Zeitschrift: Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles

Band: 37 (1909-1910)

Artikel: Théorie de la compensation à mercure dans les pendules d'horloges astronomiques

Autor: Stroele, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88562

THÉORIE DE LA COMPENSATION A MERCURE

DANS LES

PENDULES D'HORLOGES ASTRONOMIQUES

PAR H. STRŒLE

INTRODUCTION

La compensation à mercure a été imaginée par le constructeur anglais Georges Graham il y a déjà près de deux siècles; la plus grande partie des horloges de précision construites depuis lors ont été munies d'un pendule à mercure. Néanmoins, la théorie de ce système de compensation a été fort négligée; on peut s'en étonner à bon droit, le pendule étant l'organe régulateur, c'est-à-dire l'organe essentiel de l'horloge de précision, qui joue un rôle si important dans la pratique des observations astronomiques.

Un grand nombre de traités et de manuels d'astronomie pratique, de physique et d'horlogerie théorique, donnent encore, pour le calcul de la quantité de mercure nécessaire à la compensation d'un pendule, des formules approchées qui sont, ou absolument fausses ou notoirement insuffisantes. J'ai montré dans le premier chapitre du présent travail qu'on peut facilement modifier ces formules de façon à ce qu'elles donnent des résultats très acceptables.

Mais ces formules approchées, qui sont basées sur la considération d'un pendule simple, ne s'appliquent qu'aux pendules à mercure du type usuel, dans lesquels la masse du mercure est de beaucoup prédominante. Dès qu'on s'éloigne de cette forme, elles ne sont plus applicables, et il faut absolument recourir à la théorie exacte du pendule composé. J'ai montré dans le chapitre II qu'on peut alors se servir avec avantage d'une formule due à M. B. Wanach pour calculer la quantité de mercure et pour résoudre tous les problèmes connexes.

Le chapitre III est consacré à l'influence du gradient (c'est-à-dire de l'inégalité de la température à diverses hauteurs) sur la marche d'un pendule à mercure. Cette question essentielle a été traitée il y a quelques années par M. B. Wanach dans un mémoire très remarquable. J'ai repris ici toute cette question et j'ai réussi à montrer qu'on peut, en adoptant un type de pendule à mercure absolument nouveau, compenser aussi cet effet du gradient et obtenir ainsi un pendule doublement compensé.

Lorsqu'on veut résoudre ces diverses questions avec quelque précision, on ne peut pas négliger l'effet de l'air ambiant sur la compensation thermique du pendule, comme on l'a presque toujours fait jusqu'ici. Cet effet de l'air ambiant fait l'objet du quatrième et dernier chapitre de la présente étude.

Mon travail reste encore incomplet puisque l'effet de la température sur l'élasticité du ressort de suspension, ainsi que sur le frottement de l'échappement et sur l'amplitude, n'y est pas étudié. Mais ce sont là des questions plus complexes et aussi plus spéciales; on peut d'ailleurs espérer que ces effets (tout au moins les deux derniers) sont beaucoup moins importants que ceux que nous avons étudiés, et peut-être même à peu près négligeables.

Je me suis constamment efforcé, au cours de cette étude, de ne pas m'égarer dans des calculs purement théoriques, de ne pas perdre de vue les problèmes qui se posent dans la pratique, et de les résoudre le plus simplement possible, en négligeant résolument tous les termes inutiles. J'espère que j'ai en partie réussi et que quelques-uns des résultats auxquels je suis parvenu pourront être immédiatement utilisés par les astronomes et les constructeurs.

NOTATIONS EMPLOYÉES

π rapport de la circonférence au rayon.

g accélération de la pesanteur.

l longueur du pendule simple synchrone.

h hauteur du mercure.

b distance de la base de la colonne de mercure à la suspension.

a distance du sommet de la colonne de mercure à la suspension.

d distance de la surface libre du mercure à la suspension.

δ densité du mercure.

c produit de la section du vase par δ.

p $= ch$ poids du mercure.

P poids de la partie solide.

ϖ poids d'une quantité de mercure additionnelle.

r rayon du vase cylindrique.

v volume du mercure.

m masse du mercure.

M masse de la partie solide.

q masse de mercure concentrée en un point.

η $= \frac{q}{m}$.

L distance du centre de gravité de la partie solide à la suspension.

λ distance du centre de gravité du mercure à la suspension.

α coefficient de dilatation de la tige.

α_1 coefficient de dilatation linéaire de la paroi du vase.

γ coefficient de dilatation du mercure.

β $= \gamma - 2\alpha_1$ coefficient apparent de dilatation linéaire du mercure.

ε $= \beta - \alpha = \gamma - 2\alpha_1 - \alpha$.

y $= cl \frac{}{\beta -} = cl \frac{\alpha}{\varepsilon}\cdot$

T durée d'une oscillation simple.

N (au chapitre Ier, § 5) nombre d'oscillations simples par jour.

Δm variation de la marche diurne.

N moment d'inertie du pendule.

D moment statique du pendule.

J moment d'inertie de la partie solide du pendule.

S moment statique de la partie solide du pendule.

i moment d'inertie du mercure.

s moment statique du mercure.

ι moment d'inertie du mercure situé entre le niveau primitif et le niveau résultant d'une élévation de température de 1°.

σ moment statique du mercure situé entre le niveau primitif et le niveau résultant d'une élévation de température de 1°.

ι_1 moment d'inertie de la surface libre du mercure.

ι_2 moment d'inertie du mercure situé entre le niveau primitif et le niveau résultant d'une augmentation de gradient de 1°.

σ_2 moment statique du mercure situé entre le niveau primitif et le niveau résultant d'une augmentation de gradient de 1°.

μ élément de masse.
x sa distance à la suspension.
k moment de troisième ordre du mercure ($\Sigma \mu x^3$).
K moment de troisième ordre de la partie solide ($\Sigma \mu x^3$).
G moment de troisième ordre du pendule $= K + k$.
t température.
τ gradient (différence de température par unité de hauteur).
Q masse solide concentrée en un point.
F sa distance à la suspension.
B longueur d'une ligne matérielle solide.
C sa densité (masse de l'unité de longueur).

Notations spéciales au IVme chapitre.

δ densité de l'air.
p pression de l'air.
T température absolue de l'air.
b coefficient barométrique de l'horloge.
θ coefficient thermique dû à l'air.
C constante de réduction aux unités choisies.
A première constante dans la formule de réduction au vide.
B deuxième constante dans la formule de réduction au vide.
$\left.\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\right\}$ parties de A.
x valeur inconnue de $\frac{1}{2}$ B.
η coefficient de frottement (viscosité) de l'air.
a première constante dans la formule exprimant le frottement en fonction de la température.
c deuxième constante dans la formule exprimant le frottement en fonction de la température.
R rayon d'un cylindre.
L longueur d'un cylindre.
E distance de la suspension jusqu'au centre de gravité d'un cylindre.

CHAPITRE PREMIER

Formules approchées pour le calcul de la quantité de mercure.

1. Formules actuelles.

Tous les ouvrages qui s'occupent du calcul de la quantité de mercure donnent l'une ou l'autre des deux formules suivantes :

Première formule. — Pour obtenir cette formule on ne tient aucun compte de la masse de la partie solide ; on considère seulement celle du mercure, qu'on suppose concentrée à son centre de gravité ; on est ainsi ramené au cas d'un pendule simple.

Désignons par l la longueur de ce pendule simple ; soient h la hauteur du mercure, α le coefficient de dilatation linéaire de la tige du pendule, α_1 celui des parois du vase, γ le coefficient de dilatation cubique du mercure ; le coefficient de dilatation apparente du mercure dans ce vase (dilatation en hauteur) sera $\beta = \gamma - 2\alpha_1$.

La longueur de la tige du point de suspension jusqu'à la base du mercure est égale à $l + \frac{h}{2}$. Supposons que la température s'élève de 1°, et soit Δl l'allongement du pendule qui en résulte. On a la relation :

$$l + \Delta l = \left(l + \frac{h}{2}\right)(1 + \alpha) - \frac{h}{2}(1 + \beta)$$

(Si la tige n'était pas toute d'une même substance, il faudrait prendre pour α une moyenne établie proportionnellement aux longueurs de chacune de ces substances.)

L'équation se simplifie et donne :

$$\Delta l = l\alpha - \frac{h}{2}(\beta - \alpha)$$

Si on pose, pour abréger :

$$\beta - \alpha = \gamma - 2\alpha_1 - \alpha = \varepsilon$$

cette relation devient :

$$\Delta l = l\alpha - \frac{h}{2}\varepsilon \qquad (1)$$

Pour que le pendule soit compensé, il faut qu'une variation de température n'entraîne pas de variation de longueur, c'est-à-dire que $\Delta l = 0$. La condition de compensation est donc :

$$l\alpha - \frac{h}{2}\varepsilon = 0$$

d'où on tire :

$$h = 2l\frac{\alpha}{\varepsilon} \qquad (2)$$

C'est la formule dont il s'agit. En pratique, il est toutefois préférable de calculer directement le poids p du mercure plutôt que sa hauteur h. Soient donc r le rayon du vase, δ la densité du mercure, et utilisons l'abréviation $\pi r^2\delta = c$. On a évidemment :

$$p = ch = 2cl\frac{\alpha}{\varepsilon} = 2\pi r^2\delta l \frac{\alpha}{\gamma - 2\alpha_1 - \alpha}$$

Si nous introduisons la quantité auxiliaire y (dont nous ferons encore usage dans la suite) en posant :

$$y = cl\frac{\alpha}{\varepsilon} = \pi r^2\delta l \frac{\alpha}{\gamma - 2\alpha_1 - \alpha} \qquad (3)$$

la formule obtenue se réduit à :

$$p = 2y$$

Puisque la masse de la partie solide a été négligée, la formule ci-dessus ne saurait évidemment s'appliquer qu'aux pendules dans lesquels la masse du mercure est prédominante; il ne faut pas songer à s'en servir pour des pendules différant du type usuel, par exemple pour les pendules à mercure de Riefler[1], où la masse de la partie solide atteint près des $^2/_3$ de la masse totale du pendule.

Mais même dans les pendules à mercure ordinaires, le

[1] Pour une description de ce pendule, voir : Riefler, *Zeitschr. f. Instr.*, XIII, p. 88. Voir aussi la fig. 2 et les données numériques à la page 226 du présent travail.

poids de la partie solide n'est jamais négligeable, de sorte que cette première formule[1] est toujours insuffisante : elle donne des résultats notablement trop faibles.

Deuxième formule. — Cette formule repose sur une erreur grossière, et elle ne mériterait pas d'être citée dans un travail sérieux, si elle ne figurait pas aujourd'hui encore dans nombre d'excellents ouvrages[2].

L'erreur commise consiste à remplacer, dans la condition de compensation (2), le coefficient de dilatation apparente du mercure, ε, par la dilatation elle-même, c'est-à-dire par $\pi r^2 h \varepsilon$. L'équation devient alors :

$$\frac{h}{2} \pi r_2 h \varepsilon = l \alpha$$

d'où l'on peut tirer :

$$h = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2 l \alpha}{\pi \varepsilon}} \qquad (4)$$

Il n'est pas étonnant qu'une formule qui repose sur une telle confusion donne des résultats absolument fantaisistes. L'inexactitude de cette deuxième formule se remarque d'ailleurs immédiatement à ce fait que, alors même qu'elle ne contient que des constantes et des longueurs, elle n'est pas homogène par rapport à celles-ci, de sorte qu'elle donne des résultats tout différents si l'on choisit des unités de longueur différentes !

Il est vraiment étrange que cette formule fausse ait été reproduite un peu partout, sans contrôle, pendant aussi longtemps. Ajoutons que l'erreur commise a déjà été signalée, il y a près de 30 ans, par M. Lorenzoni[3]. Mais il semble que, malheureusement, sa remarque a passé inaperçue.

[1] Voir, par exemple : AMBRONN, *Astronomische Instrumentenkunde*, I, p. 230.
KARMARSCH et HEEREN. *Technisches Wörterbuch*, 1883, VI, p. 594.

[2] Voir : VALENTINER, *Handwörterbuch der Astronomie*, IV, p. 14 (article « Uhr » de E. GERLAND).
E. GELCICH. *Die Uhrmacherkunst und die Behandlung der Präcisionsuhren*, 1892, p. 315.
CL. SAUNIER. *Traité d'Horlogerie moderne*, Paris, 1869, p. 709.
CH. LABOULAYE. *Dictionnaire des Arts et Manufactures*, 7me éd., 1891, II (article « Horlogerie », de BREGUET). Cette 7me édition semble d'ailleurs conforme, sur ce point, à la 1re, parue vers 1860 : il est donc possible qu'il faille attribuer à Breguet la paternité de cette formule.

[3] G. LORENZONI. « Sul calcolo del altezza del mercurio in un pendolo a compensazione » *(Mem. Soc. Spectr. Ital.*, 1879, App. I).
Cette erreur a été signalée à nouveau par M. F. KEELHOFF, « Calcul d'un pendule compensateur à mercure », *Journal suisse d'horlogerie*, t. XXIII, 1899, p. 256.

2. Formule de M. Keelhoff.

On peut modifier la formule (2) pour tenir compte du poids de la partie solide du pendule.

Première méthode. — En 1823 déjà, Fr. Baily[1] indiquait que la quantité de mercure calculée par la formule (2) doit être augmentée de $^1/_{10}$ de pouce, pour tenir compte de la tige, dont il évaluait la masse à $^1/_{20}$ de celle du mercure. (Les tiges des pendules de notre époque ont généralement une masse relative bien plus considérable[2]; la correction indiquée devrait donc encore être augmentée d'autant.) Mais, chose curieuse, Baily négligeait complètement la masse du récipient.

