -1.$$

a) $$sign\,[f_{p-1}f_{p+r}] = +1.$$

$$vP(x+h) = 0$$
$$vP(x-h) = 2\bar{\nu}.$$

Pour x, les séries sont :

$$\begin{array}{ccccccccc} f_{p-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & f_{p+r} \\ r_{p-1}[f_{p-1}]^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & r_{p+r}[f_{p+r}]^2 \end{array}$$

et d'après les conventions,

$$\begin{array}{cccccccc} f_{p-1} & f_{p+r} & f_{p+r} & f_{p+r} & \dots & f_{p+r} & f_{p+r} & f_{p+r} \\ + & \ominus & \oplus & \ominus & \dots & \oplus & \ominus & + \end{array}$$

$$vP(x) = 0.$$

donc, $$\left.\begin{array}{l} vP(x-h) - vP(x) = 2\bar{\nu} \\ vP(x) - vP(x+h) = 0 \end{array}\right\} \quad \bar{\nu} \geqq 1.$$

b) $$sign\,[f_{p-1}f_{p+r}] = -1.$$

$$vP(x+h) = 1$$
$$vP(x-h) = 2\bar{\nu} + 1.$$

Pour x, les fonctions deviennent, quant aux signes et d'après les conventions :

$$\begin{array}{cccccccc} f_{p-1} & f_{p+r} & f_{p+r} & f_{p+r} & \dots & f_{p+r} & f_{p+r} & f_{p+r} \\ + & \oplus & \oplus & \ominus & \dots & \oplus & \ominus & + \end{array}$$

$$vP(x) = 1.$$

donc, $$\left.\begin{array}{l} vP(x-h) - vP(x) = 2\bar{\nu} \\ vP(x) - vP(x+h) = 0 \end{array}\right\} \quad \bar{\nu} \geqq 1.$$

En résumé, on voit que, quel que soit r, pair ou impair,

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1[g] = vP(x-h) - vP(x) = 2\lambda \\ \delta_2[g] = vP(x) - vP(x+h) = 0 \end{array}\right\} \quad \lambda \geqq 0.$$

§ 3.

$$f_0 = f_1 = f_2 = \ldots = f_{r-1} = 0 \; f_r \neq 0.$$

On suppose que, parmi les fonctions

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n,$$

on ait, pour une certaine valeur x, $(a \leq x \leq b)$

$$f_0 = f_1 = f_2 = \ldots = f_{r-1} = 0 \; f_r \neq 0$$
$$r = 1, 2, \ldots, n.$$

et, on examine ce que deviennent les fonctions

$$\left.\begin{matrix} f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}, f_r \\ F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}, F_r \end{matrix}\right\} g.$$

pour $(x+h)$, $(x-h)$ et x, quant aux signes.

On peut se servir des calculs précédents du § 2; il suffit de faire

$$p = 0 \text{ et } f_{p-1} \equiv 0.$$

Le tableau des fonctions, pour $(x+h)$, de la page 105, devient, en se souvenant que

$$F_0 > 0 \text{ lorsque } f_0 \neq 0:$$

$f_0(x+h)$	$h^r f_r$	> 0	$F_0(x+h)$
$f_1(x+h)$	$h^{r-1} f_r$	> 0	$F_1(x+h)$
$f_2(x+h)$	$h^{r-2} f_r$	> 0	$F_2(x+h)$
. . . .	. . .	. . . . . .	. . . . .
$f_{r-2}(x+h)$	$h^2 f_r$	> 0	$F_{r-2}(x+h)$
$f_{r-1}(x+h)$	$h f_r$	> 0	$F_{r-1}(x+h)$
$f_r(x+h)$	f_r	> 0	$F_r(x+h)$

Déterminons $v\mathrm{P}(x+h)$, $v\mathrm{P}(x-h)$, puis $v\mathrm{P}(x)$.

$$v\mathrm{P}(x+h) = \frac{1 - sign[h^{2r-1}]}{2} + \frac{1 - sign[h^{2r-3}]}{2} + \ldots + \frac{1 - sign[h]}{2}.$$

$$v\mathrm{P}(x+h) = 0$$

$$v\mathrm{P}(x-h) = r.$$

Pour x lui-même, les fonctions deviennent :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & f_r \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & r_r f_r^2 \end{array}$$

D'après les conventions, il faut, dans ce cas, faire abstraction des zéros ; donc

$$vP(x) = 0.$$

Pour la suite, il est intéressant de déterminer $pP(x+h)$, $pP(x-h)$ et $pP(x)$.

$$pP(x+h) = \frac{1+sign[h^{2r-1}]}{2} + \frac{1+sign[h^{2r-3}]}{2} + \ldots + \frac{1+sign[h]}{2}.$$

$$pP(x+h) = r$$
$$pP(x-h) = 0$$
$$pP(x) = 0.$$

En résumé, lorsque, pour x,

$$f_0 = f_1 = f_2 = \ldots = f_{r-1} = 0 \, f_r \neq 0 \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

on a :
$$\left.\begin{array}{l} vP(x-h) - vP(x) = r \\ vP(x) - vP(x+h) = 0 \end{array}\right\}$$

et
$$\left.\begin{array}{l} pP(x+h) - pP(x) = r \\ pP(x) - pP(x-h) = 0 \end{array}\right\}$$

r est l'ordre de multiplicité de la racine considérée x de l'équation $f(x) = 0$.

§ 4.

Théorème auxiliaire.

Lorsque

$$F_{p-1} \neq 0 \quad F_p = F_{p+1} = \ldots = F_{p+r-1} = 0 \quad F_{p+r} \neq 0,$$

on peut toujours supposer maintenant

$$f_{p-1} \neq 0 \quad f_p \neq 0 \quad f_{p+1} \neq 0 \ldots f_{p+r-1} \neq 0 \quad f_{p+r} \neq 0;$$

sinon on serait alors ramené aux cas traités aux paragraphes précédents.

Dans ce chapitre, par définition,

$$F_p = r_p f_p^2 - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+1} \qquad p = 1, 2, \ldots, (n-1), n.$$

Démontrons que la dérivée d'ordre r de F_p, $F_p^{(r)}$, a comme expression

$$\underline{\underline{F_p^{(r)} = \frac{f_p}{f_{p+r}} \cdot F_{p+r}}} \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, \ldots, (n-1) \\ r = 1, 2, \ldots, (n-p) \end{array}$$

pour une valeur x, telle que

$$f_{p-1} \neq 0 \quad f_p \neq 0 \quad f_{p+1} \neq 0 \ \ldots \ f_{p+r-1} \neq 0 \quad f_{p+r} \neq 0$$

et $$F_p = F_p' = F_p'' = \ldots = F_p^{(r-1)} = 0.$$

$$F_p = r_p f_p^2 - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+1} \quad p = 1, 2, \ldots, (n-1), n.$$

$$F_p' = [2 r_p - r_{p-1}] f_p f_{p+1} - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+2}$$

or, $2r_p - r_{p-1} = r_{p+1}$ $\quad p = 1, 2, \ldots, (n-1)$ (dans ce chapitre).

$$F'_p = r_{p+1} f_p f_{p+1} - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+2} \quad p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

$$f_{p+1} \cdot F'_p = r_{p+1} f_p [f_{p+1}]^2 - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+1} f_{p+2} + r_p f_p^2 f_{p+2} - r_p f_p^2 f_{p+2}$$

$$f_{p+1} \cdot F'_p = f_{p+2} \cdot F_p + f_p \cdot F_{p+1}.$$

$$F'_p = \frac{f_{p+2}}{f_{p+1}} F_p + \frac{f_p}{f_{p+1}} F_{p+1}.$$

$$\underline{F'_p = \varphi_p \cdot F_p + \frac{f_p}{f_{p+1}} \cdot F_{p+1}} \quad (1) \qquad p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

en introduisant de nouvelles fonctions, φ_p, définies par la formule,

$$\varphi_p = \frac{f_{p+2}}{f_{p+1}} \quad p = 1, 2, \ldots, (n-1) \quad [f_{n+1} = 0]$$

Il est important de remarquer que les fonctions φ_p, φ_{p+1}, $\ldots$, φ_{p+r-1} sont finies pour la valeur finie x considérée.

On peut dériver l'expression (1) un certain nombre de fois.

Supposons qu'après $(r-2)$ dérivations, on arrive à

$$F_p^{(r-1)} = A \cdot F_p + B \cdot F_{p+1} + \ldots + M \cdot F_{p+r-2} + \frac{f_p}{f_{p+r-1}} F_{p+r-1}$$

$$\begin{array}{l} p = 1, 2, \ldots, (n-r+1) \\ r = 1, 2, \ldots, (n-1), n. \end{array}$$

et supposons, de plus, que A, B, ..., M soient des fonctions rationnelles des $f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{p+r-1}, f_{p+r}$, dont les dénominateurs se présentent comme produits des fonctions f_{p+1}, $f_{p+2}, \ldots, f_{p+r-1}$, toutes différentes de zéro ; donc, ces coefficients ont des valeurs finies pour x. Désignons par A′, B′, ..., M′ les premières dérivées de ces fonctions rationnelles A, B, ..., M ; A′, B′, ..., M′ sont des fonctions rationnelles des $f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{p+r+1}$ dont les dénominateurs se présentent comme produits des fonctions

$$f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_{p+r-1},$$

toutes différentes de zéro.

Ces fonctions sont donc finies pour x.