Cette lacune a été relevée par Edm. Beckett[3] qui, pour tenir compte aussi de cette masse, propose la règle suivante : « Le poids du récipient et de la tige est environ $^1/_6$ du poids exact du mercure : on doit donc augmenter d'autant la hauteur calculée par la formule (2), car celle-ci a été établie comme si toute la lentille était faite de mercure; le résultat de cette formule est donc seulement les $^5/_6$ du montant réel. »

Essayons de traduire cette règle en formule; appelons P le poids de la partie solide du pendule, et introduisons la valeur littérale $\frac{P}{p}$ du rapport de ce poids à celui du mercure, au lieu de la valeur $^1/_6$ que Beckett admet uniformément pour n'importe quel pendule; le rapport $^5/_6$ devient alors $1 - \frac{P}{p}$, et la règle de Beckett disant que le résultat fourni par la formule (2), c'est-à-dire $2y$, n'est que les $^5/_6$ du montant réel, signifie que :

$$2y = \left(1 - \frac{P}{p}\right) p$$

[1] Fr. Baily. « On the mercurial compensation pendulum. » *Mem. Astr. Soc. London*, 1825, I, p. 381-419. (Cité d'après Beckett, *Treatise on Clocks...*)

[2] Détail curieux à noter : faute d'une théorie suffisante, tenant compte de la partie solide du pendule, les constructeurs se sont efforcés pendant très longtemps de réduire celle-ci le plus possible, au détriment de l'invariabilité du pendule, naturellement; peine bien inutile, d'ailleurs, la masse de la partie solide restant quand même appréciable, et la formule continuant à donner des résultats beaucoup trop faibles. C'est pourquoi les constructeurs ont heureusement renoncé maintenant, pour la plupart, à ce stratagème, quitte à déterminer par tâtonnement la quantité de mercure nécessaire à la compensation.

[3] Edm. Beckett. *Mechanics Magazine*, 5. febr. 1864. (Cité d'après *Treatise on Clocks..*, du même auteur.)

d'où :

$$p = 2y + P \tag{5}$$

La règle consisterait donc simplement à ajouter au résultat de la formule (2) le poids même de la partie solide du pendule. Cette formule (5) repose en somme sur le raisonnement suivant : La quantité de mercure $2y$ est calculée de telle façon qu'elle se compense elle-même ; il faut encore lui ajouter un poids P de mercure pour compenser le poids de la partie solide du pendule.

Il est probable cependant que Beckett ne l'entendait pas ainsi, sans quoi il eût énoncé sa règle précisément sous cette forme très simple. C'est donc plutôt la première partie de sa règle qu'il faut suivre à la lettre, à savoir qu'il faut augmenter la quantité de mercure $2y$ de $^1/_6$ de sa valeur[1], c'est-à-dire poser :

$$p = 2y + \frac{P}{p} 2y \tag{6}$$

Cette nouvelle formule répond au raisonnement suivant : S'il y avait seulement du mercure à compenser, il en faudrait la quantité $2y$; mais, pour tenir compte de la partie solide, il faut augmenter cette quantité ; et il est naturel de l'augmenter dans le rapport du poids total du pendule, $P + p$, au poids du mercure seul, p.

Cette formule (6), laissée sous cette forme, permet de calculer p par approximations successives ; mais on peut aussi en tirer une formule explicite en la résolvant par rapport à p, on obtient :

$$p = y + \sqrt{y^2 + 2Py} \tag{7}$$

(On doit prendre le signe $+$, car l'autre signe donne pour p une valeur négative.)

Deuxième méthode. — Les déductions du paragraphe précédent manquent de rigueur ; il n'est donc pas inutile de les appuyer par d'autres considérations.

Remarquons tout d'abord que l'effet compensateur d'une colonne de mercure n'est pas simplement proportionnel à sa hauteur, mais bien plutôt au carré de sa hauteur. En effet, la dilatation d'une telle colonne revient au fond au transport d'une certaine quantité de mercure. La quantité de mercure

[1] C'est de cette façon que Lorenzoni a interprété la règle de Beckett ; voir Lorenzoni, *loc. cit.*

transportée est naturellement proportionnelle à la quantité de mercure de la colonne; et la hauteur dont elle est déplacée est (en moyenne) la moitié de la hauteur de la colonne. On pourra admettre que l'effet compensateur est approximativement proportionnel à ces deux facteurs et dépend par conséquent du carré de la quantité de mercure.

Nous savons que la quantité de mercure $2y$ se compense elle-même. D'autre part, la quantité de mercure cherchée, p, doit compenser le poids total du pendule $p+P$. Puisque l'effet compensateur de ces quantités est proportionnel à leur carré, et si nous admettons que cet effet compensateur doit aussi être proportionnel au poids à compenser, nous aurons la relation :

$$\left(\frac{2y}{p}\right)^2 = \frac{2y}{p+P}$$

d'où on tire pour p la valeur :

$$p = y + \sqrt{y^2 + 2Py}$$

On retombe donc sur la même formule (7).

Troisième méthode. — On peut encore procéder de la façon suivante[1] :

Supposons toute la masse du pendule concentrée en son centre de gravité, et établissons la condition de compensation du pendule ainsi constitué. Nous conservons les mêmes notations que plus haut et y ajoutons les suivantes: b est la distance de la base du mercure à l'axe de suspension; $\lambda = b - \frac{h}{2}$ est alors la distance du centre de gravité du mercure à la suspension; L est la distance du centre de gravité de la partie solide jusqu'à la suspension; l est la longueur du pendule simple, et aussi, dans notre hypothèse simplificatrice, la distance du centre de gravité du pendule entier à la suspension.

Les positions des trois centres de gravité sont liées par la relation :

$$l(p+P) = p\lambda + PL$$

d'où on tire pour la longueur du pendule:

$$l = \frac{p\lambda + PL}{p+P} \tag{8}$$

[1] Cette démonstration équivaut à celle donnée par M. Keelhoff; *loc. cit.*

Si on y remplace λ par sa valeur $b-\frac{h}{2}$, cettte formule devient :

$$l=\frac{pb-p\frac{h}{2}+\mathrm{PL}}{p+\mathrm{P}}$$

Supposons que la température s'élève de 1°, et soit Δl l'allongement de l qui en résulte. On aura :

$$l+\Delta l=\frac{pb(1+\alpha)-p\frac{h}{2}(1+\beta)+\mathrm{PL}(1+\alpha)}{p+\mathrm{P}}$$

$$=l+\frac{pb\alpha-p\frac{h}{2}\beta+\mathrm{PL}\alpha}{p+\mathrm{P}}$$

On peut supprimer l dans les deux membres, et il reste pour la valeur de l'allongement du pendule :

$$\Delta l=\frac{pb\alpha-p\frac{h}{2}\alpha+\mathrm{PL}\alpha-p\frac{h}{2}(\beta-\alpha)}{p+\mathrm{P}}=l\alpha-\frac{ph\varepsilon}{2(p+\mathrm{P})}$$

Introduisons ici aussi la constante $c=\pi r^2\delta=\frac{p}{h}$. Le résultat obtenu peut s'écrire :

$$\Delta l=l\alpha-\frac{p^2\varepsilon}{2c(p+\mathrm{P})} \qquad (9)$$

Pour que le pendule soit compensé, il faut qu'une élévation de température de 1° n'altère pas sa longueur, c'est-à-dire qu'on ait $\Delta l=0$, d'où :

$$l\alpha=\frac{p^2\varepsilon}{2c(p+\mathrm{P})} \qquad (10)$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation par rapport à p, la quantité de mercure :

$$p^2-2cl\frac{\alpha}{\varepsilon}p-2cl\frac{\alpha}{\varepsilon}\mathrm{P}=0$$

Posons comme auparavant, pour abréger :

$$c\,l\frac{\alpha}{\varepsilon} = y$$

l'équation s'écrit alors :

$$p^2 - 2yp - 2y\mathrm{P} = 0$$

et on en tire :

$$p = y + \sqrt{y^2 + 2\mathrm{P}y}$$

On retrouve donc par cette troisième méthode la formule (7) déjà donnée par les deux autres.

Cette dernière démonstration, un peu plus longue que les précédentes, a le grand avantage de bien mettre en évidence les simplifications et les suppositions sur lesquelles cette formule repose : On ne considère qu'un pendule simple, constitué par le centre de gravité du système, mais on détermine la position de ce centre de gravité en tenant compte, non seulement du mercure, comme pour la formule (2), mais aussi de la partie solide du pendule.

Cette formule de M. Keelhoff, que nous venons d'obtenir par trois méthodes différentes, ne peut, comme la formule actuelle (2), s'appliquer qu'aux pendules du type ordinaire; dans ce cas seulement les centres de gravité du mercure, de la partie solide, et du pendule entier sont suffisamment rapprochés du centre d'oscillation pour qu'on puisse substituer un pendule simple au pendule composé.

3. Simplification proposée pour la formule de M. Keelhoff.

Même dans ce cas du pendule à mercure usuel, la formule (7) n'est qu'approchée; ce fait n'a d'ailleurs pas grand inconvénient en pratique, car il est une autre cause d'erreur beaucoup plus grande que celle qui résulte de l'emploi de la formule (7); elle provient de l'incertitude du coefficient de dilatation de la tige α. Ce coefficient varie beaucoup d'une tige à une autre. M. Riefler[1], en faisant déterminer les coefficients de dilatation des tubes d'acier dont il se servait pour ses pendules, a obtenu des valeurs variant de $10{,}34 \times 10^{-6}$ à $11{,}62 \times 10^{-6}$. Les variations sont donc très grandes, et si le coefficient n'a pas été déterminé spécialement pour une tige,

[1] Riefler. *Loc. cit.*

l'erreur qu'on commet en admettant pour ce coefficient une valeur moyenne peut dépasser $^1/_{20}$ du montant total.

Dans ces conditions, on peut se demander s'il n'y a pas lieu de simplifier encore la formule approchée (7).

Première simplification. — On peut tout d'abord en faire disparaître la racine en procédant comme suit :

$$\begin{aligned} p &= y + \sqrt{y^2 + 2Py} \\ &= y + \sqrt{y^2 + 2Py + P^2 - P^2} \\ &= y + \sqrt{(y+P)^2 - P^2} \\ &= y + (y+P)\sqrt{1 - \left(\frac{P}{y+P}\right)^2} \end{aligned}$$

La racine est maintenant développable en série convergente, car $\frac{P}{y+P} < 1$. Donc :

$$p = y + (y+P)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{P}{y+P}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{P}{y+P}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{P}{y+P}\right)^6 - \dots\right]$$

En pratique, y est toujours supérieur ou au moins égal à P, de sorte que $\frac{P}{y+P} \leq \frac{1}{2}$; il en résulte que le troisième terme du développement, $\frac{1}{8}\left(\frac{P}{y+P}\right)^4$, peut déjà être abandonné, car sa valeur ne dépasse pas $^1/_{100}$ ou $^1/_{200}$ de la valeur totale de p, exactitude à laquelle la formule (7) ne saurait prétendre. Il reste donc :

$$p = y + (y+P)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{P}{y+P}\right)^2\right]$$

qu'on peut aussi écrire :

$$p = 2y + P - \frac{P^2}{2(y+P)}$$

ou encore :

$$p = 2y + P\left(1 - \frac{P}{2(y+P)}\right) \qquad (11)$$

Deuxième simplification. — Cette formule (11) est elle-même inutilement compliquée. Son troisième terme, puisque $P \leqq y$, est toujours plus petit que $^1/_{10}$ du résultat total p. On peut donc, sans inconvénient, remplacer le deuxième terme de la parenthèse par une valeur numérique constante convenablement choisie, ce qui ramène la formule (11) à une forme linéaire très simple.

Voici la valeur $\dfrac{P}{2(y+P)}$ pour quelques pendules de types assez variés :

Pendule de	Frodsham (cité par M. Lorenzoni) .	0,15
»	Dencker (cité par M. Wanach) . .	0,15
»	D. Perret (nouveau modèle) . . .	0,25

Il est préférable d'adopter la valeur la plus grande, c'est-à-dire $0,25 = {}^1/_4$, car nous verrons tout à l'heure que si la formule simplifiée est valable pour une valeur de ce rapport, elle l'est aussi pour des valeurs moindres, tandis qu'elle ne l'est pas pour des valeurs notablement supérieures. C'est pour qu'elle le soit cependant encore pour des valeurs légèrement supérieures qu'on pourrait rencontrer, que nous choisissons la valeur la plus grande. La formule (11) devient alors :

$$p = 2y + {}^3/_4 P$$

Il n'y a plus aucun intérêt à maintenir ici la quantité auxiliaire y. Nous avons donc :

$$p = 2\pi r^2 \delta l \frac{\alpha}{\gamma - 2\alpha_1 - \alpha} + {}^3/_4 P \qquad (12)$$

Lorsque la tige et le vase sont en acier (et c'est bien la solution la meilleure) on a $\alpha = \alpha_1 = 0,000\,011$ en moyenne. On sait de plus que, pour le mercure, $\delta = 13,60$, $\gamma = 0,000\,181$. La formule (12) devient alors, dans le cas d'un pendule battant la seconde ($l = 99^{cm},4$) :

$$p = 631\, r^2 + {}^3/_4 P$$

Valeur des termes négligés. — Il nous reste à montrer que la somme des termes abandonnés dans ces deux simplifications est vraiment négligeable en pratique; il nous faut donc comparer les résultats fournis par les formules (7) et (12). Remarquons tout d'abord que ces deux formules donnent des résultats identiques pour les deux cas spéciaux $P=0$ et $P={}^8/_9 y$. Pour les autres valeurs de P, il y a un écart donné par la différence des deux formules, c'est-à-dire par

$$\sqrt{y^2+2Py}-y-{}^3/_4 P$$

Cherchons le maximum de cette quantité en égalant à zéro sa première dérivée par rapport à P :

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+2Py}}-{}^3/_4=0$$

d'où :

$$4y=3\sqrt{y^2+2Py}$$
$$16y^2=9y^2+18Py$$
$$7y^2=18Py$$

La solution $y=0$ ne saurait correspondre à un maximum. Il reste :

$$7y=18P$$
$$P={}^7/_{18}y$$

L'écart des formules (7) et (12) est donc maximum, entre $P=0$ et $P=y$, pour la valeur $P={}^7/_{18}y$, et cet écart maximum a pour valeur :

$$\sqrt{y^2+{}^7/_9 y^2}-y-{}^{21}/_{72}y={}^4/_3 y-{}^{31}/_{24}y={}^1/_{24}y$$

Donc, tant que P reste compris entre 0 et ${}^8/_9 y$, l'écart des deux formules ne dépasse pas ${}^1/_{24}y$, c'est-à-dire environ ${}^1/_{60}$ du poids total du mercure, et on peut sans inconvénient employer la formule simplifiée (12).

Mais dès que le poids P dépasse sensiblement cette limite ${}^8/_9 y$, il n'en est plus de même : les résultats fournis par les deux formules s'écartent de plus en plus. Calculons donc jusqu'à quelle valeur de P, supérieure à ${}^8/_9 y$, on peut aller sans que l'écart dépasse cette même limite ${}^1/_{24}y$. Pour la trouver, il suffit de poser :

$$\sqrt{y^2+2Py}-y-{}^3/_4 P=\pm{}^1/_{24}y$$

d'où l'on tire :

$$324P^2-36(8\mp1)Py+(1\pm48)y^2=0$$

d'où :

$$P = \frac{8 \mp 1 \pm \sqrt{64 \mp 64}}{18} y$$

En prenant les signes supérieurs de l'équation, on réobtiendrait la valeur $P = {}^{7}/_{18}y$, qui ne nous concerne plus ici. Les signes inférieurs de l'équation donnent :

$$P = \frac{9 \pm 8\sqrt{2}}{18} y$$

La valeur positive présente seule un intérêt pratique. On a donc :

$$P = \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{9}\sqrt{2}\right) y = 1{,}128 y \asymp 1\,{}^{1}/_{8} y$$

Pour résumer toute cette discussion, nous pouvons donc dire que tant que P ne dépasse pas la valeur $1\,{}^{1}/_{8}y$, la formule (12) peut parfaitement remplacer (7), l'erreur commise de ce fait ne dépassant pas ${}^{1}/_{60}$ de la quantité totale du mercure. Mais par contre, dès que P dépasserait cette limite, l'erreur deviendrait rapidement beaucoup plus grande; mais il faut remarquer en même temps que dès que P dépasserait sensiblement cette limite, la formule complète (7) elle-même cesserait d'être applicable, car on s'écarterait trop du cas où la masse du mercure est prépondérante.

Donc, en pratique, il y a lieu d'employer dans tous les cas la formule (12), plus simple, au lieu de la formule (7); et lorsque le poids P dépassera notablement la limite $1\,{}^{1}/_{8}y$, il sera nécessaire de recourir à un calcul exact du pendule composé, d'après la méthode exposée au chapitre suivant.

4. Formule de M. Lorenzoni. Comparaison des résultats.

En 1879 déjà, la question qui nous occupe a fait l'objet d'une étude intéressante de M. G. Lorenzoni[1]. Si, en dépit de l'ordre chronologique, nous n'en avons pas parlé jusqu'ici, c'est que la méthode suivie par M. Lorenzoni pour résoudre ce problème est intermédiaire entre la méthode approchée employée dans les paragraphes précédents et la méthode exacte qui sera développée au chapitre II.

[1] G. Lorenzoni. *Loc. cit.*

M. Lorenzoni pose comme condition de compensation parfaite que le centre de gravité du système ne doit pas être déplacé par un changement de température (c'est exactement ce qu'a fait M. Keelhoff, mais en spécifiant qu'il s'agit d'une simplification); ce faisant, il considère donc son pendule comme un pendule simple.

Mais dans la deuxième partie de sa démonstration, M. Lorenzoni s'écarte de la méthode suivie par M. Keelhoff. Au lieu d'admettre pour la distance de ce centre de gravité à la suspension la longueur du pendule simple synchrone (ce qui semblerait logique), M. Lorenzoni considère son pendule comme composé, et cherche alors la relation qui lie ces deux quantités; cette relation est naturellement compliquée; M. Lorenzoni n'arrive à la simplifier qu'en en diminuant la généralité, en remplaçant certains rapports littéraux par leur valeur numérique dans un cas spécial, en considérant donc un modèle tout particulier de pendule à mercure. Il obtient ainsi la formule:

$$p = 2y + \frac{P' + {}^1/_2 P''}{p} 2y \tag{13}$$

où P' désigne le poids du vase, P'' celui de la tige. Cette formule, comparable à la formule (6), permet de calculer p par approximations successives; on pourrait naturellement en tirer aussi une formule explicite analogue à (7), puis aussi une formule simplifiée du genre de (12).

On voit par ces quelques indications que la théorie qu'a donnée M. Lorenzoni pour la compensation à mercure est un curieux mélange des deux méthodes; il faut sans doute en voir la cause dans ce fait que M. Lorenzoni admet comme condition de compensation parfaite l'invariabilité de position du centre de gravité du pendule aux diverses températures, tandis que (nous aurons l'occasion de le voir encore au chapitre suivant) la condition d'une compensation rigoureuse est l'invariabilité du rapport du moment d'inertie au moment statique.

Il y a lieu de remarquer à ce propos que, alors même que la formule de M. Lorenzoni repose sur une théorie plus compliquée que celle qui a conduit à la formule (12), il n'est nullement certain *a priori* que les résultats qu'elle donne sont préférables. Pour établir (12), on a introduit partout la considération d'un pendule simple, et il y a des chances pour que l'erreur commise de ce fait se compense, en partie du moins; tandis que M. Lorenzoni n'admet cette hypothèse que dans une partie de sa démonstration : il y a alors des chances que l'erreur ainsi commise se retrouve toute entière dans le résultat. La comparaison pratique des deux formules confirme cette manière de voir ; elle montre qu'en effet la formule (12) est préférable à celle de M. Lorenzoni.

Ces remarques critiques sont loin d'enlever toute valeur au travail de M. Lorenzoni ; et la formule qu'il proposait est tellement supérieure aux formules usuelles qu'il est bien regrettable qu'elle ne leur ait pas été substituée, au cours des 30 dernières années, dans les nombreux ouvrages que nous avons cités plus haut.

Pour se rendre compte du degré d'exactitude de ces diverses formules, le mieux est de comparer leurs résultats à ceux du calcul exact. C'est ce que nous avons fait pour quelques pendules :

(La première ligne du tableau suivant se rapporte à un pendule simplifié et schématisé par M. Wanach[1], et dont il a

[1] B. WANACH. *Loc. cit.* Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons ici les schémas et les dimensions des deux pendules à mercure étudiés par M. Wanach. (Pour chaque partie, R désigne le rayon, L la longueur, E la distance du centre de gravité à la suspension.)

1° Pendule ordin.

Rayons :

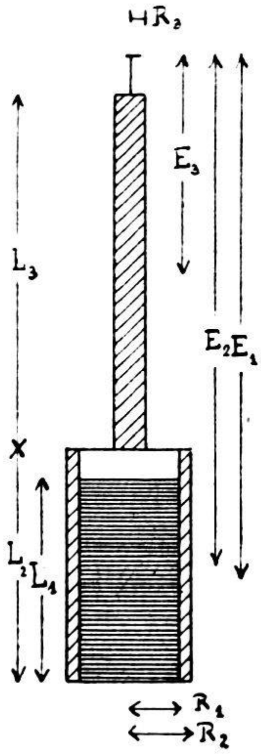
$R_1 = 2,5$
$R_2 = 2,7$
$R_3 = 0,4$

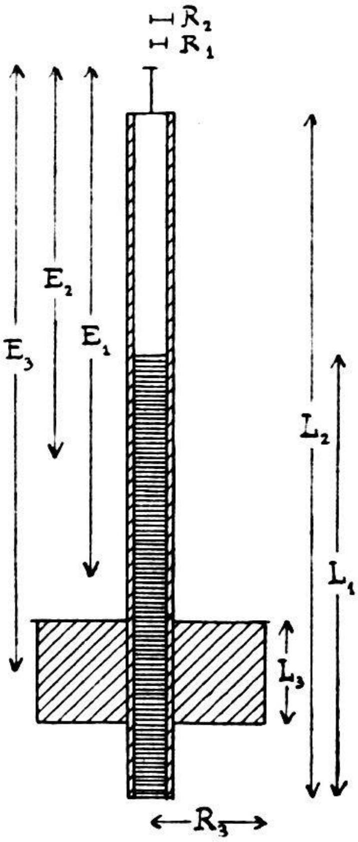
Longueurs :

$L_1 = 17,41$
$L_2 = 20$
$L_3 = 85$

Distances à la suspension :

$E_1 = 99,4$
$E_2 = 98,1$
$E_3 = 45,6$





2° Pendule Riefler

Rayons :

$R_1 = 0,8$
$R_2 = 0,9$
$R_3 = 4,83$

Longueurs :

$L_1 = 76$
$L_2 = 122$
$L_3 = 5,8$

Distances à la suspension :

$E_1 = 88$
$E_2 = 65$
$E_3 = 104.1$

Fig. 1.
Pendule à mercure usuel de Dencker

Fig. 2.
Pendule à mercure de Riefler

(d'après M. B. Wanach).

La densité du mercure est de $D_1 = 13,60$; celle admise pour les parties solides (acier) $D_2 = D_3 = 7,8$.

fait le calcul exact. Les pendules qui suivent ont été observés à l'Observatoire de Neuchâtel[1]; D. Perret 10A et D. Perret 10B désignent un même pendule, calculé pour deux coefficients de dilatation un peu différents. Tous ces pendules sont à tige et vase d'acier.)

	Poids du mercure calculé par la formule actuelle (2)	formule proposée (de M. Keelhoff, simplifiée) (12)	formule de M. Lorenzoni (13)	méthode exacte (chap. II)
Dencker 27 (d'après M. Wanach)	3900 gr	4600 gr	4500 gr	4600 gr
D. Perret 7 . .	4000	5600	5300	5500
D. Perret 9 . .	4300	5900	5700	5900
D. Perret 10 A .	4800	6500	6200	6600
D. Perret 10 B .	4600	6200	6000	6300

Les corrections qu'il faudrait appliquer à ces résultats sont donc:

	Formule actuelle (2)	Formule proposée (de M. Keelhoff, simplifiée) (12)	Formule de M. Lorenzoni (13)
Dencker 27 (d'après M. Wanach)	+ 700 gr	0 gr	+ 100 gr
D. Perret 7 . .	+ 1500	— 100	+ 200
D. Perret 9 . .	+ 1600	0	+ 200
D. Perret 10 A .	+ 1800	+ 100	+ 400
D. Perret 10 B .	+ 1700	+ 100	+ 300

On voit combien la formule actuelle est défectueuse; les deux autres, par contre, donnent des résultats très acceptables. Ceux de la formule de Lorenzoni sont tous un peu trop faibles; ceux de la formule proposée, en revanche, sont exacts en moyenne, et les écarts individuels ne dépassent pas $^1/_{50}$ de la valeur entière. La formule proposée est donc très satisfaisante.

5. Formule de correction.

Il arrive souvent qu'on doive corriger la compensation d'un pendule en tenant compte des marches observées. Le problème qui se pose alors est le suivant : combien de mercure faut-il ajouter ou retrancher pour compenser un coefficient thermique donné.

[1] Pour ces pendules Perret, qui sont tous du même type, le poids de la tige est de 725 gr., le poids de la partie mobile (chope, couvercle, etc.) de 1435 gr., donc le poids total de la partie solide $p = 2160$ gr. Le récipient à mercure (au travers duquel, dans ce modèle, passe la tige du pendule) a les dimensions suivantes: diamètre de la paroi extérieure $5^{cm},4$, diamètre de la paroi intérieure $1^{cm},22$. On a admis pour les densités les mêmes valeurs que M. Wanach, et pour le coefficient de dilatation de l'acier α, $0{,}000\,010_2$ pour P 7, $0{,}000\,010_9$ pour P 9, $0{,}000\,012_0$ pour P 10 A et $0{,}000\,011_6$ pour P 10 B (voir p. 240).

Il faut d'abord établir une relation générale entre la variation de marche d'une horloge et la variation correspondante de la longueur de son pendule (longueur du pendule simple synchrone). On sait que la durée d'oscillation T et la longueur l du pendule sont liées par la relation :

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

on en tire par différenciation logarithmique :

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l} \qquad dT = \frac{T}{2l} dl$$

On peut y remplacer les différentielles par les différences si les puissances supérieures de celles-ci sont négligeables :

$$\Delta T = \frac{T}{2l} \Delta l$$

Soit N le nombre d'oscillations du pendule par jour ; il suffit de multiplier ΔT par N pour obtenir la variation correspondante Δm de la marche diurne :

$$\Delta m = \frac{N T}{2l} \Delta l$$

mais $N T = 86\,400$, donc :

$$\Delta m = \frac{43\,200}{l} \Delta l \tag{14}$$

Ainsi, la relation entre Δm et Δl varie un peu suivant l'endroit où l'on se trouve, puisqu'elle contient la longueur l du pendule simple synchrone ; elle varie aussi suivant le temps que doit battre le pendule, temps moyen ou temps sidéral. Pour un pendule battant la seconde de temps moyen, si nous adoptons $l = 99^{cm},4$, la relation (14) devient :

$$\Delta m = 434,6\, \Delta l$$

et inversément :

$$\Delta l = 0,002\,301\, \Delta m$$

Si, dans ces formules générales, on introduit pour Δm le coefficient thermique qu'on a observé, c'est-à-dire la variation de marche pour une élévation de température de 1°, l'allongement correspondant Δl du pendule s'en déduit immédiatement.