On peut former $F_p^{(r)}$:

$$F_p^{(r)} = A'.F_p + A.F'_p + B'.F_{p+1} + B.F'_{p+1} + \ldots + M'.F_{p+r-2} + \\ + M.F'_{p+r-2} + \left(\frac{f_p}{f_{p+r-1}}\right)' F_{p+r-1} + \frac{f_p}{f_{p+r-1}}.F'_{p+r-1}$$

$$p = 1, 2, \ldots, (n-r)$$
$$r = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

et, en remplaçant $F'_p, F'_{p+1}, \ldots, F'_{p+r-1}$, par leurs valeurs, tirées de (1), :

$$F_p^{(r)} = A'.F_p + A\left[\varphi_p.F_p + \frac{f_p}{f_{p+1}}.F_{p+1}\right] + B'.F_{p+1} + \\ + B\left[\varphi_{p+1}.F_{p+1} + \frac{f_{p+1}}{f_{p+2}}.F_{p+2}\right] + \ldots + M'.F_{p+r-2} + \\ + M\left[\varphi_{p+r-2} F_{p+r-2} + \frac{f_{p+r-2}}{f_{p+r-1}} F_{p+r-1}\right] + \left(\frac{f_p}{f_{p+r-1}}\right)'.F_{p+r-1} + \\ + \frac{f_p}{f_{p+r-1}}\left[\varphi_{p+r-1} F_{p+r-1} + \frac{f_{p+r-1}}{f_{p+r}} F_{p+r}\right].$$

$$F_p^{(r)} = \left[A' + A.\varphi_p\right] F_p + \left[A\frac{f_p}{f_{p+1}} + B' + B.\varphi_{p+1}\right] F_{p+1} + \\ \left[B\frac{f_{p+1}}{f_{p+2}} + ..\right] F_{p+2} + \ldots + \left[M\frac{f_{p+r-2}}{f_{p+r-1}} + \left(\frac{f_p}{f_{p+r-1}}\right)' + \\ + \frac{f_p}{f_{p+r-1}}\varphi_{p+r-1}\right] F_{p+r-1} + \frac{f_p}{f_{p+r}} F_{p+r}.$$

Désignons les coefficients de F_p, F_{p+1}, .., F_{p+r-1}, par A_1, B_1, .., M_1. Ces coefficients sont des fonctions rationnelles des f_p, f_{p+1}, .., f_{p+r+1}, dont les dénominateurs se présentent comme produits des fonctions f_{p+1}, .., f_{p+r}, toutes différentes de zéro ; ces cofficients ont donc des valeurs finies pour x.

On peut donc écrire :

$$F_p^{(r)} = A_1 . F_p + B_1 . F_{p+1} + \ldots + M_1 . F_{p+r-1} + \frac{f_p}{f_{p+r}} F_{p+r} \quad (2)$$

A_1, B_1, .., M_1 finis pour x

$$p = 1, 2, .., (n-r)$$
$$r = 1, 2, .., (n-1)$$

ou ce qui revient au même

$$p = 1, 2, .., (n-1)$$
$$r = 1, 2, .., (n-p).$$

Or, pour $r=1$, la formule (1) montre que l'expression précédente (2) est valable ; de $r=1$, on passe, à l'aide des considérations précédentes à $r=2$; puis, par induction, de proche en proche, à r quelconque.

$$[1 \leqq r \leqq (n-p) ; 1 \leqq p \leqq (n-1)].$$

Supposons que $F_p = F_p' = 0$; alors

$$F_{p+1} = 0 \quad \text{d'après (1)}$$

de même, $F_p = F_p' = F_p'' = 0$ entraîne $F_{p+2} = 0$.

. . . .

$F_p = F_p' = \ldots = F_p^{(r-1)} = 0$ entraîne $F_p = F_{p+1} = . = F_{p+r-1} = 0$ et ainsi, lorsque pour x,

$$f_{p+1} \neq 0 \ f_p \neq 0 \ f_{p+1} \neq 0 \ .. \ f_{p+r-1} \neq 0 \ f_{p+r} \neq 0$$
$$F_p = F_p' = \ldots = F_p^{(r-1)} = 0$$

$F_p^{(r)}$ devient, d'après (2),

$$\underline{F_p^{(r)} = \frac{f_p}{f_{p+r}} F_{p+r}} \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, .. (n-1) \\ r = 1, 2, .. (n-p) \end{array}$$

§ 5.

$F_{p-1} \neq 0 \; F_p = F_{p+1} = \ldots = F_{p+r-1} = 0 \; F_{p+r} \neq 0.$

On suppose que

$$f_{p-1} \neq 0 \; f_p \neq 0 \; f_{p+1} \neq 0 \ldots f_{p+r-1} \neq 0 \; f_{p+r} \neq 0$$
$$F_{p-1} \neq 0 \; F_p = F_{p+1} = \ldots = F_{p+r-1} = 0 \; F_{p+r} \neq 0.$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$r = 1, 2, \ldots, (n-p).$$

pour une valeur bien déterminée x, $(a \leq x \leq b)$; et on examine ce que deviennent

$$\left.\begin{array}{l} f_{p-1}, \; f_p, \; f_{p+1}, \ldots, f_{p+r-1}, \; f_{p+r} \\ F_{p-1}, F_p, F_{p+1}, \ldots, F_{p+r-1}, F_{p+r} \end{array}\right\} g.$$

quant aux signes, pour $(x+h)$, $(x-h)$ et x.

Il faut remarquer d'abord que

$F_p = r_p f_p^2 - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+1} = 0$, d'où f_{p+1}, même signe f_{p-1}
$F_{p+1} = r_{p+1} [f_{p+1}]^2 - r_p f_p f_{p+2} = 0$, f_{p+2} » » f_p

. . . .

Il y a une distinction à faire, suivant que r est pair ou impair.

r pair.	f_{p+1},	même	signe	que	f_{p-1}
	f_{p+2},	»	»	»	f_p
	f_{p+3},	»	»	»	f_{p-1}
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	f_{p+r-2},	»	»	»	f_p
	f_{p+r-1},	»	»	»	f_{p-1}
	f_{p+r},	»	»	»	f_p.
r impair.	f_{p+1},	même	signe	que	f_{p-1}
	f_{p+2},	»	»	»	f_p
	f_{p+3},	»	»	»	f_{p-1}
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	f_{p+r-2},	»	»	»	f_{p-1}
	f_{p+r-1},	»	»	»	f_p
	f_{p+r},	»	»	»	f_{p-1}.

Quant aux fonctions F, la formule de Taylor donne :

$$F_p(x+h) = F_p + \frac{h}{1!}F_p' + \frac{h^2}{2!}F_p'' + \ldots + \frac{h^r}{r!}F_p^{(r)} + \ldots$$

$$F_{p+1}(x+h) = F_{p+1} + \frac{h}{1!}F'_{p+1} + \frac{h^2}{2!}F''_{p+1} + \ldots + \frac{h^{r-1}}{(r-1)!}F_{p+1}^{(r-1)} + \ldots$$

. . . .

$$F_{p+r-1}(x+h) = F_{p+r-1} + \frac{h}{1!}F'_{p+r-1} + \ldots$$

On sait que

$$F_p = F_{p+1} = \ldots = F_{p+r-1} = 0, \text{ entraîne}$$

$$F_p = F_p' = \ldots = F_p^{(r-1)} = 0$$

$$F_{p+1} = F'_{p+1} = \ldots = F_{p+1}^{(r-2)} = 0$$

. . . .

$$F_{p+r-2} = F'_{p+r-2} = 0$$

$$F_{p+r-1} = 0.$$

On peut appliquer le théorème auxiliaire du § précédent :

$$F_p^{(r)} = \frac{f_p}{f_{p+r}}F_{p+r} \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, \ldots, (n-1) \\ r = 1, 2, \ldots, (n-p). \end{array}$$

On a alors :

$$F_p(x+h) = \frac{h^r}{r!} \cdot \frac{f_p}{f_{p+r}}F_{p+r} + \ldots$$

$$F_{p+1}(x+h) = \frac{h^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{f_{p+1}}{f_{p+r}}F_{p+r} + \ldots$$

. . . .

$$F_{p+r-2}(x+h) = \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{f_{p+r-2}}{f_{p+r}}F_{p+r} + \ldots$$

$$F_{p+r-1}(x+h) = h \cdot \frac{f_{p+r-1}}{f_{p+r}} \cdot F_{p+r} + \ldots$$

Il faut traiter d'une façon tout à fait distincte, les deux cas :

a) r *pair*.

b) r *impair*.

<u>*r pair.*</u>

$$r = 2\nu \qquad \nu \geqq 1.$$

On peut établir le tableau suivant pour $(x+h)$, en supprimant les facteurs positifs :

$f_{p-1}(x+h)$	f_{p-1}	F_{p-1}	$F_{p-1}(x+h)$
$f_p(x+h)$	f_p	$h^r . F_{p+r}$	$F_p(x+h)$
$f_{p+1}(x+h)$	f_{p-1}	$h^{r-1} . F_{p+r} . f_{p-1} f_p$	$F_{p+1}(x+h)$
$f_{p+2}(x+h)$	f_p	$h^{r-2}\, F_{p+r}$	$F_{p+2}(x+h)$
. . . . . .	. . .	. . . .	. . . . . .
$f_{p+r-2}(x+h)$	f_p	$h^2 . F_{p+r}$	$F_{p+r-2}(x+h)$
$f_{p+r-1}(x+h)$	f_{p-1}	$h . F_{p+r} . f_{p-1} f_p$	$F_{p+r-1}(x+h)$
$f_{p+r}(x+h)$	f_p	F_{p+r}	$F_{p+r}(x+h)$

Déterminons $v\mathrm{P}(x+h)$, $v\mathrm{P}(x-h)$, puis $v\mathrm{P}(x)$.

$$v\mathrm{P}(x+h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1} f_p]}{2}\left[\frac{1 + sign\,[h^r\, F_{p-1}\, F_{p+r}]}{2} + \right.$$

$$+ \frac{1 + sign\,[h^{2r-1} f_{p-1} f_p]}{2} + \ldots + \frac{1 + sign\,[h^3 f_{p-1} f_p]}{2} +$$

$$\left. + \frac{1 + sign\,[h\, f_{p-1} f_p]}{2}\right].$$

$$v\mathrm{P}(x+h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1} f_p]}{2} . \frac{1 + sign\,[F_{p-1} . F_{p+r}]}{2}$$

$$v\mathrm{P}(x-h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1} f_p]}{2}\left[\frac{1 + sign\,[F_{p-1} . F_{p+r}]}{2} + r\right].$$

D'après les conventions au sujet des zéros, il faut distinguer deux cas, pour la détermination de $v\mathrm{P}(x)$:

1°) $p=1$; $r=1,2,..,(n-2)$.
$p=2,3,..,(n-1)$; $r=1,2,..,(n-p)$.