Δl étant ainsi déterminé, voici comment on en déduit d'ordinaire[1] la quantité Δh dont il faut augmenter la hauteur h du mercure. On suppose, ici aussi, que la masse de la partie solide est négligeable par rapport à celle du mercure. L'équation (1) est donc applicable :

$$\Delta l = l\alpha - \frac{h}{2}\varepsilon$$

Si l'on veut que le pendule soit bien compensé pour une hauteur $h + \Delta h$, on aura en outre, d'après (2) :

$$0 = l\alpha - \frac{h + \Delta h}{2}\varepsilon$$

d'où, par soustraction :

$$\Delta l = \frac{1}{2}\varepsilon\Delta h$$

et par suite :

$$\Delta h = \frac{2\Delta l}{\varepsilon}$$

Si on veut la correction en poids, il faut simplement multiplier cette valeur par $c = \pi r^2 \delta$:

$$\Delta p = \frac{2c\Delta l}{\varepsilon} = \frac{2\pi r^2 \delta \Delta l}{\varepsilon} \qquad (15)$$

On peut encore, dans (15), introduire la valeur de Δl d'après (14). Si, de plus, on admet les valeurs numériques $\delta = 13{,}596$ et $\varepsilon = 0{,}000148$ (mercure dans un vase d'acier, la tige du pendule également en acier, $\alpha = 0{,}000011$), on obtient[2] :

$$\Delta p = 1330\, r^2 \Delta m$$

[1] Voir, par exemple, AMBRONN, *loc. cit.*

[2] Cette formule est donnée par ALBRECHT, « Formeln et Hilfstafeln ». Toutefois, dans la dernière édition (4me, 1908) le coefficient a été porté à 1500. Nous verrons tout à l'heure que ce n'est pas encore suffisant.

Ces formules donnent toujours des résultats trop faibles d'environ $^1/_5$ ou $^1/_4$ de leur valeur. On pourrait croire tout d'abord que cet écart provient, ici aussi, de ce qu'on a négligé la partie solide. Il n'en est rien cependant; si l'on tient compte de cette masse et qu'on introduise les simplifications qui nous ont conduit à la formule (12), c'est-à-dire si on se base sur une condition linéaire de compensation, on obtient exactement la même formule. Il est vrai que si on se base sur la condition de compensation non simplifiée, on obtient d'autres formules, plus compliquées; mais elles ne présentent guère d'avantage sur la précédente, car elles donnent aussi des résultats trop faibles. Il semble donc que ces écarts proviennent du fait que nous avons considéré un pendule simple, alors qu'il s'agit en réalité d'un pendule composé.

La solution la plus pratique est d'employer la formule (15), mais d'en multiplier le résultat par 1,22, cette constante ayant été déterminée empiriquement[1]. On a alors :

$$\Delta p = \frac{2.44 \pi r^2 \delta \Delta l}{\varepsilon} \tag{16}$$

et, en particulier, dans le cas de l'acier :

$$\Delta p = 1620 \, r^2 \Delta m$$

Lorenzoni[2] propose une formule de correction qui peut se déduire de la formule usuelle (15) exactement comme la formule proposée (12) se déduisait de la formule usuelle (2), c'est-à-dire en en multipliant le résultat par le rapport $\frac{p+P}{p}$ du poids total du pendule au poids du mercure. On obtient ainsi :

$$\Delta p = 2c \frac{p+P}{p} \frac{\Delta l}{\varepsilon} = 2 \frac{p+P}{p} \cdot \frac{\pi r^2 \delta \Delta l}{\varepsilon} \tag{17}$$

et en particulier, pour une tige et un vase d'acier :

$$\Delta p = 1330 \frac{p+P}{p} r^2 \Delta m$$

[1] On voit au tableau suivant que le rapport de la correction exacte (dernière colonne) à celle fournie par la formule actuelle (1re colonne) est de 1,17 et 1,14, en moyenne 1,16 pour le pendule Dencker, et de 1,23, 1,25 et 1,36, en moyenne 1,28 pour le pendule D. Perret. La moyenne de ces deux résultats est 1,22.

[2] Lorenzoni. *Loc. cit.*

Cette formule de Lorenzoni (17) est bien préférable à la formule usuelle (15); mais elle est un peu moins bonne que la formule empirique plus simple (16). C'est ce que montrent les résultats suivants, donnés par ces formules dans quelques cas particuliers :

	Correction de la quantité de mercure calculée par la formule actuelle (15)	formule proposée (16)	formule de M. Lorenzoni (17)	méthode exacte (chap. II)
Dencker 27 I (d'après M. Wanach)	— 360gr	— 440gr	— 430gr	— 420gr
» II »	— 140	— 170	— 160	— 160
D. Perret 9	+ 350	+ 430	+ 480	+ 430
D. Perret 10 A . . .	+ 870	+1060	+1160	+1090
D. Perret 10 B . . .	— 140	— 170	— 190	— 190

Les corrections qu'il faudrait apporter à ces résultats sont donc :

	Formule actuelle (15)	Formule proposée (16)	Formule de M. Lorenzoni (17)
Dencker 27 I (d'après M. Wanach)	— 60gr	+ 20gr	+ 10gr
» II »	— 20	+ 10	0
D. Perret 9	+ 80	0	— 50
D. Perret 10 A . . .	+220	+ 30	— 70
D. Perret 10 B . . .	— 50	— 20	0

On voit que les erreurs que laisse subsister la formule (16), la meilleure des trois, sont absolument sans importance en pratique. Il est bien entendu que cette formule de correction, elle aussi, n'est valable que pour les pendules à mercure ordinaires.

CHAPITRE II

Calcul exact de la quantité de mercure.

1. Cas d'un vase cylindrique. Formule de M. Wanach.

Les formules établies au chapitre précédent ne sont qu'approchées. Dans le cas où l'on connaît un peu exactement le coefficient de dilatation de la tige du pendule, il y aura avantage à les remplacer par une méthode plus rigoureuse.

Ces formules, d'ailleurs, ne sont applicables qu'à des pendules à mercure ordinaires; elles sont absolument sans valeur pour des pendules à mercure d'autres types, qu'il s'agisse du pendule à mercure de Riefler, par exemple, ou de tout autre nouveau système qu'on serait amené à construire dans la suite. Pour ces pendules-là, il est nécessaire d'abandonner définitivement la supposition du pendule simple et de recourir à la théorie exacte du pendule composé.

Notons qu'on trouve jusqu'ici bien peu d'exemples de calcul exact de compensation. On ne peut guère citer que le calcul par approximations successives de Oudemans[1] (il s'agissait de compenser un pendule à la fois pour les variations de température et pour celles de pression) et plus récemment, le calcul des pendules à mercure de Riefler (la méthode employée par ce dernier a été exposée dans ses grandes lignes par M. E. Anding[2]).

Il faut sans doute voir la principale cause de ce peu d'empressement dans le fait qu'on ne connaît généralement pas avec une précision suffisante une des données indispensables, le coefficient de dilatation de la tige; dès lors, le calcul exact paraît superflu; on se contente d'un calcul approché, quitte à corriger ensuite la compensation d'après les marches observées. Le remède à cette situation n'est pas difficile à trouver, et il est vraiment très désirable qu'on imite de plus en plus l'exemple donné par M. Riefler et qu'on fasse déterminer le coefficient de dilatation de chaque tige; alors seulement le

[1] J.-A.-C. Oudemans. « Ueber die Compensation eines Sekundenpendels für Temperatur und Luftdruck vermittelst eines Quecksilberscylinders und eines Krüger'schen Manometers. » (A. N., 100, 1881, p. 17 et *Zeitschr. f. Instr.*, 1881.)

[2] E. Anding. « Bericht über den Gang einer Riefler'schen Pendeluhr. » (A. N., 133, 1893, p. 217.)

calcul exact pourra permettre d'atteindre du premier coup une compensation pratiquement parfaite et d'éviter ainsi des périodes d'essais qui durent parfois plusieurs années.

Mais il semble que deux autres causes encore ont dissuadé horlogers et astronomes de recourir à cette méthode exacte. C'est tout d'abord que celle-ci donne des formules très compliquées, dont il semble difficile de tirer un résultat assez simple pour être utilisable en pratique. C'est ensuite qu'on a cru nécessaire d'évaluer le moment d'inertie du pendule, opération assez longue et fastidieuse quand la forme de la partie solide n'est pas très simple.

Je me propose de montrer que si l'on emploie une formule due à M. B. Wanach[1], on peut éviter les deux inconvénients que je viens de signaler; et il n'y a dès lors plus aucune raison de ne pas préférer le calcul exact à la méthode approchée.

Il y a lieu tout d'abord de bien se rendre compte du degré d'approximation nécessaire dans les calculs qui vont suivre. On peut admettre que, pour une horloge astronomique installée dans des conditions tant soit peu favorables, l'écart de la température diurne à la température moyenne annuelle ne dépasse guère 10°. Remarquons de plus que des écarts accidentels de $0^s,05$ dans la marche diurne sont fréquents, et qu'un défaut de compensation qui ne produirait pas d'écarts plus grands que celui-là n'aurait plus d'inconvénient. Il suffit donc que le coefficient thermique de l'horloge soit moindre que $0^s,005$. D'autre part un pendule non compensé, à tige d'acier, s'allongerait par degré de $l\alpha = l \times 0{,}000\,011$ environ; son coefficient thermique serait donc, d'après la formule (14) du chapitre précédent, $0^s,48$, donc environ $^1/_2$ s. On voit qu'il suffira de compenser cette quantité à $^1/_{100}$ près pour obtenir l'exactitude de compensation désirée. Il suffit donc en pratique d'évaluer au $^1/_{100}$ près les quantités qui interviennent dans ces calculs.

On peut dès lors négliger, comme on le fait d'ailleurs toujours, les puissances et produits des coefficients de dilatation, puisque le plus grand de ceux-ci, le coefficient de dilatation cubique du mercure, a pour valeur 0,000 181.

On peut aussi ne pas tenir compte du terme du second degré de la dilatation. On a, par exemple, pour le coefficient de dilatation de l'acier fondu (anglais) recuit, d'après Fizeau, la valeur :

$$[1095 + 1{,}52\,(t - 40^\circ)]\,10^{-8}$$

[1] B. Wanach. *Loc. cit.*

Comme nous ne considérons que des écarts de température de 10°, les coefficients de dilatation qui interviendront se rapporteront à des températures s'écartant tout au plus de 5° de la température moyenne. Or, pour 5°, on voit que le coefficient varie d'environ huit unités de la huitième décimale, donc d'une quantité moindre que $^1/_{100}$ du coefficient lui-même. Le rapport des deux termes est du même ordre de grandeur pour les autres métaux qui pourraient être utilisés. Quant au mercure, le coefficient du second terme de sa dilatation est encore beaucoup plus faible par rapport à celui du premier.

Voici maintenant une démonstration, un peu généralisée, de la formule de M. Wanach :

Soient N le moment d'inertie, D le moment statique du pendule composé. La durée d'oscillation est définie par la longueur l du pendule simple synchrone donnée par la formule :

$$l = \frac{N}{D}$$

Ces trois quantités sont en général fonctions de la température t. Pour que le pendule soit compensé, il faut que l ne varie plus avec t, c'est-à-dire que la dérivée $\frac{dl}{dt}$ soit nulle. La condition de compensation d'un pendule quelconque est donc :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{D^2}\left(D\frac{dN}{dt} - N\frac{dD}{dt}\right) = \frac{1}{D}\left(\frac{dN}{dt} - l\frac{dD}{dt}\right) = 0 \qquad (1)$$

Considérons maintenant plus spécialement un pendule à mercure. Soient J le moment d'inertie, S le moment statique de la partie solide du pendule, i le moment d'inertie et s le moment statique du mercure. On a :

$$N = J + i \qquad D = S + s$$

d'où :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{D}\left[\frac{dJ}{dt} + \frac{di}{dt} - l\left(\frac{dS}{dt} + \frac{ds}{dt}\right)\right] = 0 \qquad (1^{\text{bis}})$$

Supposons en outre que la partie solide du pendule, de forme absolument quelconque, est constituée par une seule substance de coefficient de dilatation α.

On sait que le moment d'inertie et le moment statique sont de la forme :

$$J = \Sigma \mu x^2 \qquad S = \Sigma \mu x$$

μ désignant l'élément de masse, x la distance de cet élément à la suspension. (Notons que x n'a pas rigoureusement la même signification dans ces deux formules : dans la première x signifie bien la distance de l'élément à l'axe, dans la seconde, la projection de cette distance sur l'axe de symétrie du pendule. Mais cette distinction n'a pas d'importance pour ce qui va suivre.)

Le coefficient de dilatation de toutes ces distances x étant uniformément α, on a :

$$\frac{dx}{dt} = x\alpha$$

de sorte que :

$$\frac{dJ}{dt} = \Sigma \mu 2 x x \alpha = 2 J \alpha \qquad \frac{dS}{dt} = \Sigma \mu x \alpha = S \alpha$$

On obtient ainsi :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{D}\left| 2J\alpha - lS\alpha + \frac{di}{dt} - l\frac{ds}{dt} \right| = 0 \qquad (2)$$

C'est la condition de compensation d'un pendule à mercure de forme absolument quelconque.

Supposons maintenant que le récipient à mercure soit de forme cylindrique (c'est le cas de tous les pendules à mercure actuellement en usage). On a alors, en appelant h la hauteur et r le rayon du cylindre de mercure, m sa masse, b la distance de sa base à la suspension, en appliquant deux formules connues de la mécanique :

$$i = m\frac{r^2}{4} + m\frac{h^2}{12} + m\left(b - \frac{h}{2}\right)^2 = m\left(\frac{r^2}{4} + b^2 - bh + \frac{h^2}{3}\right)$$

$$s = m\left(b - \frac{h}{2}\right)$$

Or on a naturellement :

$$\frac{dr}{dt} = r\alpha \qquad \frac{db}{dt} = b\alpha$$

Si γ désigne le coefficient de dilatation cubique absolue du mercure, $\gamma - 2\alpha = \beta$ est son coefficient de dilatation en hauteur, dans un vase de dilatation α. Donc on aura :

$$\frac{dh}{dt} = h\beta$$

On en déduit :

$$\frac{di}{dt} = m\left[\left(\frac{r^2}{2} + 2b^2 - bh\right)\alpha - h\left(b - \frac{2h}{3}\right)\beta\right]$$
$$= 2i\alpha - m\left[h\left(b - \frac{2h}{3}\right)\beta - h\left(b = \frac{2h}{3}\right)\alpha\right]$$
$$= 2i\alpha - mh\left(b - \frac{2h}{3}\right)\varepsilon$$

si l'on pose pour abréger : $\varepsilon = \beta - \alpha = \gamma - 3\alpha$.

De même :

$$\frac{ds}{dt} = m\left(b\alpha - \frac{h}{2}\beta\right) = s\alpha - m\left(\frac{h}{2}\beta - \frac{h}{2}\alpha\right)$$
$$\frac{ds}{dt} = s\alpha - m\frac{h}{2}\varepsilon$$

En introduisant ces deux valeurs dans la formule (2), on obtient :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{D}\left[2J\alpha - lS\alpha + 2i\alpha - mh\left(b - \frac{2h}{3}\right)\varepsilon - ls\alpha + lm\frac{h}{2}\varepsilon\right]$$
$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{mh}{D}\left(b - \frac{2h}{3} - \frac{l}{2}\right)\varepsilon \underset{\substack{\text{condition de}\\ \text{compensation}}}{=} 0 \qquad (3)$$

C'est la formule très simple, due à M. Wanach, qu'il s'agissait de démontrer.

2. Applications de la formule de M. Wanach.

La formule de M. Wanach permet de résoudre très commodément les diverses questions qui peuvent se poser au sujet d'une compensation à mercure.

Calcul du coefficient thermique d'un pendule. — Cette formule (3) permet d'abord de calculer le défaut de compensation $\frac{dl}{dt}$ d'un pendule donné, lorsqu'on connaît le coefficient de dilatation α de la substance[1] dont il est construit. Les autres quantités qui interviennent dans la formule (3) peuvent être mesurées directement. Rappelons que $D = S + s$ et que $s = m\left(b - \frac{h}{2}\right)$. Quant à S, moment statique de la partie solide, on peut en déterminer expérimentalement les deux facteurs ($S = LM$). On place cette partie solide horizontalement sur une arête quelconque et on cherche sa position d'équilibre; on mesure alors la distance L qui sépare cette arête (marquant le centre de gravité) du milieu du ressort de suspension (ce milieu marquant assez exactement l'axe même de suspension); on détermine ensuite par une pesée la masse M de cette partie solide: le produit LM est précisément S.

Une fois $\frac{dl}{dt}$ connu, on peut calculer immédiatement le coefficient thermique $\frac{dm}{dt}$ à l'aide de la formule (14), chap. Ier, dans laquelle les dérivées $\frac{dl}{dt}$ et $\frac{dm}{dt}$ peuvent être substituées aux différences Δl et Δm.

Calcul de la quantité de mercure. — La formule (3) détermine la quantité de mercure nécessaire à la compensation. Il ne faudrait guère songer, toutefois, à exprimer cette quantité sous forme explicite, car le résultat serait extrêmement compliqué. Il faut remarquer en effet que l'équation (3) est du troisième degré par rapport à h ou à m (on peut choisir l'une ou l'autre de ces deux quantités comme inconnue, car on ne connaît que leur rapport $\frac{m}{h} = c$). Il faut remarquer de plus que D dépend aussi de h, et en est même une fonction assez compliquée; enfin, la quantité b, elle aussi, est une fonction compliquée de la quantité de mercure (dans les pendules ordinaires seulement). Pour éviter toutes ces complications, on procède par approximations successives de la façon suivante :

[1] On voit facilement que c'est seulement le coefficient de dilatation de la tige qu'il importe de connaître exactement; pour celui de la paroi du vase, une valeur tout approchée suffit, car cette quantité doit être soustraite du coefficient de dilatation du mercure, toujours beaucoup plus grand.

a) Pendule ordinaire. — On détermine comme nous l'avons expliqué ci-dessus S pour deux positions différentes de la partie mobile du pendule (vase ou lentille, déplacés par la vis de réglage); on pourra alors obtenir dans la suite, par simple interpolation, la valeur de S pour une position quelconque de la vis de réglage. On mesure aussi b pour une position déterminée de cette vis. On calcule ensuite la quantité de mercure à l'aide de la formule approchée (12) chap. Ier : on introduit cette quantité de mercure dans le pendule, et on règle approximativement celui-ci au temps qu'il doit battre : une approximation de $^1/_{100}$ suffit ici aussi. On possède alors toutes les données nécessaires pour calculer le défaut de compensation $\frac{dl}{dt}$ du pendule ainsi réglé provisoirement : on procède comme nous l'avons indiqué plus haut. Ce défaut de compensation connu, il n'y a plus qu'à calculer la correction de la quantité de mercure par la formule (15) chap. Ier.

On pourrait évidemment continuer de la sorte, mais ces deux approximations suffiront toujours en pratique : on peut tout au plus calculer encore une fois le défaut de compensation à titre de vérification : on obtient une valeur négligeable.

b) Pendule Riefler. — Il faut modifier la méthode précédente; car les formules (12) et (15) ne sont plus utilisables dans ce cas. On est obligé ici de partir de deux valeurs de h choisies un peu au hasard, si possible de part et d'autre de la vraie valeur, et en tous cas dans son voisinage; on peut souvent fixer ces valeurs par analogie avec des pendules déjà construits. Ces deux valeurs choisies, on règle approximativement le pendule pour chacune d'elles, et on peut alors calculer le défaut de compensation $\frac{dl}{dt}$ du pendule pour ces deux alternatives; on trouve ensuite, par interpolation ou par extrapolation, une meilleure valeur de h. Et on continue ainsi jusqu'à ce que le défaut de compensation du pendule soit suffisamment faible. Le nombre d'approximations nécessaires est un peu plus grand que dans le cas du pendule ordinaire. Notons qu'il n'est pas nécessaire de régler le pendule à chaque approximation, car on peut, par interpolation également, calculer chaque fois la valeur de S à partir des deux valeurs primitives.

Lorsqu'il s'agit, non de compenser un pendule donné, mais de construire un nouveau pendule, on peut, en suivant l'exemple donné par Riefler [1], se donner la hauteur du mercure et prendre pour inconnues la masse de la lentille et sa distance à la suspension. Ce choix des inconnues facilite beaucoup la résolution du problème; et l'emploi de la formule (3) permet encore de simplifier notablement les calculs : il suffit de poser que ces deux inconnues doivent satisfaire à l'équation (3) et à la relation fondamentale $l = \frac{N}{D}$.

Calcul du coefficient de dilatation de la tige. — On peut aussi se servir de la formule (3) pour déterminer α à partir du coefficient thermique observé, $\frac{dm}{dt}$. On calcule d'abord $\frac{dl}{dt}$ par la formule (14), (ces deux dérivées y remplaçant les différences Δl et Δm). Ensuite, on tire la valeur de α de l'équation (3), après y avoir remplacé ε par sa valeur $\gamma - 3\alpha$.

J'ai fait ce calcul pour deux pendules D. Perret. Ce ne sont pas les marches elles-mêmes, mais leurs différences qui ont servi de base au calcul du coefficient thermique; c'est de cette façon que l'effet des variations de la marche avec le temps est le mieux éliminé. La température n'a été lue qu'une fois chaque jour, au moment de la comparaison des horloges, de sorte qu'elle représente sans doute assez peu exactement la température moyenne de la journée. Les coefficients thermiques obtenus sont d'ailleurs incertains pour une autre cause: les observations portent sur des intervalles de temps trop courts, et les variations totales de température n'ont pas été très grandes.

L'horloge D. Perret 9 a été observée pendant un peu plus de trois mois, l'horloge D. Perret 10 a été observée tout d'abord avec $5\,^1/_2$ kg. de mercure, pendant quatre mois, puis avec $6\,^1/_2$ kg., pendant trois mois; chacune de ces deux périodes a fourni une valeur particulière de α. Voici les résultats obtenus [2] :

[1] Voir E. Anding, *loc. cit.*

[2] On a obtenu par mesures directes les quantités suivantes, nécessaires, à côté des valeurs $\frac{dm}{dt}$ ci-dessus, pour le calcul de α :

	P9 et P10 A	P10 B
P	5500 gr.	6500 gr.
p	2160 gr.	2160 gr.
h	$18^{cm},6$	$22^{cm},0$
b	$111^{cm},0$	$112^{cm},0$
L	$85^{cm},8$	$86^{cm},5$
$D = pL + P\left(b - \frac{h}{2}\right)$	745 000	843 000

	$\frac{dm}{dt}$	e. m.	α	e. m.
D. Perret 9	$+0^s,039$	± 12	0,000 0109	± 2
D. Perret 10 A	$+0^s,093$	± 7	0,000 0120	± 1
D. Perret 10 B	$0^s,015$	± 5	0,000 0116	± 1

L'accord des deux valeurs de α pour A et B n'est pas très bon; cependant ce grand écart n'est pas trop anormal, étant donnée l'incertitude des coefficients thermiques dont on est parti; on peut donc admettre pour D. Perret 10 la valeur moyenne $\alpha = 0{,}000011_8$.

Correction de la compensation. — Lorsqu'il s'agit d'appliquer la méthode exacte à la correction d'une compensation, le coefficient thermique étant donné par les observations, on calcule le coefficient de dilatation α comme nous venons de l'exposer. Le calcul de la compensation se fait ensuite comme si ce coefficient de dilatation avait été donné. Dans le cas d'un pendule ordinaire toutefois, ces deux calculs pourront être le plus souvent remplacés par l'application de la formule de correction (15), chap. I^er^, et on n'emploiera (3) qu'à titre de vérification.

Remarques. — Nous avons réussi à résoudre toutes ces questions sans avoir recours à l'évaluation du moment d'inertie de la partie solide du pendule; mais il est bon d'ajouter que la méthode que nous avons suivie revient à déterminer ce moment d'inertie expérimentalement, par le réglage du pendule au temps désiré. Cette détermination repose donc sur la formule $l = \frac{N}{D}$, et il nous reste à établir que celle-ci est bien valable dans les limites d'exactitude que nous nous sommes données.

Trois causes principales pourraient rendre cette formule inexacte: l'amplitude, l'air ambiant, l'effet du ressort de suspension et de l'échappement.

La formule $l = \frac{N}{D}$ est valable pour des oscillations infiniment petites seulement. Mais même si les oscillations atteignaient une amplitude de 3^o, la différence de marche diurne ne serait que de 15 s., ce qui, comparé aux 86 400 s. de la journée, est bien en dessous de la limite de $^1/_{100}$. Ces chiffres concernent un pendule oscillant librement; on sait que pour un pendule suspendu par un ressort et actionné par un échappement, l'effet de l'amplitude sur la durée d'oscillation n'est plus le même; il est cependant du même ordre de grandeur.

L'effet total de l'air ambiant peut être évalué approximativement de la façon suivante : le coefficient barométrique d'un pendule ne dépasse guère $0^s{,}015$; c'est l'effet produit sur la marche diurne par une variation de pression de 1 mm. L'effet total de l'atmosphère ne dépassera sans doute guère $760 \times 0{,}015 = 12$ s. environ, quantité encore moindre que la première.

Evaluer de même l'effet du ressort de suspension et de l'échappement n'est pas facile, mais on peut présumer qu'il est du même ordre de grandeur que les précédents.

On peut d'ailleurs vérifier directement que la somme des trois effets signalés ci-dessus est bien négligeable. Il suffit de déterminer l, pour un même pendule, par les deux méthodes, celle de l'expérience et celle du calcul par la formule $l = \frac{N}{D}$. C'est ce que j'ai fait pour un pendule à mercure ordinaire (D. Perret 10, dans les deux variantes A et B) ; les résultats s'accordent à moins de $^1/_{100}$, ce qui confirme pleinement nos conclusions ; il est d'ailleurs fort probable que la légère différence constatée provient bien plus d'inexactitudes dans les mesures et surtout de simplifications de forme (destinées à faciliter l'évaluation du moment d'inertie) que des trois causes mentionnées plus haut.

Les méthodes exposées dans ce paragraphe sont donc bien exactes.

3. Cas général.

La formule de M. Wanach concerne seulement les pendules à vase cylindrique. Il est vrai que tous les pendules de précision actuellement en usage rentrent dans cette catégorie ; mais on pourrait fort bien être amené à construire (nous verrons plus loin pour quels motifs) des pendules à récipients de forme différente. Il importe donc d'établir une formule analogue à (3), mais plus générale.