2°) $p=1$; $r=n-1$.

1°) $p=1$; $r=1,2,..,(n-2)$.
$p=2,3,..,(n-1)$; $r=1,2,..,(n-p)$.

Pour x, les fonctions se présentent comme suit, abstraction faite de facteurs positifs :

$$\begin{array}{cccccc} f_{p-1}, & f_p, & f_{p-1}, & f_p, & .., & f_{p-1}, \quad f_p \\ F_{p-1}, & 0, & 0, & 0, & .., & 0, \quad F_{p+r} \end{array}$$

et, d'après les conventions :

$$\begin{array}{ccccccc} f_{p-1}, & f_p, & f_{p-1}, & f_p, & .., & f_{p-1}, & f_p \\ F_{p-1}, & F_{p+r}, & -F_{p+r}, & F_{p+r}, & .., & -F_{p+r}, & F_{p+r} \end{array}$$

d'où $\quad vP(x)=\dfrac{1-sign\,[f_{p-1}f_p]}{2}\cdot\dfrac{1+sign\,[F_{p-1}F_{p+r}]}{2}$

et enfin,

$$vP(x-h)-vP(x)=\frac{1-sign[f_{p-1}f_p]}{2}\,.\,r$$

$$\left.\begin{array}{l} vP(x-h)-vP(x)=2\nu' \\ vP(x)-vP(x+h)=0 \end{array}\right\} \qquad \text{où } \nu'=\left\{\begin{array}{l}0\\ \nu\end{array}\right. \quad \nu'\geqq 0.$$

2°) $p=1$; $r=n-1$.

$$vP(x+h)=\frac{1-sign\,[f_0 f_1]}{2} \qquad (F_0>0 \quad F_n>0)$$

$$vP(x-h)=\frac{1-sign\,[f_0 f_1]}{2}\,.\,(r+1)$$

Pour x, les fonctions se présentent comme suit, abstraction faite de facteurs positifs :

$$\begin{array}{l} f_0,\ f_1,\ f_0,\ \ldots,\ f_1,\ f_0,\ f_1 \\ F_0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ F_n. \end{array}$$

et d'après les conventions,

$$\begin{array}{ccccccc} f_0, & f_1, & f_0, & \ldots, & f_1, & f_0, & f_1 \\ +, & \oplus, & \oplus, & \ldots, & \oplus, & \oplus, & +. \end{array}$$

$$vP(x) = \frac{1 - sign\,[f_0 f_1]}{2} \cdot (r+1)$$

donc, $\left.\begin{aligned} vP(x-h) - vP(x) &= 0 \\ vP(x) - vP(x+h) &= 2\nu'' \end{aligned}\right\}$ où $\nu'' = \begin{cases} 0 \\ \nu \end{cases}$ $\nu'' \geqq 0.$

r impair.

$$r = 2\bar{\nu} + 1 \qquad \bar{\nu} \geqq 0.$$

On a le tableau suivant pour $(x+h)$, en supprimant les facteurs positifs.

$f_{p-1}(x+h)$	f_{p-1}	F_{p-1}	$F_{p-1}(x+h)$
$f_p(x+h)$	f_p	$h^r \quad F_{p+r} f_{p-1} f_p$	$F_p(x+h)$
$f_{p+1}(x+h)$	f_{p-1}	$h^{r-1} F_{p+r}$	$F_{p+1}(x+h)$
$f_{p+2}(x+h)$	f_p	$h^{r-2} F_{p+r} f_{p-1} f_p$	$F_{p+2}(x+h)$
. . . . .	. . .	. . . .	. . . . .
$f_{p+r-2}(x+h)$	f_{p-1}	$h^2 \quad F_{p+r}$	$F_{p+r-2}(x+h)$
$f_{p+r-1}(x+h)$	f_p	$h \quad F_{p+r} f_{p-1} f_p$	$F_{p+r-1}(x+h)$
$f_{p+r}(x+h)$	f_{p-1}	F_{p+r}	$F_{p+r}(x+h)$

Calculons $vP(x+h)$, $vP(x-h)$, puis $vP(x)$.

$$vP(x+h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1} f_p]}{2} \left[\frac{1 + sign\,[h^r f_{p-1} f_p F_{p-1} F_{p+r}]}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 + sign\,[h^{2r-1} f_{p-1} f_p]}{2} + \ldots + \frac{1 + sign\,[h f_{p-1} f_p]}{2} \right].$$

$$vP(x+h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1} f_p]}{2} \cdot \frac{1 - sign\,[F_{p-1} F_{p+r}]}{2}.$$

$$vP(x-h) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1} f_p]}{2} \left[\frac{1 + sign\,[F_{p-1} F_{p+r}]}{2} + r \right].$$

Pour la détermination de $vP(x)$, il y a, de nouveau, deux cas à considérer :

1°) $p = 1$; $\qquad r = 1, 2, \ldots, (n-2)$
$\quad p = 2, 3, \ldots, (n-1)$; $\quad r = 1, 2, \ldots, (n-p)$.

Les fonctions deviennent, quant aux signes,

$$\begin{array}{cccccc} f_{p-1}, & f_p, & f_{p-1}, & .., & f_p, & f_{p-1}, \\ \mathrm{F}_{p-1}, & -\mathrm{F}_{p+r}, & \mathrm{F}_{p+r}, & .., & -\mathrm{F}_{p+r}, & \mathrm{F}_{p+r} \end{array}$$

d'où $\quad v\mathrm{P}(x) = \dfrac{1 - sign\,[f_{p-1}\,f_p]}{2} \cdot \dfrac{1 - sign\,[\mathrm{F}_{p-1}\,\mathrm{F}_{p+r}]}{2}$

donc

$$v\mathrm{P}(x-h) - v\mathrm{P}(x) = \frac{1 - sign\,[f_{p-1}\,f_p]}{2}\left[\frac{1 + sign\,[\mathrm{F}_{p-1}\,\mathrm{F}_{p+r}]}{2} + \right.$$

$$\left. + 2\bar{\nu} + 1 - \frac{1 - sign\,[\mathrm{F}_{p-1}\,\mathrm{F}_{p+r}]}{2}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} v\mathrm{P}(x-h) - v\mathrm{P}(x) = 2\bar{\nu}' \\ v\mathrm{P}(x) - v\mathrm{P}(x+h) = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{où } \bar{\nu}' = \begin{cases} 0 \\ \bar{\nu}+1 \\ \bar{\nu} \end{cases} \bar{\nu}' \geqq 0.$$

2°) $p = 1\,;\ r = n - 1.$

$$v\mathrm{P}(x+h) = 0$$

$$v\mathrm{P}(x-h) = \frac{1 - sign\,[f_0\,f_1]}{2}(r+1).$$

Les fonctions deviennent, quant aux signes:

$$\begin{array}{cccccc} f_0, & f_1, & f_0, & \ldots, & f_1, & f_0 \\ +, & \oplus, & \oplus, & \ldots, & \oplus, & + \end{array}$$

$$v\mathrm{P}(x) = \frac{1 - sign\,[f_0\,f_1]}{2}(r+1).$$

donc, $\left.\begin{array}{l} v\mathrm{P}(x-h) - v\mathrm{P}(x) = 0 \\ v\mathrm{P}(x) - v\mathrm{P}(x+h) = 2\bar{\nu}'' \end{array}\right\} \qquad \text{où } \bar{\nu}'' = \begin{cases} 0 \\ \bar{\nu}+1 \end{cases} \bar{\nu}'' \geqq 0$

En résumé, lorsque

$$\left.\begin{array}{lllll} f_{p-1} \neq 0 & f_p \neq 0 & f_{p+1} \neq 0 \;.. & f_{p+r-1} \neq 0 & f_{p+r} \neq 0 \\ \mathrm{F}_{p-1} \neq 0 & \mathrm{F}_p = & \mathrm{F}_{p+1} = \;..\; = & \mathrm{F}_{p+r-1} = 0 & \mathrm{F}_{p+r} \neq 0 \end{array}\right\} g.$$

$$p = 1, 2, .., (n-1)$$

$$r = 1, 2, .., (n-p).$$

pour une valeur déterminée x, on a

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1[g] = v\mathrm{P}(x-h) - v\mathrm{P}(x) = 2\lambda' \\ \delta_2[g] = v\mathrm{P}(x) - v\mathrm{P}(x+h) = 2\bar{\lambda}' \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \lambda' \geqq 0 \\ \bar{\lambda}' \geqq 0. \end{array}$$

CHAPITRE III

$\alpha = \dfrac{-r_0}{n}.$

Le cas où les constantes r_p sont données par

$$r_p = r_0 + \alpha p \qquad p = 1, 2, .., (n-1)$$

où

$$\alpha = \frac{-r_0}{n},$$

se présente très souvent dans les applications des théorèmes de Sylvester. Il mérite une attention toute particulière, par le fait qu'une ou plusieurs fonctions F peuvent alors être identiquement nulles.

La constante r_n,

$$r_n = r_0 + \alpha n,$$

introduite uniquement pour le chapitre précédent, serait ici

$$r_n = 0.$$

Le plan de ce chapitre est le même que celui du chapitre II; on se servira, dans une large mesure, des calculs effectués dans les pages précédentes.

§ 1.

$f_{p-1} \neq 0 \; f_p = f_{p+1} = \ldots . = f_{p+r-1} = 0 \; f_{p+r} \neq 0.$

Le cas où, pour une valeur déterminée x, $(a \leq x \leq b)$,

$$f_{p-1} \neq 0 \; f_p = 0 \; f_{p+1} \neq 0$$
$$p = 1, 2, .., (n-1)$$

se traiterait absolument de la même manière qu'au § 1 du chapitre précédent; il est inutile d'y revenir.