Reprenons l'équation (2) :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{D}\left(2\,J\,\alpha - l\,S\,\alpha + \frac{di}{dt} - l\,\frac{ds}{dt}\right) = 0$$

Pour obtenir les valeurs de $\frac{di}{dt}$ et $\frac{ds}{dt}$ dans le cas d'un vase de forme quelconque, remarquons qu'on peut distinguer deux parties dans ces variations. Supposons qu'on ait marqué sur la paroi du vase le niveau auquel atteignait le mercure à la température initiale. Si la température s'élève de 1°, le mercure atteindra un autre niveau, supérieur au premier. Appelons ι le moment d'inertie, σ le moment statique du mercure situé entre ces deux niveaux. On peut alors considérer que $\frac{di}{dt}$ se compose tout d'abord de la variation du moment d'inertie du mercure qui va jusqu'au niveau primitif (variation facile à évaluer, comme nous allons le voir) plus un accroissement du moment d'inertie égal à ι. De même $\frac{ds}{dt}$ se composera de la variation du moment statique du mercure limité par le niveau primitif, plus un accroissement de moment statique σ.

i et s sont de la forme :

$$i = \Sigma \mu x^2 \quad \text{et} \quad s = \Sigma \mu x$$

Si l'on considère seulement la partie du mercure limitée par le niveau initial, on voit facilement que les variations des x sont données par celles du récipient, c'est-à-dire qu'on a :

$$\frac{dx}{dt} = x\alpha$$

Mais la masse de chaque particule, $\mu = v\delta$, varie aussi avec la température, car on a d'une part :

$$\frac{dv}{dt} = v3\alpha$$

et d'autre part :

$$\frac{d\delta}{dt} = -\delta\gamma$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= v\frac{d\delta}{dt} + \delta\frac{dv}{dt} \\ &= -v\delta\gamma + v\delta 3\alpha \\ &= -v\delta(\gamma - 3\alpha) \\ &= -\mu\varepsilon \end{aligned}$$

En ajoutant les deux effets que nous venons de distinguer, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \Sigma\left(\mu 2x\frac{dx}{dt} + x^2\frac{d\mu}{dt}\right) + \iota \\ &= \Sigma(\mu 2x x\alpha - x^2\mu\varepsilon) + \iota \\ &= \Sigma\mu x^2(2\alpha - \varepsilon) + \iota \\ &= i(2\alpha - \varepsilon) + \iota\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \Sigma\left(\mu\frac{dx}{dt} + x\frac{d\mu}{dt}\right) + \sigma \\ &= \Sigma(\mu x\alpha - x\mu\varepsilon) + \sigma \\ &= s(\alpha - \varepsilon) + \sigma\end{aligned}$$

Reste à préciser encore la valeur de ι et de σ, moment d'inertie et moment statique de la couche du mercure situé au-dessus du niveau primitif. Or la masse de ce mercure doit être égale à $m\varepsilon$, produit de la masse totale du mercure m par ε qui est précisément le coefficient de dilatation cubique apparent du mercure.

Appelons ι_1 le moment d'inertie de la surface du mercure (en supposant cette surface de masse 1), par rapport à un axe passant par son centre et parallèle à l'axe de suspension, et soit d la distance de cette surface à l'axe de suspension ; on a, en vertu d'un théorème de mécanique connu :

$$\begin{aligned}\iota &= m\varepsilon\iota_1 + m\varepsilon d^2 \\ &= m(d^2 + \iota_1)\varepsilon\end{aligned}$$

D'autre part on a aussi :

$$\sigma = md\varepsilon$$

En introduisant ces deux valeurs dans les résultats précédents on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= i(2\alpha - \varepsilon) + m(d^2 + \iota_1)\varepsilon \\ &= 2i\alpha + [m(d^2 + \iota_1) - i]\varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= s(\alpha - \varepsilon) + md\varepsilon \\ &= s\alpha + (md - s)\varepsilon\end{aligned}$$

En remplaçant dans la formule (2), on obtient ainsi :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{D}\left\{2J\alpha - lS\alpha + 2i\alpha + [m(d^2 + \iota_1) - i]\varepsilon - ls\alpha - l(md - s)\varepsilon\right\}$$

$$= l\alpha - \frac{1}{D}[i - m(d^2 + \iota_1) + l(md - s)]\varepsilon$$

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{1}{D}[i - ls + m(ld - d^2 - \iota_1)]\varepsilon = 0 \qquad (4)$$

Condition de compensation

La quantité ι_1 est en général très petite par rapport aux autres termes de la parenthèse; en pratique, on peut très souvent la négliger. Lorsque la section du vase, dans le voisinage de la surface, est circulaire et de rayon r, on a $\iota_1 = \frac{1}{4} r^2$.

Cette formule (4) peut rendre exactement les mêmes services que l'équation (3), et toutes les remarques du § 2 restent valables; tant que le vase conserve une formule géométrique simple le calcul de i et s ne présente aucune difficulté.

4. Quelques cas spéciaux.

Lorsqu'il s'agit simplement d'un calcul approché (pour l'étude préalable d'une nouvelle forme de pendule par exemple) on peut supposer tout le mercure concentré sur l'axe du pendule; on est ainsi amené à considérer comme forme du mercure un ensemble de droites et de points matériels de diverses densités. Il faut alors appliquer à chacune des lignes les trois formules suivantes, dans lesquelles a et b sont les distances respectives du sommet et de la base de la ligne jusqu'à la suspension :

$$i = \int_a^b cx^2 dx = \frac{c}{3}(b^3 - a^3)$$

$$s = c(b - a)\frac{b + a}{2} = \frac{c}{2}(b^2 - a^2)$$

$$m = c(b - a)$$

Premier cas (fig. 3). — Supposons d'abord que tout le mercure se trouve concentré en un point, à la distance λ de la suspension, mais que le mercure déplacé par la dilatation soit transporté de ce point à un autre point, représentant la surface libre, et situé à la distance d de la suspension. (Ce cas extrême n'est naturellement pas réalisable, mais on pourrait s'en approcher de très près.)

On a alors simplement :

$$i = m\lambda^2 \qquad s = m\lambda \qquad \iota_1 = 0$$

et la formule (4) devient :

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{m}{D}[\lambda(\lambda - l) + d(l - d)]\varepsilon = 0 \tag{5}$$

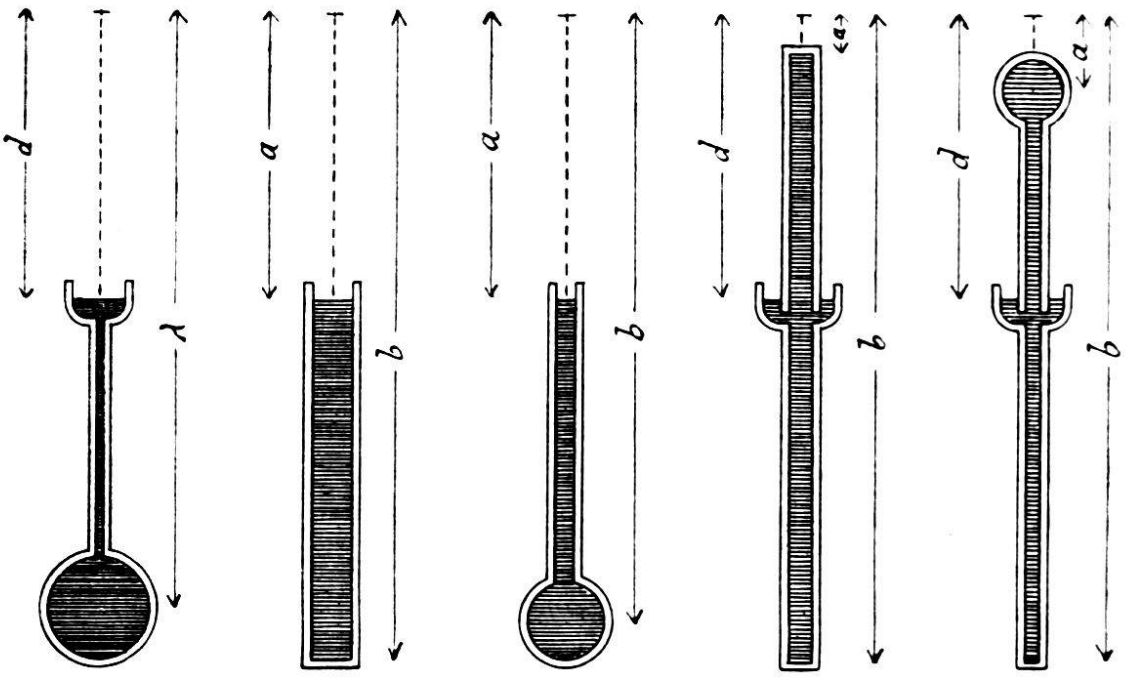


Fig. 3. **Premier cas.** *Fig.* 4. **Deuxième cas.** *Fig.* 5. **Troisième cas.** *Fig.* 6. **Quatrième cas.** *Fig.* 7. **Cinquième cas.**

Schémas de la forme et de la position données au mercure dans cinq cas spéciaux.

Deuxième cas (fig. 4). — Le mercure est concentré en une ligne au sommet de laquelle se trouve la surface libre. (C'est la forme simplifiée de tous les pendules à mercure actuels.) Ici, les valeurs de i, s, m sont simplement celles données au début du paragraphe. On a de plus :

$$d = a \qquad \iota_1 = 0$$

et la formule (4) devient :

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{c}{D}\left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{l}{2}(b^2 - a^2) + a(l - a)(b - a)\right]\varepsilon = 0 \tag{6}$$

En développant les parenthèses, on peut simplifier un peu cette expression :

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{c}{D}(b-a)\left[\frac{b^2}{3} + \frac{ab}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{l}{2}(b+a) + a(l-a)\right]\varepsilon$$

$$= l\alpha - \frac{m}{D}\left[\frac{b^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + \frac{ab}{3} + \frac{la}{2} - \frac{lb}{2}\right]\varepsilon$$

$$= l\alpha - \frac{m}{D}\left[(b-a)\left(\frac{b}{3} + \frac{2a}{3}\right) - (b-a)\frac{l}{2}\right]\varepsilon$$

$$= l\alpha - \frac{m(b-a)}{D}\left(\frac{b}{3} + \frac{2a}{3} - \frac{l}{2}\right)\varepsilon$$

Si l'on y fait encore la substitution $b - a = h$, on réobtient bien la formule de M. Wanach :

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{mh}{D}\left(b - \frac{2h}{3} - \frac{l}{2}\right)\varepsilon = 0 \qquad (6^{\text{bis}})$$

Troisième cas (fig. 5). — Supposons le vase de mercure constitué par une ligne communiquant à son extrémité inférieure avec du mercure concentré en un point. Soit c la densité de la ligne, q la masse du point, m la masse totale du mercure. Il faut introduire dans la formule (4) les valeurs :

$$i = \frac{c}{3}(b^3 - a^3) + qb^2$$

$$s = \frac{c}{2}(b^2 - a^2) + qb$$

$$m = c(b-a) + q$$

$$\iota_1 = 0 \qquad d = a$$

On obtient :

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{1}{D}\left\{c\left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{l}{2}(b^2 - a^2) + a(l-a)(b-a)\right]\right.$$

$$\left. + q[b(b-l) + a(l-a)]\right\}\varepsilon = 0 \qquad (7)$$

On peut, ici aussi, simplifier en développant les parenthèses et en se souvenant que :

$$b - a = h \qquad ch + q = m$$

$$\frac{dl}{dt}=l\alpha-\frac{1}{D}\Big\{c\Big[\frac{1}{3}(b^3-b^3+3b^2h-3bh^2+h^3)-\frac{l}{2}(b^2-b^2+2bh-h^2)$$
$$+(b-h)(l-b+h)h\Big]+q\left[b(b-l)+(b-h)(l-b+h)\right]\Big\}\varepsilon$$

$$=l\alpha-\frac{1}{D}\Big\{ch\Big[b^2-hb+\frac{h^2}{3}-l\left(b-\frac{h}{2}\right)+(b-h)(l-b+h)\Big]$$
$$+q\left[b(b-l)+(b-h)(l-b+h)\right]\Big\}\varepsilon$$

$$=l\alpha-\frac{1}{D}\Big[ch\left(b^2-hb+\frac{h^2}{3}-bl+\frac{hl}{2}+bl-b^2+hb-hl+hb-h^2\right)$$
$$+q\left(b^2-bl+bl-b^2+hb-hl+hb-h^2\right)\Big]\varepsilon$$

$$=l\alpha-\frac{1}{D}\left[ch\left(-\frac{2h^2}{3}-\frac{lh}{2}+bh\right)+q(2bh-hl-h^2)\right]\varepsilon$$

$$=l\alpha-\frac{1}{D}\left[ch^2\left(b-\frac{2h}{3}-\frac{l}{2}\right)+qh(2b-h-l)\right]\varepsilon$$

$$=l\alpha-\frac{1}{D}\left[ch^2\left(b-\frac{2h}{3}-\frac{l}{2}\right)+qh\left(2b-\frac{4h}{3}-l\right)+q\frac{h^2}{3}\right]\varepsilon$$

$$=l\alpha-\frac{h}{D}\left[q\frac{h}{3}+(ch+2q)\left(b-\frac{2h}{3}-\frac{l}{2}\right)\right]\varepsilon$$

d'où finalement :

$$\frac{dl}{dt}=l\alpha-\frac{h}{D}\left[q\frac{h}{3}+(m+q)\left(b-\frac{2h}{3}-\frac{l}{2}\right)\right]\varepsilon=0 \qquad (7^{\text{bis}})$$

Quatrième cas (fig. 6). — Le mercure est concentré sur une ligne, mais la surface libre du mercure, au lieu d'être au sommet de la colonne, est en un autre point, par exemple plus bas, à la distance d de la suspension. (Une telle disposition peut fort bien être réalisée, le mercure étant maintenu au-dessus de son niveau par la pression atmosphérique.)

On a pour i, s et m les mêmes valeurs que dans le deuxième cas, et la formule (4) devient :

$$\frac{dl}{dt}=l\alpha-\frac{c}{D}\left[\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{l}{2}(b^2-a^2)+d(l-d)(b-a)\right]\varepsilon=0 \qquad (8)$$

On peut la simplifier un peu et l'écrire :

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{m}{D}\left[\frac{a^2}{3} + \left(\frac{b}{3} - \frac{l}{2}\right)(a+b) + d(l-d)\right]\varepsilon = 0 \quad (8^{\text{bis}})$$

Cinquième cas (fig. 7). — Même cas que le précédent, seulement la ligne de mercure communique à sa partie supérieure avec du mercure concentré en un point et de masse q. On a donc ici :

$$i = \frac{c}{3}(b^3 - a^3) + q a^2$$

$$s = \frac{c}{2}(b^2 - a^2) + q a$$

$$m = c(b - a) + q$$

ce qui donne :

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{1}{D}\left\{c\left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{l}{2}(b^2 - a^2) + l(l-d)(b-a)\right]\right.$$
$$\left. + q\,[d(l-d) - a(l-a)]\right\}\varepsilon = 0 \quad (9)$$

On ne peut pas simplifier notablement cette formule.