A la page 103, on a établi le tableau des fonctions

$$f_{p-1}, \; f_p, \; f_{p+1}, \; \ldots, \; f_{p+r-1}, \; f_{p+r}$$
$$F_{p-1}, \; F_p, \; F_{p+1}, \; \ldots, \; F_{p+r-1}, \; F_{p+r}$$
$$p = 1, 2, .., (n-2)$$
$$r = 2, 3, .., (n-p).$$

pour $(x+h)$, évidemment aussi valable dans le cas considéré dans ce chapitre. Il en est de même de la remarque *a*) qui suit ; reprenons la remarque *b*).

b) Les fonctions

$$F_{p+1}(x+h),\ F_{p+2}(x+h),\ \ldots,\ F_{p+r-1}(x+h)$$

peuvent s'écrire :

$$F_{p+i}(x+h) = r_{p+i}\left[\left(\frac{h^{r-i}}{(r-i)!}\right)^2 [f_{p+r}]^2 + \ldots\right] -$$

$$- r_{p+i-1}\left[\frac{h^{2r-2i}}{(r-i+1)!\,(r-i-1)!}[f_{p+r}]^2 + \ldots\right]$$

$$p = 1, 2, \ldots, (n-2)$$
$$r = 2, 3, \ldots, (n-p)$$
$$i = 1, 2, \ldots, (r-1) \qquad (0! = 1)$$

$$F_{p+i}(x+h) = \frac{h^{2(r-i)}}{(r-i)!\,(r-i-1)!}[f_{p+r}]^2\left[\frac{r_{p+i}}{r-i} - \frac{r_{p+i-1}}{r-i+1}\right] + \ldots$$

$$F_{p+i}(x+h) = \frac{h^{2(r-i)}}{(r-i)!\,(r-i-1)!}[f_{p+r}]^2 \frac{1}{(r-i)\,(r-i+1)}\cdot$$
$$\cdot\left[r_{p+i}(r-i+1) - r_{p+i-1}(r-i)\right] + \ldots$$

mais
$$\left.\begin{aligned} r_{p+i} &= r_0 + \alpha\,(p+i) \\ r_{p+i-1} &= r_0 + \alpha(p+i-1) \end{aligned}\right\}$$

car
$$(p+i)_{max} = n-1$$
$$\text{et } (p+i-1)_{min} = 1.$$

$$F_{p+i}(x+h) = \frac{h^{2(r-i)}}{(r-i)!\,(r-i-1)!}[f_{p+r}]^2 \frac{1}{(r-i)(r-i+1)}\cdot$$
$$\cdot\left[r_0 + \alpha\,(p+r)\right] + \ldots$$

Or $\qquad 3 \leqq p + r \leqq n$;

il faut distinguer deux cas :

I. $\qquad 3 \leqq p + r \leqq n-1$

II. $\qquad p + r = n.$

I. $\quad 3 \leqq p + r \leqq n - 1.$

$$r_0 + \alpha(p + r) = r_{p+r} > 0.$$

et, dans ce cas, pour h suffisamment petit,

$$F_{p+i}(x+h) > 0 \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, .., (n-3) \\ r = 2, 3, .., (n-p-1) \\ i = 1, 2, .., (r-1). \end{array}$$

quel que soit le signe de h, et on terminerait de la même façon qu'au chapitre précédent.

II. $\quad p + r = n$

$F_{p+i}(x+h)$ devient

$$F_{p+i}(x+h) = \frac{h^{2(r-i)}}{(r-i)!\,(r-i-1)!} f_n^2 \frac{1}{(r-i)(r-i+1)} [r_0 + \alpha n].$$

Il faut remarquer que, dans ce cas, $F_{p+i}(x+h)$ ne possède qu'un terme, en f_n^2 $(f_{n+1} = f_{n+2} = .. = 0)$.

Or, $\qquad r_0 + \alpha n = 0$

donc $\quad F_{p+i}(x+h) \equiv 0 \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, .., (n-2) \\ r = n - p \\ i = 1, 2, ..., (n-p-1). \end{array}$

ce qui eût été, du reste, facile de prévoir d'après les considérations du § 1 du chapitre premier.

Dans ce cas, le tableau de la page 105 se présente comme suit :

$f_{p-1}(x+h)$		f_{p-1}	> 0	$F_{p-1}(x+h)$
$f_p(x+h)$	h^r	f_n	$-h^{r-1} f_{p-1} f_n$	$F_p(x+h)$
$f_{p+1}(x+h)$	h^{r-1}	f_n	$\equiv 0$	$F_{p+1}(x+h)$
$f_{p+2}(x+h)$	h^{r-2}	f_n	$\equiv 0$	$F_{p+2}(x+h)$
. . . .	. . .		. . . . . .	. . . .
$f_{n-2}(x+h)$	h^2	f_n	$\equiv 0$	$F_{n-2}(x+h)$
$f_{n-1}(x+h)$	h	f_n	$\equiv 0$	$F_{n-1}(x+h)$
$f_n(x+h)$		f_n	> 0	$F_n(x+h)$.

Il faudra faire usage des conventions au sujet des zéros, et distinguer les cas suivant que r est pair ou impair.

r pair.

Le tableau ci-dessus devient, en supprimant les facteurs positifs :

$f_{p-1}(x+h)$	f_{p-1}	>0	$F_{p-1}(x+h)$
$f_p(x+h)$	f_n	$-hf_{p-1}f_n$	$F_p(x+h)$
$f_{p+1}(x+h)$	hf_n	$\ominus$	$F_{p+1}(x+h)$
$f_{p+2}(x+h)$	f_n	$\oplus$	$F_{p+2}(x+h)$
. . . . .	. . .	. . . . .	. . . . .
$f_{n-2}(x+h)$	f_n	$\oplus$	$F_{n-2}(x+h)$
$f_{n-1}(x+h)$	hf_n	$\ominus$	$F_{n-1}(x+h)$
$f_n(x+h)$	f_n	>0	$F_n(x+h)$

Déterminons $v\mathrm{P}(x+h)$, $v\mathrm{P}(x-h)$, puis $v\mathrm{P}(x)$.

$$v\mathrm{P}(x+h)=\frac{1-sign[f_{p-1}f_n]}{2}\cdot\frac{1-sign[hf_{p-1}f_n]}{2}+$$

$$+\frac{1-sign[h]}{2}\cdot\frac{1+sign[hf_{p-1}f_n]}{2}$$

$$v\mathrm{P}(x+h)=\frac{1-sign[f_{p-1}f_n]}{2}.$$

$$v\mathrm{P}(x-h)=\frac{1-sign[f_{p-1}f_n]}{2}.$$

Pour x lui-même, les séries sont

$$\begin{array}{cccccccc} f_{p-1} & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & f_n \\ F_{p-1} & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & F_n \end{array}$$

et, d'après les conventions,

$$\begin{array}{cccccccc} f_{p-1} & f_n & f_n & .. & f_n & f_n & f_n \\ + & \oplus & \ominus & .. & \oplus & \ominus & + \end{array}$$

$$v\mathrm{P}(x)=\frac{1-sign[f_{p-1}f_n]}{2}.$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} v\mathrm{P}(x-h)-v\mathrm{P}(x)=0 \\ v\mathrm{P}(x)-v\mathrm{P}(x+h)=0 \end{array}\right\}.$$

<u>*r impair.*</u>

Le tableau des fonctions devient :

$f_{p-1}(x+h)$	f_{p-1}	>0	$F_{p-1}(x+h)$
$f_p(x+h)$	hf_n	$-f_{p-1}f_n$	$F_p(x+h)$
$f_{p+1}(x+h)$	f_n	$\oplus$	$F_{p+1}(x+h)$
$f_{p+2}(x+h)$	hf_n	$\ominus$	$F_{p+2}(x+h)$
. . . .	. . .	. . . .	. . . .
$f_{n-2}(x+h)$	f_n	$\oplus$	$F_{n-2}(x+h)$
$f_{n-1}(x+h)$	hf_n	$\ominus$	$F_{n-1}(x+h)$
$f_n(x+h)$	f_n	>0	$F_n(x+h)$

Déterminons $vP(x+h)$, $vP(x-h)$, puis $vP(x)$.

$$vP(x+h) = \frac{1-sign\,[h\,f_{p-1}\,f_n]}{2} \cdot \frac{1-sign\,[f_{p-1}\,f_n]}{2} +$$

$$+ \frac{1-sign\,[h]}{2} \cdot \frac{1-sign\,[f_{p-1}\,f_n]}{2}.$$

$$vP(x+h) = \frac{1-sign\,[f_{p-1}\,f_n]}{2}$$

$$vP(x-h) = \frac{1-sign\,[f_{p-1}\,f_n]}{2}.$$

Il faut faire une distinction suivant que

$$a) \quad sign\,[f_{p-1}f_n] = +1$$
$$b) \quad sign\,[f_{p-1}\,f_n] = -1.$$

a) $\quad sign\,[f_{p-1}\,f_n] = +1.$

$$vP(x+h) = 0$$
$$vP(x-h) = 0$$

Pour x lui-même, les séries sont :

$$\begin{array}{cccccccc} f_{p-1} & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & f_n \\ F_{p-1} & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & F_n \end{array}$$

et, d'après les conventions,

$$\begin{array}{cccccccc} f_{p-1} & f_n & f_n & f_n & \cdot\cdot & f_n & f_n & f_n. \\ + & \ominus & \oplus & \ominus & \cdot\cdot & \oplus & \ominus & +. \end{array}$$

$$vP(x) = 0.$$

donc,
$$\left.\begin{array}{l} vP(x-h) - vP(x) = 0 \\ vP(x) - vP(x+h) = 0 \end{array}\right\}.$$

b) $sign\,[f_{p-1} f_n] = -1.$

$$vP(x+h) = 1$$
$$vP(x-h) = 1.$$

Pour x lui-même, et avec les conventions au sujet des zéros, les séries se présentent comme suit:

$$\begin{array}{cccccccc} f_{p-1} & f_n & f_n & f_n & \cdot\cdot & f_n & f_n & f_n. \\ + & \oplus & \oplus & \ominus & \cdot\cdot & \oplus & \ominus & +. \end{array}$$

$$vP(x) = 1.$$

donc
$$\left.\begin{array}{l} vP(x-h) - vP(x) = 0 \\ vP(x) - vP(x+h) = 0 \end{array}\right\}.$$

On reconnaît donc, en résumé, que lorsque $\alpha = \dfrac{-r_0}{n}$, et que, pour une certaine valeur x, $(a \leq x \leq b)$, on a

$$f_{p-1} \neq 0 \;\; f_p = f_{p+1} = \ldots = f_{p+r-1} = 0 \;\; f_{p+r} \neq 0$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$r = 1, 2, \ldots, (n-p).$$

on a aussi
$$\left.\begin{array}{l} vP(x-h) - vP(x) = 2\lambda \\ vP(x) - vP(x+h) = 0 \end{array}\right\} \quad \lambda \geq 0.$$

§ 2.

$f_0 = f_1 = f_2 = \ldots = f_{r-1} = 0 \; f_r \neq 0.$

On peut se baser sur les calculs du paragraphe précédent; il suffit de faire

$$p = 0 \quad \text{et} \quad f_{p-1} \equiv 0.$$

On reconnaît facilement que, lorsque

$$1 \leqq r \leqq n - 1,$$

on a les mêmes considérations qu'au § 3 du chapitre II; tandis que, lorsque

$$r = n,$$

$$F_1 \equiv F_2 \equiv .. \equiv F_{n-1} \equiv 0.$$

Or, d'après les conventions au sujet des zéros, il faut considérer ces zéros-là, comme quantités positives $\oplus$, lorsque

$$f_0 \neq 0 \; f_1 \neq 0 \; .. \; f_{n-1} \neq 0 \; f_n \neq 0 .$$

ce qui aura précisément lieu pour $(x + h)$.

Ainsi, dans le cas où $r = n$, on est aussi ramené aux calculs et aux résultats du § 3 du chapitre II.

§ 3.

Théorème auxiliaire.

Examinons ce que devient le théorème auxiliaire démontré au § 4 du chapitre précédent.

On a, par définition,

$$F_p = r_p f_p^2 - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+1} \qquad p = 1, 2, .., (n-1).$$

On démontrerait de la même façon qu'au paragraphe cité que

$$F_p^{(r)} = \frac{f_p}{f_{p+r}} F_{p+r} \quad (1) \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, .., (n-2) \\ r = 1, 2, .., (n-p-1). \end{array}$$

pour une valeur x, telle que

$$f_{p-1} \neq 0 \; f_p \neq 0 \; ... \; f_{p+r+1} \neq 0 \; f_{p+r} \neq 0$$

$$F_p = F'_p = .. = F_p^{(r-1)} = 0.$$

Il reste à étudier spécialement le cas où

$$\begin{cases} p = 1, 2, .., (n-1) \\ r = n - p. \end{cases}$$

Montrons, tout d'abord, que F_{n-1} est une constante, c'est-à-dire que $F'_{n-1} \equiv 0$.

$$F_{n-1} = r_{n-1}\,[f_{n-1}]^2 - r_{n-2}\,f_{n-2}\,f_n.$$
$$F'_{n-1} = f_{n-1}\,f_n\,[2\,r_{n-1} - r_{n-2}]$$

or, $\quad r_{n-2} = r_0 + \alpha(n-2)$ et $r_{n-1} = r_0 + \alpha(n-1)$

d'où $\quad 2\,r_{n-1} - r_{n-2} = r_0 + \alpha n = 0$, car $\alpha = \dfrac{-r_0}{n}$.

Donc $F'_{n-1} \equiv 0$, et F_{n-1} est une constante.

En s'appuyant sur les considérations du § 4 du chapitre précédent, on peut écrire l'expression suivante, valable aussi pour ce cas,

$$F_p^{(n-p-1)} = A\,.\,F_p + B\,.\,F_{p+1} + \,.\,.\, + M\,.\,F_{n-2} + \frac{f_p}{f_{n-1}}\,.\,F_{n-1}$$
$$p = 1, 2, \,.\,.\,, (n-1).$$

A, B, .., M étant des fonctions finies pour la valeur x considérée.

Dérivons :

$$F_p^{(n-p)} = A\,.\,F'_p + A'\,.\,F_p + \,.\,.\, + M\,.\,F'_{n-2} + \left(\frac{f_p}{f_{n-1}}\right)'\,.\,F_{n-1}.$$

ou, en remplaçant ces dérivées, par l'expression (1) de la page 110, valable aussi dans ce cas, pour $p = 1, 2, \,.\,.\,, (n-2)$,

$$F_p^{(n-p)} = \overline{A}\,.\,F_p + \overline{B}\,.\,F_{p+1} + \,.\,.\, + \overline{M}\,.\,F_{n-2} + \overline{N}\,.\,F_{n-1}. \qquad (2)$$
$$p = 1, 2, \,.\,.\,, (n-1).$$

$\overline{A}, \overline{B}, \,.\,.\,, \overline{M}, \overline{N}$ étant des fonctions finies pour la valeur x considérée (voir § 4 du Chap. II).

Si, pour x, on a

$$F_p = F'_p = \,.\,.\, = F_p^{(n-p-1)} = 0 \qquad p = 1, 2, \,.\,.\,, (n-2)$$

ce qui entraîne, d'après (1), pour x,

$$F_p = F_{p+1} = \,.\,.\, = F_{n-1} = 0$$

d'où, d'après (2), $F_p^{(n-p)} = 0$, pour x.

On a donc le théorème suivant :

Lorsque $F_p = r_p f_p^2 - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+1} \qquad p = 1, 2, \,.\,.\,, (n-1)$

où $r_p = r_0 + \alpha p$ et $\alpha = \dfrac{-r_0}{n}$; et si, pour une valeur x, on a

$$f_{p-1} \neq 0 \ f_p \neq 0 \ \ldots \ f_{n-1} \neq 0 \ f_n \neq 0$$
$$F_p = F_p' = \ldots = F_p^{(n-p-1)} = 0$$

on a aussi, pour cette même valeur x,

$$\underline{F_p^{(n-p)} = 0} \qquad p = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

On verrait de même, que, toujours pour x défini ci-dessus,

$$F_p^{(n-p+1)} = 0 \qquad p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$F_p^{(n-p+2)} = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

§ 4.

$F_{p-1} \neq 0 \ F_p = F_{p+1} = \ldots\ldots = F_{p+r-1} = 0 \ F_{p+r} \neq 0.$

On suppose que, pour x, $(a \leq x \leq b)$,

$$f_{p-1} \neq 0 \quad f_p \neq 0 \quad f_{p+1} \neq 0 \ \ldots \ f_{p+r-1} \neq 0 \quad f_{p+r} \neq 0$$
$$F_{p-1} \neq 0 \quad F_p = F_{p+1} = \ldots = F_{p+r-1} = 0 \quad F_{p+r} \neq 0.$$
$$p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$r = 1, 2, \ldots, (n-p).$$

Le cas où

$$p = 1, 2, \ldots, (n-2)$$
$$r = 1, 2, \ldots, (n-p-1)$$

ne présente aucun intérêt spécial; les calculs seraient en tout point semblables à ceux exposés au § 5 du chapitre II, la formule

$$F_p^{(r)} = \frac{f_p}{f_{p+r}} F_{p+r}$$

pour une valeur x, telle que

$$F_p = F'_p = \ldots = F_p^{(r-1)} = 0,$$

conservant toute sa rigueur.

Dès lors, on s'occupe uniquement du cas où

$$p = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

et

$$r = n - p.$$

c'est-à-dire, où, pour x

$$\left.\begin{array}{llllll} f_{p-1} \neq 0 & f_p \neq 0 & f_{p+1} \neq 0 & \ldots & f_{n-1} \neq 0 & f_n \neq 0 \\ F_{p-1} \neq 0 & F_p = & F_{p+1} = & \ldots = & F_{n-1} = 0 & F_n > 0 \end{array}\right\} g.$$

$$p = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

La formule de Taylor donne :

$$F_p(x+h) = F_p + h F'_p + \ldots + \frac{h^{n-p-1}}{(n-p-1)!} F_p^{(n-p-1)} +$$

$$+ \frac{h^{n-p}}{(n-p)!} F_p^{(n-p)} + \frac{h^{n-p+1}}{(n-p+1)!} F_p^{(n-p+1)} + \ldots$$

On a tout d'abord

$$F_p^{(r)} = \frac{f_p}{f_{p+r}} F_{p+r} \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, \ldots, (n-2) \\ r = 1, 2, \ldots, (n-p-1) \end{array}$$

et, d'après cette formule, on constate que

$$F_p = F_{p+1} = \ldots = F_{n-1} = 0 \qquad \text{entraîne}$$
$$F_p = F'_p = \ldots = F_p^{(n-p-1)} = 0$$

et alors, on sait que dans ce cas,

$$F_p^{(n-p)} = F_p^{(n-p+1)} = F_p^{(n-p+2)} = \ldots = 0.$$

Donc, $\underline{F_p(x+h) \equiv 0.}$

On verrait de même que

$$F_{p+1} \equiv F_{p+2} \equiv \ldots \equiv F_{n-1} \equiv 0$$

ce qui confirme, ce qui a été dit au § 1 du chapitre premier.

Les fonctions se présentent dès lors comme suit :

$$\left.\begin{array}{lllllll} f_{p-1}, & f_p, & f_{p+1}, & \ldots, & f_{n+1}, & f_n \\ F_{p-1}, & \equiv 0, & \equiv 0, & \ldots, & \equiv 0, & F_n \end{array}\right\} g.$$

et ainsi

$$vP(x+h) = vP(x-h) = vP(x)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 [g] = vP(x-h) - vP(x) = 0 \\ \delta_2 [g] = vP(x) - vP(x+h) = 0 \end{array}\right\}.$$

CHAPITRE IV

Conclusion.