5. Pendules à minimum de mercure.

Ces formules permettent de discuter une question très intéressante : celle de la forme à donner au pendule pour que la quantité de mercure nécessaire à la compensation soit minimum. Cette question n'est pas seulement intéressante au point de vue théorique, mais elle a une certaine importance industrielle, car le prix du mercure intervient pour une bonne part dans le coût d'un pendule compensé.

Premier cas (fig. 3, p. 245). — Considérons d'abord le premier cas du paragraphe précédent, qui est le plus simple. Nous avons obtenu comme condition de compensation l'équation (5) :

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{m}{D}(\lambda^2 - l\lambda + ld - d^2)\varepsilon = 0$$

Supposons maintenant qu'on ait à construire un pendule de ce type battant un temps donné, ce qui revient à dire que l est constant; supposons en outre que ce pendule doive avoir une puissance réglante donnée déterminée par son moment d'inertie N, c'est-à-dire que N, et par conséquent D, doivent aussi être constants. Le produit:

$$m(\lambda^2 - l\lambda + ld - d^2)$$

sera également constant pour tous les pendules compensés satisfaisant à ces conditions. Pour que la masse m du mercure soit minimum, il faut donc que la parenthèse soit maximum; or cette parenthèse est fonction du deuxième degré des deux quantités d et λ, et peut s'écrire:

$$\left(\lambda - \frac{l}{2}\right)^2 - \left(d - \frac{l}{2}\right)^2$$

Il en résulte que cette quantité diminue, et par conséquent que m augmente, au fur et à mesure que d s'écarte de $\frac{l}{2}$, tandis que la quantité considérée augmente, et que m diminue lorsque λ s'écarte de $\frac{l}{2}$.

Donc, pour que la quantité de mercure soit minimum, il faut que la surface libre du mercure soit à la distance $d = \frac{l}{2}$ de la suspension; plus la distance de la surface à la suspension différera de cette valeur, plus la quantité de mercure sera grande. Pour que la quantité de mercure nécessaire à la compensation soit minimum, il faut encore qu'elle se trouve concentrée à une distance aussi grande que possible du milieu du pendule; plus le mercure sera rapproché de ce milieu, moins son effet compensateur sera grand.

En résumé, pour que la quantité de mercure soit minimum il faut que la surface libre soit le plus près possible du milieu du pendule, mais le mercure lui-même le plus loin possible.

Cette règle est d'une application générale; il en est de même de cette autre conséquence, assez inattendue, qu'on peut tirer de ce qui précède: Le pouvoir compensateur est le même pour deux vases de mercure exactement symétriques par rapport au point de distance $\frac{l}{2}$ milieu du pendule; bien entendu, cette symétrie doit concerner, non seulement la forme des récipients, mais aussi la position de la surface libre du mercure.

Deuxième cas (fig. 4, p. 245). — C'est celui de tous les pendules à mercure actuels. La condition de compensation est ici : (6^{bis}).

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{mh}{D}\left(b - \frac{2h}{3} - \frac{l}{2}\right)\varepsilon = 0$$

En procédant comme dans le cas prédédent on voit que, pour que m soit minimum, il faut que la quantité :

$$h\left(b - \frac{2h}{3} - \frac{l}{2}\right)$$

soit maximum. b et h sont les deux variables. On voit immédiatement que cette quantité croît en même temps que b : une des conditious du minimum de m est donc que la base soit aussi éloignée que possible du point de suspension. En pratique toutefois on ne recourra guère à ce moyen pour réduire la quantité de mercure, car on obtiendrait ainsi un pendule plus long, donc plus encombrant, et nécessairement moins compact, partant moins invariable que les pendules ordinaires. De plus, comme nous le verrons au chapitre suivant, l'augmentation de b aurait pour conséquence l'augmentation du coefficient de stratification. Une telle modification présenterait donc plus d'inconvénients que d'avantages.

Pour déterminer la meilleure valeur de h, dérivons par rapport à cette variable et égalons à zéro. On obtient :

$$b - \frac{2}{3}h - \frac{l}{2} - \frac{2}{3}h = 0$$

d'où

$$h = \frac{3}{4}\left(b - \frac{l}{2}\right) \tag{10}$$

La deuxième dérivée a pour valeur $-\frac{4}{3}$; il s'agit donc bien d'un minimum de m.

Ainsi, lorsque la base est donnée, il faut, pour que la quantité de mercure soit minimum, que la colonne s'élève non pas jusqu'au point milieu du pendule $\left(\text{point } \frac{l}{2}\right)$, mais seulement jusqu'aux $^3/_4$ de cette hauteur.

Ce résultat paraît contredire celui du cas précédent ; il n'en est rien toutefois ; il y a simplement compromis entre les deux conditions, ici contradictoires, que le niveau du mercure doit être au milieu du pendule, tandis que le mercure lui-même en doit être aussi éloigné que possible.

La formule (10) permet de constater facilement que le pendule Riefler ne répond pas à cette condition du minimum. D'après M. Riefler lui-même [1], le mercure y atteint une hauteur égale à environ les $^2/_3$ de celle du tube ; comme $b=126$ cm., cela revient à dire que $h=84$ cm. environ. Pour le minimum, il faudrait qu'on ait $h=\frac{3}{4}(126-50)=\frac{3}{4}\cdot 76=57$ cm.

Il est intéressant de voir encore dans quelle proportion la masse du mercure peut être réduite. Nous avons vu que la quantité de mercure est inversement proportionnelle à $h\left(b-\frac{2h}{3}-\frac{l}{2}\right)$. Dans un pendule ordinaire on a approximativement $b=110$, $h=18$, ce qui donne pour ce produit 864. Pour le pendule Riefler, à l'aide des données ci-dessus, on obtient déjà une valeur beaucoup plus forte, 1680. Si, sans changer la base du mercure dans un tel pendule Riefler, on satisfaisait à la condition du minimum, ce produit deviendrait 2166. Cela revient à dire que pour avoir un pendule compensé de même puissance réglante qu'un pendule ordinaire contenant 5000 gr. de mercure, il suffira d'employer, avec le système de M. Riefler, près de 2600 gr., tandis que, pour un pendule à minimum, il ne faudrait plus que 2000 gr. de mercure.

Nous allons voir qu'on peut encore réduire beaucoup plus cette quantité de mercure si on renonce à la forme cylindrique du vase.

Troisième cas (fig. 5, p. 245). — On a comme condition de compensation (7^{bis}) :

$$\frac{dl}{dt}=l\alpha-\frac{h}{D}\left[q\frac{h}{3}+(m+q)\left(b-\frac{2h}{3}-\frac{l}{2}\right)\right]=$$

La quantité qui reste constante est :

$$h\left[q\frac{h}{3}+(m+q)\left(b-\frac{2h}{3}-\frac{l}{2}\right)\right]$$

[1] RIEFLER. *Loc. cit.*

Pour qu'on puisse y mettre m en facteur, posons $\frac{q}{m} = \eta$, rapport de la masse de mercure concentré au point inférieur à la masse totale du mercure.

L'expression considérée devient :

$$m\,h\left[\eta\frac{h}{3} + (1+\eta)\left(b - \frac{2h}{3} - \frac{l}{2}\right)\right]$$

La quantité qui doit être maximum est donc :

$$h\left[\eta\frac{h}{3} + (1+\eta)\left(b - \frac{2h}{3} - \frac{l}{2}\right)\right]$$

ou bien :

$$h\left[(1+\eta)\left(b - \frac{h}{3} - \frac{l}{2}\right) - \frac{h}{3}\right]$$

Les variables sont ici η, b et h. On voit immédiatement que la quantité considérée sera d'autant plus grande que η est plus grand ; pour que la quantité de mercure soit minimum, il faut donc que la quantité de mercure concentrée au point inférieur soit la plus grande partie possible de la masse totale du mercure.

On voit de même que cette quantité croît en même temps que b. Il faut donc, ici aussi, que la base soit le plus bas possible.

La quantité considérée ne dépend pas de façon aussi simple de h ; il nous faut donc égaler la dérivée à zéro pour obtenir la condition du minimum. La quantité considérée peut s'écrire :

$$h\left[(1+\eta)\left(b - \frac{l}{2}\right) - (2+\eta)\frac{h}{3}\right]$$

d'où, en dérivant :

$$(1+\eta)\left(b - \frac{l}{2}\right) - (2+\eta)\frac{2h}{3} = 0$$

d'où :

$$h = \frac{3}{2}\cdot\frac{1+\eta}{2+\eta}\left(b - \frac{l}{2}\right) \tag{11}$$

La quantité $\frac{q}{m} = \eta$ est, par définition, comprise entre 0 et 1.

Lorsque $\eta = 0$, on a affaire au deuxième cas, et la formule donne bien :

$$h = \frac{3}{4}\left(b - \frac{l}{2}\right)$$

tandis que lorsque $\eta = 1$, on a affaire au premier cas, et on retrouve en effet :

$$h = b - \frac{l}{2}$$

On voit donc que dans notre troisième cas h sera toujours comprise entre ces deux valeurs.

Pour évaluer la proportion dans laquelle la quantité de mercure peut être diminuée par une telle disposition, considérons donc le premier cas, qui est simplement un cas limite. Le produit inversement proportionnel à la masse du mercure a ici pour valeur, en prenant la même distance de base que dans le pendule Riefler, $76\left(2 \times 76 - 3 \cdot \frac{76}{3}\right) = 76^2 = 5776$. Un pendule de ce type, ayant même puissance réglante que les pendules précédemment calculés, ne devrait donc contenir que 750 gr.

Les pendules à minimum de mercure que nous avons calculés sont supposés avoir même distance de base que le pendule Riefler ; on peut aussi en calculer de même type, mais ayant même distance de base que le pendule ordinaire, pour que la comparaison avec celui-ci soit plus équitable.

On a alors les valeurs suivantes pour les quantités de mercure nécessaires à la compensation, dans des pendules de même puissance réglante :

		$b = 110$ cm	$b = 126$ cm
Pendules à vase cylindrique :	I ordinaire .	5000 gr.	—
($\eta = 0$)	II de Rieflle̲r	—	2600 gr.
	III à minimum	3200	2000
Pendule à minimum :	(limite irréalisable) .	1200	750
($\eta = 1$)			

Les chiffres correspondant à notre troisième cas seraient donc intermédiaires entre ceux des deux dernières lignes. On voit qu'on pourrait construire des pendules qui, pas plus longs que le pendule de Riefler, ne contiendraient plus que $^1/_4$ ou même $^1/_5$ du mercure nécessaire à la compensation ordinaire.

Nous pouvons considérer cette question comme complètement résolue. Il est inutile d'examiner à part les autres cas, pour les raisons de symétrie signalées plus haut.

CHAPITRE III

Influence de la stratification de la température sur la marche du pendule.

1. Résumé des travaux antérieurs.

Dans un pendule à mercure usuel, le mercure et la tige sont à des hauteurs moyennes différentes; si donc il y a une différence de température entre le haut et le bas du pendule, et si cette différence n'est pas constante, la compensation ne fonctionnera plus régulièrement et la marche de la pendule en sera affectée. Il semble que, dès l'origine, on a vu dans ce fait le principal inconvénient du pendule à mercure; c'est sans doute ce qui lui a fait quelquefois préférer le pendule à gril, pourtant plus compliqué et plus difficile à régler.

Toutefois c'est seulement en ces dernières années qu'on s'est efforcé d'étudier cette influence de façon un peu précise et d'en déterminer la grandeur, soit à partir des marches observées, soit théoriquement. Ces recherches sont encore très peu nombreuses; elles sont d'ailleurs insuffisamment connues; je vais donc en résumer ici les résultats.

Je note tout d'abord qu'il est facile d'évaluer approximativement l'importance de cet effet de la stratification de température sur la marche d'un pendule à mercure ordinaire. La différence des hauteurs moyennes de la tige et du mercure est d'environ $^1/_2$ m. Si donc il se produit une augmentation du gradient (différence de température par mètre de hauteur) de 1^o, le mercure se trouvera à une température trop basse de $0^o,5$. L'effet sur la marche sera le même que si, pour une augmentation de température de $0^o,5$, la compensation n'avait pas du tout fonctionné, c'est-à-dire si le pendule n'avait pas été compensé. Nous avons vu[1] que le coefficient thermique d'un pendule en acier, non compensé, est de $0^s,50$ environ. Le coefficient de stratification d'un pendule à mercure usuel, à tige d'acier, est donc à peu près la moitié de cette quantité, soit $0^s,25$.

Pour tirer parti de cette donnée, il faut encore savoir dans quelles limites varie le gradient. Dans la tour de l'équa-

[1] Voir p. 233.

torial de Berlin[1], le gradient pour 0m,72 de hauteur a varié entre $+0°,25$ et $-0°,15$, donc en tout de 0°,4, ce qui fait 0°,56 de gradient (pour 1 m.). L'effet de cette variation du gradient sur la marche doit donc être d'environ $0^s,25 \times 0,56 = 0^s,14$: assez peu de chose, en somme. Ajoutons que la variation annuelle de la température elle-même était dans ce cas de 14 à 15°.

A l'observatoire de Neuchâtel, dans la tour de l'équatorial également, on a observé que le gradient, pour 60 cm. de hauteur environ, varie de 0°,6. Donc le gradient par mètre y varie d'environ 1°. L'effet de cette variation sur la marche doit être d'à peu près $0^s,25$, donc déjà plus sensible que dans le cas précédent. Ici, la variation totale de température est d'environ 20°.

Dès qu'un local est chauffé, la variation du gradient y est beaucoup plus grande. Ainsi, dans la salle des pendules de l'Institut géodésique de Potsdam[2], salle située en sous-sol et maintenue à une température constante (la température n'y varie pas au cours de l'année de plus de 3°) le gradient varie parfois de 0°,5 d'un jour à l'autre et de 2°,3 pendant l'année. Ces variations de gradient correspondent respectivement à des variations de marche de $0^s,12$ et $0^s,57$.