Revenons à la formule, développée dans tous ses détails, au § 3 du chapitre premier:

$$vP(a)-vP(b)=\sum_{l'}^{1..m'}\delta_2[g_a^{(l')}]+\sum_{i}^{1...k}\sum_{l}^{1..m}\delta[g_i^{(l)}]+\sum_{l''}^{1..m''}\delta_1[g_b^{(l'')}].$$

En se basant sur cette formule, et d'après les chapitres II et III, on peut écrire:

$$vP(a)-vP(b)=[2\lambda_0+2\lambda_1+2\lambda_2+\ldots]+[r_0+r_1+\ldots+r_i]+ \\ +[2\lambda_0'+2\lambda_1'+2\lambda_2'+\ldots] \qquad (1).$$

Avant de donner quelques éclaircissements sur cette dernière expression, remarquons que, dans les chapitres II et III, on s'est occupé principalement de la fonction $vP(x)$. En se servant des tableaux établis dans les pages précédentes, il est aisé de calculer dans chaque cas

$$\left.\begin{matrix} pP(x+h)-pP(x) \\ \text{et} \qquad pP(x)-pP(x-h) \end{matrix}\right\}$$

et l'on arriverait à l'expression finale suivante, analogue à l'expression (1):

$$pP(b)-pP(a)=[2\bar\lambda_0+2\bar\lambda_1+2\bar\lambda_2+\ldots]+[r_0+r_1+\ldots+r_j]+ \\ +[2\bar\lambda_0'+2\bar\lambda_1'+2\bar\lambda_2'+\ldots] \qquad (2).$$

I. $$\left.\begin{matrix} \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \\ \bar\lambda_0, \bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \ldots \end{matrix}\right\}$$

proviennent du fait que dans l'intervalle $a \leq x \leq b$ peuvent se trouver des racines multiples des fonctions f intermédiaires $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$.

On peut remarquer que

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{et} \quad \bar\lambda_{\bar k} \geq 0 \qquad \begin{matrix} k=0,1,2,\ldots \\ \bar k=0,1,2,\ldots \end{matrix}$$

II. $[r_0+r_1+\ldots]$ est le nombre de racines de l'équation $f(x)=0$, qui se trouvent dans $a \ldots b$.

Posons

$$r_0+r_1+\ldots+r_i=\mathrm{N}$$
$$r_0+r_1+\ldots+r_j=\mathrm{N}'$$

Les formules

$$\left.\begin{array}{l} v\mathrm{P}(x-h)-v\mathrm{P}(x)=r \\ v\mathrm{P}(x)-v\mathrm{P}(x+h)=0 \end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l} p\mathrm{P}(x+h)-p\mathrm{P}(x)=r \\ p\mathrm{P}(x)-p\mathrm{P}(x-h)=0 \end{array}\right\}$$

du § 3 du chapitre II, permettent de conclure que :

1. les racines éventuelles de l'équation $f(x)=0$, pour $x=a$, ne sont pas comprises dans N, tandis que celles correspondant à $x=b$ sont comprises.

2. les racines éventuelles de l'équation $f(x)=0$, pour $x=a$, sont comprises dans N', tandis que celles correspondant à $x=b$ ne sont pas comprises.

Il est inutile de rappeler que les racines sont comptées autant de fois qu'il y a d'unités dans leur ordre de multiplicité.

III.
$$\left.\begin{array}{l} \lambda_0', \lambda_1', \lambda_2', \ldots \\ \bar{\lambda}_0', \bar{\lambda}_1', \bar{\lambda}_2', \ldots \end{array}\right\}$$

proviennent du fait que dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ peuvent se trouver des racines des fonctions $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_{n-1}$.

On a vu que

$$\lambda_k' \geqq 0 \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_{\bar{k}}' \geqq 0 \qquad \begin{array}{l} k=0,1,2,\ldots \\ \bar{k}=0,1,2,\ldots \end{array}$$

Les formules (1) et (2) peuvent aussi s'écrire

$$v\mathrm{P}(a)-v\mathrm{P}(b)=\mathrm{N}+2[(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\ldots)+(\lambda_0'+\lambda_1'+\lambda_2'+\ldots)]$$
$$p\mathrm{P}(b)-p\mathrm{P}(a)=\mathrm{N}'+2[(\bar{\lambda}_0+\bar{\lambda}_1+\bar{\lambda}_2+\ldots)+(\bar{\lambda}_0'+\bar{\lambda}_1'+\bar{\lambda}_2'+\ldots)].$$

Posons :

$$[(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\ldots)+(\lambda_0'+\lambda_1'+\lambda_2'+\ldots)]=\mu \qquad \mu\geqq 0$$
$$[(\bar\lambda_0+\bar\lambda_1+\bar\lambda_2+\ldots)+(\bar\lambda_0'+\bar\lambda_1'+\bar\lambda_2'+\ldots)]=\mu' \qquad \mu'\geqq 0$$

$$\left.\begin{aligned} vP(a)-vP(b)&=N+2\mu \\ pP(b)-pP(a)&=N'+2\mu' \end{aligned}\right\} \qquad \text{ou bien}$$

$$\underline{\underline{N=vP(a)-vP(b)-2\mu}} \qquad \underline{\mu\geqq 0}$$
$$\underline{\underline{N'=pP(b)-pP(a)-2\mu'}} \qquad \underline{\mu'\geqq 0}$$

et ainsi se trouvent démontrés les deux théorèmes de Sylvester, dans toute leur généralité.

DEUXIÈME PARTIE

La Règle de Newton.

La combinaison simultanée du premier et du deuxième théorème de Sylvester, dans le cas particulier où l'on fait, dans le premier théorème,

$$a = 0 \text{ et } b = +\infty,$$

et dans le deuxième

$$a = -\infty \text{ et } b = 0,$$

conduit à la Règle de Newton.

Désignons respectivement par

$$N_+ \text{ et } N_-$$

le nombre de racines positives et le nombre de racines négatives de l'équation algébrique à coefficients réels $f(x) = 0$. On a :

$$\left.\begin{aligned} N_+ &= vP(0) - vP(\infty) - 2\mu \\ N_- &= pP(0) - pP(-\infty) - 2\mu' \end{aligned}\right\}$$

Voyons comment on peut déterminer facilement $vP(0)$ et $pP(0)$.

Soit

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0$$

l'équation considérée ; supposons

$$a_0 \neq 0 \text{ et } a_n \neq 0.$$

$$f^{(p)}(x) \equiv [n(n-1)\ldots(n-p+1)]\, a_0 x^{n-p} + \ldots + p!\, a_{n-p}.$$

$$p = 1, 2, \ldots, n.$$

Pour $x = 0$, la série des f devient :

$$\begin{array}{cccccccc} f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & \ldots, & f_p, & \ldots, & f_n. \\ a_n, & 1!\,a_{n-1}, & 2!\,a_{n-2}, & 3!\,a_{n-3}, & \ldots, & p!\,a_{n-p}, & \ldots, & n!\,a_0. \end{array}$$

On sait que les fonctions F sont définies comme suit :

$F_0 = f_0^2$

$F_p = r_p f_p^2 - r_{p-1} f_{p-1} f_{p+1}, \qquad p = 1, 2, .., (n-1)$

$F_n = f_n^2$

où $r_p = r_0 + \alpha p$.

Choisissons $r_0 = n$ et $\alpha = \frac{-r_0}{n} = -1$; donc

$r_p = n - p, \qquad p = 0, 1, \ldots, (n-1).$

Pour $x = 0$, la série des F prend alors les valeurs suivantes :

$$F_0 = f_0^2 = a_n^2$$

$$F_p = (n-p)[p\,!\,a_{n-p}]^2 - (n-p+1)[(p-1)\,!\,a_{n-p+1}][(p+1)\,!\,a_{n-p-1}] =$$
$$= \left[\frac{p(n-p)}{(p+1)(n-p+1)}[a_{n-p}]^2 - a_{n-p+1} \cdot a_{n-p-1}\right](n-p+1).(p-1)!(p+1)!$$

$$F_n = f_n^2 = [n\,!]^2\, a_0^2.$$

On peut maintenant écrire la double série qui fournira $vP(0)$ et $pP(0)$; on a, en supprimant les constantes positives :

$$a_n\,, \quad a_{n-1}\,, \quad a_{n-2}\,, \ldots, \quad a_1\,, \; a_0\,.$$
$$a_n^2, \frac{n-1}{2n}[a_{n-1}]^2 - a_{n-2}a^n, \frac{2(n-2)}{3(n-1)}[a_{n-2}]^2 - a_{n-1}a_{n-3}, .., \frac{n-1}{2n}a_1^2 - a_0 a_2, a_0^2.$$

Quant à $vP(+\infty)$, il est nul ; car pour $x = \infty$, la série $f_0, f_1, .., f_n$ ne présente évidemment aucune variation.

$pP(-\infty)$ est aussi nul ; pour $x = -\infty$, la série $f_0, f_1, .., f_n$ ne présentant pas de permanences.

Dès lors, on a les formules,

$$\underline{\underline{N_+ = vP(0) - 2\mu}} \qquad (1)$$

$$\underline{\underline{N_- = pP(0) - 2\mu'}} \qquad (2)$$

où $vP(0)$ et $pP(0)$ correspondent à la double série, établie ci-dessus.

De ces deux expressions, on peut déduire une limite inférieure du nombre I de racines imaginaires de $f(x) = 0$.

En effet,

$$n = N_+ + N_- + I.$$

$$I = n - N_+ - N_- = n - vP(0) - pP(0) + 2\mu + 2\mu'.$$

mais $\qquad n - vP(0) - pP(0) = V(0)\qquad,$

V(0) désignant le nombre de variations que présente la série inférieure, celle des F.

On a donc :

$$\underline{\underline{I = V(0) + 2\lambda.}} \qquad (3) \qquad \lambda \geqq 0.$$

Les formules (1), (2) et (3) expriment la Règle de Newton.

Voici comment Newton énonçait la première partie de sa règle :

« Prenez une suite de fractions dont les dénominateurs forment la progression arithmétique 1, 2, 3, 4, 5, etc., en suivant ainsi jusqu'au nombre qui sera l'indicateur des dimensions de votre équation ; et pour les numérateurs de vos fractions, prenez la suite des termes qui forme les dénominateurs, mais dans un ordre renversé. Divisez chacune de ces fractions par celle qui la précède et placez les fractions qui résulteront de ces divisions au-dessus des termes moyens de l'équation. Ensuite, élevez chaque terme moyen au carré et multipliez ce carré par la fraction qui est au-dessus du terme correspondant, et puis examinez si ce produit est plus grand ou plus petit que le rectangle des deux termes adjacents à droite et à gauche, au terme que vous examinez ; si plus grand, placez au-dessous de ce terme le signe +; si plus petit, placez au-dessous le signe —. Ecrivez sous le premier et le dernier termes le signe +. Et il y aura dans l'équation autant de racines imaginaires que de variations dans les signes souscrits de + en —, et de — en +.»

(*Arithmetica universalis.* — Trad. de Beaudeux. 1802).

Newton donne l'exemple de l'équation

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0,$$

qu'il écrit comme suit :

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \\ x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2x^2 & -5x & -4=0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

et Newton conclut :

La série inférieure présente deux variations, par conséquent, l'équation possède deux racines imaginaires. En outre, $v\mathrm{P}(0)=1$ et $p\mathrm{P}(0)=2$, donc le résultat est :

$$N_+=1\,,\, N_-=2 \text{ et } I=2.$$

Newton ajoute à la fin de l'exposé de sa règle :

« C'est ainsi qu'on détermine la nature de toutes les racines, lorsque le nombre des imaginaires n'est pas plus grand que celui qu'on peut découvrir par la règle établie ci-dessus; mais il peut arriver, quoique bien rarement, que le nombre des racines imaginaires surpasse celui que la règle a fait connaître. »

C'est, du reste, ce qu'il est facile de vérifier d'après les formules qui viennent d'être rigoureusement développées.

Quant au procédé de Newton, pour la détermination des fractions par lesquelles doivent être multipliés les carrés des coefficients des termes moyens de l'équation, on a :

$$\frac{n}{1},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n-2}{3},\ldots,\ \frac{n-p+1}{p},\ \frac{n-p}{p+1},\ldots,\ \frac{2}{n-1},\ \frac{1}{n}.$$

et, en divisant chaque fraction, à partir de la deuxième, par la précédente, on obtiendra la suite suivante :

$$\frac{n-1}{2n},\ \frac{2(n-2)}{3(n-1)},\ldots,\ \frac{p(n-p)}{(p+1)(n-p+1)},\ldots,\ \frac{n-1}{2n}.$$

comme par le procédé de Sylvester, et les méthodes reviennent au même.

La convention que fait Newton, dans l'*Arithmetica universalis*, au sujet des zéros, est absolument d'accord avec les conventions en vigueur dans ce travail-ci, et la Règle de Newton est ainsi démontrée dans ses moindres détails, et dans toute sa généralité.

Rappelons ici très brièvement ces conventions, appliquées à la Règle de Newton.

Soit l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

et $\quad A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots \quad A_{n-1}, \quad A_n$

les valeurs de la seconde série.

Supposons $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$, donc $A_0 > 0$ et $A_n > 0$.

A) Si $a_{k-1} \neq 0 \quad a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{k+l-1} = 0 \quad a_{k+l} \neq 0.$

$$k = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$l = 1, 2, \ldots, (n-k)$$

on donnera aux zéros $a_k, \ldots, a_{k+l-1}$, *le même signe que celui de* a_{k-1}.

B) Si $A_{i-1} \neq 0 \quad A_i = A_{i+1} = \ldots = A_{i+j-1} = 0 \quad A_{i+j} \neq 0.$

$$i = 1, 2, \ldots, (n-1)$$
$$j = 1, 2, \ldots, (n-i).$$

En général, on donnera au zéro A_i le signe contraire de celui de A_{i-1}, et ainsi de suite, en allant de gauche à droite, et *en variant toujours de signe.*

Premier cas d'exception.

Supposons qu'on ait simultanément

$$a_{k-1} \neq 0 \quad a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{k+l-1} = 0 \quad a_{k+l} \neq 0$$
$$A_{k-1} \neq 0 \quad A_k = A_{k+1} = \ldots = A_{k+l-1} = 0 \quad A_{k+l} \neq 0$$
$$k = 1, 2, \ldots, (n-2)$$
$$l = 2, 3, \ldots, (n-k).$$

Pour les $a_k, \ldots, a_{k+l-1}$, on a la convention A ci-dessus.

Pour les $A_k, \ldots, A_{k+l-1}$, on a la convention B, sauf dans le cas où $\underline{a_{k-1} \cdot a_{k+l} < 0}$. Dans ce cas, il faut que le zéro représentant A_{k+l-1} ait *le même signe que* A_{k+l}.

Deuxième cas d'exception.

Si l'équation est de la forme $a_0(x - x_1)^n = 0$, alors

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} = 0 = \oplus.$$

(Les séries obtenues par les deux procédés, de Sylvester et de Newton, seront retournées. Si par une méthode, on obtient

$$f_0, \quad f_1, \quad f_2, \ldots, \quad f_n$$
$$F_0, \quad F_1, \quad F_2, \ldots, \quad F_n$$

par l'autre méthode, on aura

$$f_n, \quad f_{n-1}, \ldots, \quad f_1, \quad f_0,$$
$$F_n, \quad F_{n-1}, \ldots, \quad F_1, \quad F_0.)$$

Remarques.

I. L'application du premier ou du deuxième théorème de Sylvester à l'intervalle

$$a = -\infty \qquad b = +\infty$$

permet de formuler la règle connue suivante, qui peut du reste être démontrée directement :

Soit

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

une équation algébrique à coefficients réels du $n^{\text{ème}}$ degré.

Formons la différence

$$a_1^2 - \frac{2n}{n-1} a_0 a_2.$$

Si cette différence est négative, on pourra certifier que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins un couple de racines imaginaires.

II. Le lemme de Gauss, dans la théorie des équations algébriques, est une conséquence immédiate de la Règle de Newton et des conventions au sujet des zéros.

TROISIÈME PARTIE

Compléments aux théorèmes de Sylvester.

Sylvester, en poursuivant ses recherches, dans la théorie des équations algébriques, fut conduit aux résultats exposés brièvement dans les deux paragraphes qui suivent.

§ 1.

Retour aux deux premiers théorèmes de Sylvester.

L'expression variation-permanence avait pour Sylvester, quelque chose de «gênant» (c'est son propre terme); aussi chercha-t-il à substituer, dans ses théorèmes, aux variations-permanences, des variations-variations.

Considérons les deux séries :

$$f_0, \quad f_1, \quad f_2, \quad .., \quad f_n$$
$$G_0, \quad G_1, \quad G_2, \quad .., \quad G_n.$$

où les fonctions f sont les mêmes que précédemment; les nouvelles fonctions

$$G_0, \quad G_1, \quad G_2, \quad .., \quad G_n$$

étant définies comme suit:

$$G_0 = f_0\, F_0 = f_0^3$$
$$G_p = f_p\, F_p = r_p\, f_p^3 - r_{p-1}\, f_{p-1}\, f_p\, f_{p+1}, \qquad p = 1, 2, .., (n-1)$$
$$G_n = f_n\, F_n = f_n^3$$

r_p, $p = 0, 1, .., (n-1)$, étant les constantes considérées jusqu'ici.

On a, en outre, par définition,

$$sign[G_i] = sign[f_i] \,.\, sign[F_i], \qquad i = 0, 1, .., n.$$

ce qui est très important pour cette étude, tout spécialement dans le cas où, soit f_i, soit F_i, soit encore tous les deux, sont nuls.

Par rapport à ces nouvelles séries, on pourra formuler les deux théorèmes suivants, qui ne sont qu'une nouvelle expression des théorèmes de Sylvester.

Premier théorème.

Soit N, le nombre de racines de l'équation algébrique à coefficients réels $f(x)=0$, qui appartiennent à l'intervalle

$$a > x \leq b.$$

Chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

Soit $v\phi(x)$, le nombre de variations-variations que présentent les deux séries :

$$\begin{matrix} f_0, & f_1, & .., & f_n \\ G_0, & G_1, & .., & G_n \end{matrix}$$

telles qu'elles viennent d'être définies, pour une valeur bien déterminée x.

On aura alors

$$\underline{\underline{N = v\phi(a) - v\phi(b) - 2\mu}}$$

μ étant un nombre entier, non-négatif.

Deuxième théorème.

Soit N', le nombre de racines de l'équation $f(x)=0$, qui appartiennent à l'intervalle

$$a \leq x < b.$$

Chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

Soit $p\pi(x)$ le nombre de permanences-permanences que présentent les deux séries

$$\begin{matrix} f_0, & f_1, & .., & f_n \\ G_0, & G_1, & .., & G_n \end{matrix}$$

pour une certaine valeur x.

On aura, μ' étant un nombre entier, non-négatif,

$$\underline{\underline{N' = p\pi(b) - p\pi(a) - 2\mu'.}}$$

Pour vérifier l'exactitude de ces théorèmes, il suffit de remarquer que, si le couple de successions correspondantes

$$\begin{Bmatrix} f_p, & f_{p+1} \\ F_p, & F_{p+1} \end{Bmatrix}$$

est une double-permanence,

$$\begin{Bmatrix} f_p, & f_{p+1} \\ f_p F_p, & f_{p+1} F_{p+1} \end{Bmatrix}$$

en sera aussi une.

Mais, si

$$\begin{Bmatrix} f_p, & f_{p+1} \\ F_p, & F_{p+1} \end{Bmatrix}$$

est une variation-permanence,

$$\begin{Bmatrix} f_p, & f_{p+1} \\ f_p F_p, & f_{p+1} F_{p+1} \end{Bmatrix}$$

deviendra une double-variation.

§ 2.

Le troisième théorème de Sylvester.

Pour déterminer le nombre N de racines d'une équation algébrique à coefficients réels, situées dans un intervalle réel, $a \dots b$, on peut appliquer trois théorèmes, indépendants l'un de l'autre, (abstraction faite du théorème de Sturm, etc.), à savoir :

1°) le théorème de Budan-Fourier.

Rappelons que ce théorème s'exprime par la formule

$$N = v(a) - v(b) - 2\mu$$

μ étant un nombre entier, non-négatif, et $v(x)$, le nombre de variations de la série, considérée jusqu'ici,

$$f_0, \quad f_1, \quad \dots, \quad f_n.$$

pour une valeur déterminée x, en ayant soin de supprimer les termes nuls.

2°) le premier théorème de Sylvester.

3°) le deuxième théorème de Sylvester.

La série $G_0, G_1, .., G_n$ donne lieu à un troisième théorème de Sylvester.

Soit $v(x)$, la fonction définie ci-dessus, à propos du théorème de Budan-Fourier, et soit $\phi(x)$, le nombre de variations de la série $G_0, G_1, .., G_n$ pour une valeur bien déterminée x.

Le troisième théorème de Sylvester est donné alors par la formule

$$N = \frac{v(a) + \phi(a) - v(b) - \phi(b)}{2} - \lambda$$

λ, nombre entier, non-négatif, pair ou impair.

Sylvester attachait à ses trois théorèmes une égale importance. Il en serait évidemment ainsi, si les limites obtenues pour le nombre de racines, étaient toutes trois, indépendantes l'une de l'autre. Sylvester l'affirme; mais on peut montrer que le troisième théorème de Sylvester n'est qu'un corollaire des deux premiers théorèmes.

En effet, considérons les deux séries :

$$\begin{array}{cccc} f_0, & f_1, & .., & f_n \\ G_0, & G_1, & .., & G_n \end{array}$$

On a déjà défini les fonctions $v(x)$, $\phi(x)$, $v\phi(x)$ et $p\pi(x)$; on définirait, d'une manière analogue, $v\pi(x)$ et $p\phi(x)$.

Pour $x=a$, a n'étant pas racine de $f(x)=0$, on a évidemment les deux relations:

$$\begin{aligned} &v\pi(a)+p\phi(a)+v\phi(a)+p\pi(a)=n \\ &v\pi(a)+p\phi(a)+2.v\phi(a) \qquad = v(a)+\phi(a). \end{aligned}$$

d'où par soustraction membre à membre,

$$p\pi(a)-v\phi(a)=n-v(a)-\phi(a) \qquad \text{ou}$$

$v(a)+\phi(a)-v\phi(a)+p\pi(a)=n=$ constante pour tout point a qui n'est pas racine de $f(x)=0$; $x=b$, par exemple, donc

$$v(a) + \phi(a) - v\phi(a) + p\pi(a) = v(b) + \phi(b) - v\phi(b) + p\pi(b).$$

d'où

$$v(a) + \phi(a) - v(b) - \phi(b) = v\phi(a) - v\phi(b) + p\pi(b) - p\pi(a) \qquad (1)$$

$$\frac{v(a) + \phi(a) - v(b) - \phi(b)}{2} = \frac{v\phi(a) - v\phi(b)}{2} + \frac{p\pi(b) - p\pi(a)}{2}$$

ce qui permet de constater la relation existant entre les trois théorèmes de Sylvester, et de démontrer le troisième.

Le troisième théorème ne peut pas préciser les résultats fournis par les deux premiers théorèmes.

En effet, supposons qu'on ait simultanément,

$$\frac{v(a) + \phi(a) - v(b) - \phi(b)}{2} < v\phi(a) - v\phi(b)$$

et
$$\frac{v(a) + \phi(a) - v(b) - \phi(b)}{2} < p\pi(b) - p\pi(a)$$

d'où

$$2.\ \frac{v(a) + \phi(a) - v(b) - \phi(b)}{2} < v\phi(a) - v\phi(b) + p\pi(b) - p\pi(a)$$

ce qui est en contradiction avec la relation (1) établie ci-dessus.

Il y aurait lieu de distinguer spécialement le cas où a, b sont racines de l'équation $f(x) = 0$.

On déterminerait immédiatement d'après les séries

$$\begin{array}{cccc} f_0, & f_1, & \ldots, & f_n \\ G_0, & G_1, & \ldots, & G_n \end{array}$$

pour $x = a$, et $x = b$, la multiplicité de ces racines. Soit A, la multiplicité de a; B, celle de b.

On reconnaîtrait alors facilement que la supposition

$$\frac{v(a) + \phi(a) - v(b) - \phi(b)}{2} < v\phi(a) - v\phi(b) - \mathrm{B}.$$

et
$$\frac{v(a) + \phi(a) - v(b) - \phi(b)}{2} < p\pi(b) - p\pi(a) - \mathrm{A}.$$

conduirait à une contradiction.

Donc, encore dans ce cas, le troisième théorème de Sylvester ne contribue en aucune manière à préciser les résultats obtenus par l'application des deux premiers théorèmes.

APPENDICE

Exemples.

Exemple I.

Considérons l'équation

$$4x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 50x^2 - 40x - 101 = 0.$$

Combien contient-elle de racines dans l'intervalle $a = 0$, $b = 1$?

On a:

$$\begin{aligned}
f_0 &= 4x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 50x^2 - 40x - 101 \\
f_1 &= 20x^4 - 20x^3 - 60x^2 + 100x - 40 \\
f_2 &= 80x^3 - 60x^2 - 120x + 100 \\
f_3 &= 240x^2 - 120x - 120 \\
f_4 &= 480x - 120 \\
f_5 &= 480
\end{aligned}$$

Pour $x = 0$, ces fonctions deviennent:

$$x = 0: \quad -101, \quad -40, \quad 100, \quad -120, \quad -120, \quad 480$$

et pour $x = 1: \quad -112, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 360, \quad 480$

Le théorème de Budan-Fourier donne donc

$$\mathrm{N} = v(0) - v(1) - 2\mu = 3 - 1 - 2\mu = \underline{2} \text{ ou } \underline{0}.$$

Voyons si les théorèmes de Sylvester ne vont pas permettre de préciser ce résultat.

Les constantes r_p sont données par l'expression

$$r_p = r_0 + \alpha p, \qquad \alpha \geqq \frac{-r_0}{5}, \qquad p = 1, 2, 3, 4.$$

Faisons $r_0 = 5$ et $\alpha = -1$; d'où

$$r_0 = 5\,, \quad r_1 = 4\,, \quad r_2 = 3\,, \quad r_3 = 2\,, \quad r_4 = 1\,.$$

Pour $x = 0$, la double série est:

$$\begin{array}{llllll} -101, & -40\,, & 100\,, & -120\,, & -120\,, & \\ +, & 4(40)^2 - 5(-101)100, & 3(100)^2 - 4(-40)(-120), & 2(120)^2 - 3(-120)100, & (120)^2 - 2(-120)480, & - \end{array}$$

ou $\quad x = 0: \quad \begin{array}{cccccc} - & - & + & - & - & + \\ + & + & + & + & + & + \end{array}$

Pour $x = 1$, on a

$$\begin{array}{cccccc} -112\,, & 0\,, & 0\,, & 0\,, & 360\,, & 480 \\ +, & 0\,, & 0\,, & 0\,, & +, & + \end{array}$$

ou $\quad x = 1: \quad \begin{array}{cccccc} - & \oplus & \oplus & \oplus & + & + \\ + & \oplus & \oplus & \ominus & + & +. \end{array}$

Le premier théorème de Sylvester n'indique rien de nouveau:

$$N = vP(0) - vP(1) - 2\mu = 3 - 1 - 2\mu = \underline{2} \text{ ou } \underline{0}.$$

Le deuxième théorème de Sylvester donne:

$$N = pP(1) - pP(0) - 2\mu' = 2 - 2 - 2\mu' = \underline{\underline{0}}.$$

L'équation considérée ne possède ainsi aucune racine entre 0 et 1.

Exemple II.

Soit à déterminer la nature des racines de l'équation

$$x^6 - 4x^5 - 9x^4 - 8x^3 - 4x^2 - x - 12 = 0.$$

Pour appliquer la Règle de Newton, on forme d'abord les fractions suivantes:

$$\frac{6}{1}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{6}.$$

et, en divisant chacune d'elles, à partir de la deuxième par la précédente, on a

$$\frac{5}{12}, \quad \frac{8}{15}, \quad \frac{9}{16}, \quad \frac{8}{15}, \quad \frac{5}{12}.$$

qu'il faut placer sur les coefficients moyens de l'équation.

$$\begin{array}{ccccccc} & \frac{5}{12} & \frac{8}{15} & \frac{9}{16} & \frac{8}{15} & \frac{5}{12} & \\ x^6 & -4x^5 & -9x^4 & -8x^3 & -4x^2 & -x & -12 \\ + & + & + & \ominus & + & - & + \end{array}$$

On a donc :

$$N_+ = vP(0) - 2\mu = \underline{\underline{1}}.$$
$$N_- = pP(0) - 2\mu' = \underline{\underline{1}}.$$
$$I \;\; = V(0) + 2\lambda = \underline{\underline{4}}.$$

Ouvrages et travaux consultés :

1. NEWTON. — *Arithmetica universalis,* trad. Noël Beaudeux. (1802), t. II, p. 10.
2. Un article de J.-J. SYLVESTER, paru dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. (1864), vol. 154.
3. J.-J. SYLVESTER. — *On an Elementary Proof of Sir Isaac Newton's hitherto undemonstrated Rule, given in the Arithmetica Universalis, for the Discovery of Imaginary Roots in Algebraical Equations.* — June 26, 1865. — Paru dans les *Transactions of the Royal Irish Academy*. (1871), vol. 24.
4. J.-J. SYLVESTER. — *On an improved form of Statement of the New Rule for the Separation of the Roots of an Algebraical Equation, with a Postscript containing a New Theorem.* — Paru dans *The Philosophical Magazine*. 4^{me} sér., vol. 31, p. 124.
5. AUG. POULAIN. — *Sur un théorème récent de M. Sylvester.* — *Les Mondes,* revue hebdomadaire des sciences. (1866), t. II, p. 16.
6. J.-J. SYLVESTER. — *Observations sur un article de M. Poulain.* — *Les Mondes*. (1866), t. II, p. 435.
7. Un travail de M. A. GENOCCHI, paru dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. (1867), 2^{me} série, t. 6, p. 5.
8. LAGUERRE. — Œuvres I, pp. 151, 191.
9. Quatre travaux de M. DE JONQUIÈRES, publiés dans les *Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. (1884), t. 99, pp. 62, 111, 165, 269.
10. JUL. PETERSEN. — *Theorie der algebraischen Gleichungen*. (1878), p. 203.
11. HEINRICH WEBER. — *Lehrbuch der Algebra*. (1898), erster Band, p. 345.
12. MORITZ CANTOR. — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. (1898), dritter Band, pp. 388, 542.

INDEX