La variation du gradient est encore plus grande lorsque le chauffage est irrégulier, ainsi que l'aération du local ; elle peut alors atteindre et même dépasser 3°, et l'effet d'une pareille variation sur la marche est de presque 1 s. Il faut d'ailleurs ajouter que le gradient se maintient rarement pendant un jour entier à l'une de ces valeurs extrêmes, de sorte qu'en général les marches diurnes ne sont pas influencées d'autant que cela. Il y a là néanmoins une cause importante d'irrégularités dans la marche d'un pendule à mercure.

La première tentative de détermination d'un coefficient de stratification d'après les observations est sans doute due à M. Max Zwink[3]. Dans son étude des marches de la pendule Tiede 400 de l'observatoire de Berlin, il obtient pour l'effet d'un accroissement du gradient de 1° sur 72 cm. de hauteur la valeur $+1^s,592 \pm 0,115$. Cela donne pour un gradient de 1° (par mètre) la valeur extraordinairement élevée de $+1^s,146 \pm 0,083$ d'effet sur la marche. La faiblesse de l'erreur moyenne par rapport au coefficient lui-même semble mettre

[1] MAX ZWINK. *Die Pendeluhren im lufdicht verschlossenen Raume*, Halle, 1888.
[2] B. WANACH. *Loc. cit.*
[3] *Loc. cit.*

la réalité de celui-ci absolument hors de doute. Malheureusement il s'agit ici, non d'un pendule à mercure, mais d'*un pendule à gril.* Pour un tel pendule, il paraît dès l'abord qu'un effet de la stratification de la température n'est pas admissible, puisque les deux métaux compensateur et compensé se trouvent à la même hauteur. C'est d'ailleurs ce que confirment les calculs rigoureux de M. B. Wanach. Il en résulte que le gros coefficient obtenu par M. Zwink n'est certainement pas réel. Ce résultat factice provient sans doute du fait suivant: Le gradient suit une période annuelle qui, pour l'horloge de Tiede, coïncide à peu près exactement avec la période annuelle de la température elle-même; on le voit facilement en consultant les résultats d'observation publiés par M. Zwink: les maxima et minima de ces deux quantités tombent aux mêmes époques. Il n'est dès lors guère possible de séparer ces deux effets. Les deux coefficients obtenus, l'un pour la température, l'autre pour le gradient, sont justes comme effet total, mais leur rapport ne peut pas être déterminé. C'est un exemple frappant de l'inconvénient qu'il y a à introduire dans les formules de marches des coefficients qui ne sont pas justifiés par d'autres considérations que le désir d'amoindrir les écarts résiduels : on aboutit à des résultats absolument factices, et il faut dans ce cas ne pas trop se fier aux faibles erreurs moyennes.

Un peu plus tard, le constructeur Riefler[1] faisait connaître la disposition qu'il avait adoptée pour ses pendules à mercure. Le mercure y est contenu dans la tige du pendule et est ainsi réparti sur une plus grande hauteur: le tube est rempli de mercure jusqu'aux deux tiers. Un des principaux avantages de cette nouvelle disposition devait être précisément, d'après le constructeur lui-même, d'éviter presque complètement les inconvénients résulant de l'inégalité de la température à diverses hauteurs. Il semble en effet évident à première vue que cet effet doit être considérablement atténué, puisque la différence des hauteurs moyennes du mercure et de la tige est beaucoup moindre que dans les pendules à mercure usuels. Un bon nombre d'horloges de précision furent munies de pendules à mercure de ce nouveau modèle.

C'est précisément par l'étude des marches de l'une d'entre elles (Riefler 20) que M. B. Wanach fut amené à s'occuper de cette question et à lui consacrer un très important mémoire[2].

[1] S. Riefler. « Queksilber Kompensationspendel neuer Konstruktion. » *Zeitschr. f. Instr.*, Bd. 13, 1893, p. 88.

[2] B. Wanach. « Ueber den Einfluss der Temperaturschichtung auf verschiedene Uhrenpendel. » A. N., Bd. 166, Nr. 3967-3968, 1904. Nous avons déjà cité maintes fois cet article au cours du présent travail.

Cette pendule, alors même qu'elle était installée dans la cave des pendules de l'Institut géodésique de Potsdam (local à température à peu près constante), présentait dans sa marche une période annuelle bien marquée. Or, comme nous l'avons dit déjà, si la température est sensiblement constante dans ce local, le gradient par contre y varie beaucoup avec la saison. M. Wanach parvint à établir que c'est bien à cette cause qu'il faut attribuer les variations de marche de cette pendule Riefler, et il déduisit des observations un coefficient de stratification égal à $+0^s,213 \pm 0,014$. Pour un pendule à mercure ordinaire (Dencker 27) se trouvant dans le même local, les observations donnent un coefficient de stratification de $+0^s,14 \pm 0,04$. Les calculs théoriques immédiatement entrepris par M. Wanach donnent de leur côté pour ces deux pendules les coefficients de stratification $+0^s,260$ et $+0^s241$. Le fait que les valeurs observées sont plus faibles que les valeurs théoriques n'a rien d'étonnant, car la différence de température en hauteur est vraisemblablement moins grande dans le pendule bon conducteur de la chaleur que dans l'air ambiant où on la mesure.

Ce travail de M. Wanach contient donc les premières déterminations authentiques du coefficient de stratification, tant à partir des marches observées que par la théorie. Un autre résultat important de ce travail, c'est que M. Riefler s'était trompé dans ses prévisions en construisant son pendule à mercure, puisque l'observation et la théorie s'accordent à montrer que cette nouvelle forme de pendule, loin d'être insensible aux variations du gradient, y est au contraire encore un peu plus sensible que le pendule à mercure ordinaire.

Il est juste d'ajouter que, deux ans plus tôt, M. E.-F. van de Sande Backhuyzen[1], en discutant les marches de l'excellente pendule Hohvü 17 de l'observatoire de Leyde, chercha à expliquer par les variations du gradient les irrégularités de marche qui ne provenaient ni des variations de la température, ni des variations de pression. Toutefois le résultat de ces recherches fut négatif, cette supposition ne diminuant pas les irrégularités résiduelles. Il faut dire que les conditions étaient ici bien moins favorables qu'à Potsdam, où le gradient variait beaucoup plus. L'insuccès de ces recherches ne montre donc pas que l'effet de stratification n'existe pas dans ce cas, mais seulement que, dans les conditions ordinaires, il est fort difficile de le déduire des observations. Ce qui le prouve bien, c'est qu'à Potsdam même, depuis que le chauffage de la cave

[1] E.-F. van de Sande Bäckhuyzen. « Over de periodiciteit..... » et « Voorlooping onderzoek..... » *Versl. Akad. Amst.*, vol. 11, 1902, p. 19, 187 et 357.

aux pendules a été abandonné (pour éviter ces trop grands gradients), il est devenu très difficile de déterminer un peu exactement les coefficients de stratification[1]. Cette difficulté est due à deux causes:

1° Les variations du gradient qu'on observe dans le cabinet d'une horloge à l'aide de deux thermomètres ne sont pas nécessairement celles qui se produisent dans le pendule lui-même. Dans la tige d'un pendule, à cause de la meilleure conductibilité, les différences de température en hauteur sont probablement atténuées: elles sont plus faibles que dans l'air ambiant. D'autre part, des effets de chaleur rayonnante sur le pendule ou sur les thermomètres viennent compliquer la tâche de l'observateur. Il est donc extrêmement difficile de connaître les variations réelles du gradient.

2° D'autre part, il est souvent difficile de séparer l'effet des variations du gradient de celui des variations de la température elle-même. Tandis que les variations barométriques se produisent suivant des périodes toutes différentes et beaucoup plus courtes, ce qui permet de déduire très facilement des marches observées, même pendant un court laps de temps, d'excellentes valeurs du coefficient barométrique d'une horloge, les variations de température et les variations du gradient suivent toutes deux une période annuelle, et il est presque impossible de séparer leurs deux effets dans les marches observées. On peut affirmer que de ce fait la valeur du coefficient thermique d'un pendule à mercure, telle qu'on la déduit des observations, est bien souvent inexacte. Bien souvent aussi, des modifications apparentes de cette quantité sont simplement attribuables à l'effet perturbateur des variations du gradient.

On voit par là que la sensibilité du pendule à mercure vis-à-vis de la stratification de température est un très grand inconvénient: non seulement les variations du gradient entraînent des variations de marche, mais ces variations de gradient se dérobent aux observations; on ne peut donc guère en tenir compte avec succès par le calcul. De plus, cet effet de stratification empêche d'obtenir une valeur exacte du coefficient thermique de l'horloge.

Il est bien naturel dès lors de se demander s'il n'y aurait pas possibilité de construire un pendule à mercure qui serait, comme le pendule à gril, complètement insensible à ces variations du gradient. La chose paraît au premier abord possible: il semble qu'il suffit d'élever suffisamment le vase à mercure

[1] *Jahresbericht des Direktors des K. Geod. Instituts*, 1904-1905, 1905-1906, 1906-1907, 1907-1908, Veröff. Nr. 22, 26, 33, 38.

pour obtenir ce résultat. M. Wanach a abordé aussi cette question et il est arrivé à la conclusion[1] que « le plus court pendule à secondes (acier et mercure) compensé simultanément pour la température et pour la stratification de température aurait plus de $2^m,20$ de longueur et ne serait donc pas utilisable en pratique ». Cette longueur minimum concerne d'ailleurs un cas théorique: la longueur d'un pendule doublement compensé serait en réalité encore plus grande.

Tels sont, en résumé, les principaux résultats des travaux auxquels le présent chapitre fait suite. Je vais tout d'abord y établir des formules aussi simples et commodes que possible pour calculer le coefficient de stratification d'un pendule à mercure de forme quelconque. Je montrerai ensuite que le dernier résultat de M. Wanach est bien exact pour le cas où il a été établi, c'est-à-dire si l'on suppose le vase à mercure de forme cylindrique, et la surface libre du mercure située au sommet de la colonne, mais qu'il ne l'est plus lorsqu'on se place dans d'autres conditions; je montrerai en particulier qu'il est parfaitement possible de construire des pendules à mercure compensés à la fois pour les variations de température et pour celles du gradient[2].

[1] B. Wanach. A. N., 3968, p. 116.

[2] Il semble vraiment que tous ceux qui se sont occupés de cette question d'influence de la stratification de la température sur la marche du pendule devaient se laisser égarer par le simple bon sens. Ainsi, M. W.-A. Nippold, dans son article sur « Ein neues für Temperatur und Luftdruckschwankungen kompensirtes Pendel », *Zeitschr. f. Instr.*, Bd. 9, p. 197, après avoir proposé une forme très ingénieuse de pendule, consistant en deux bras de dilatation inégale, l'un supérieur à la supension et de faible dilatation, l'autre inférieur à la suspension et de dilatation plus grande, ajoute que « puisque les deux métaux différents employés à la compensation ne sont pas, comme dans le pendule à gril, à côté l'un de l'autre, mais l'un au-dessus de l'autre, les variations de la température en hauteur auront ici une plus grande influence perturbatrice ». Pour atténuer cet inconvénient de son nouveau pendule, M. Nippold propose même de le placer dans un cabinet à fermeture non hermétique, et qui serait ventilé.

Le fait qu'un tel pendule doit être très sensible à la stratification de température paraît évident. Et cependant le calcul exact montre qu'il n'en est rien, et qu'on peut même facilement déterminer les dimensions du pendule de façon à ce que cet effet soit entièrement compensé.

La condition de compensation thermique d'un tel pendule (en conservant les notations de M. Nippold) peut s'écrire :

$$2l\,(\varkappa p^2 a + 1) = L\,(\varkappa p a - 1)$$

D'autre part, on trouve aisément comme condition de compensation pour la stratification :

$$2l\,(\varkappa p^3 a + 1) = L\,(\varkappa p^2 a - 1)$$

On voit qu'il suffit de choisir p (rapport des longueurs des deux bras) égal à 1 pour que ces conditions se confondent. Si, dans ce cas, le pendule est compensé pour les variations de température, il le sera en même temps pour les variations du gradient. Cet exemple, venant s'ajouter aux précédents, montre qu'en cette affaire il faut raisonner avec beaucoup de prudence.

2. Calcul du coefficient de stratification.

Voyons d'abord comment on peut calculer le coefficient de stratification d'un pendule à mercure absolument quelconque.

Soit τ la différence de température par unité de hauteur, comptée positivement quand la température augmente de bas en haut. Soit un pendule à mercure quelconque, pour lequel :

$$l = \frac{N}{D} = \frac{J+i}{S+s}$$

Par dérivation, on obtient l'équation suivante, analogue à la formule (1^{bis}) du chapitre précédent :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{D}\left[\frac{dJ}{d\tau} + \frac{di}{d\tau} - l\left(\frac{dS}{d\tau} + \frac{ds}{d\tau}\right)\right] \qquad (1)$$

Le moment d'inertie et le moment statique de la partie solide du pendule sont de la forme :

$$J = \Sigma \mu x^2 \qquad S = \Sigma \mu x$$

Nous supposerons (car on n'a pas besoin dans cette question d'une approximation très grande) que toute la matière du pendule est concentrée dans un même plan passant par l'axe de suspension, et vertical quand le pendule est au repos. Grâce à cette simplification, les quantités x figurant dans les deux formules ci-dessus sont bien identiques entre elles.

Or on a :

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{x^2}{2}\alpha$$

car la température moyenne de la longueur x sera $-\frac{x}{2}d\tau$ si la température est supposée nulle à la suspension. On aura par suite :

$$\frac{dJ}{d\tau} = \Sigma \mu 2x\left(-\frac{x^2}{2}\alpha\right) = -\Sigma \mu x^3 \alpha = -K\alpha$$

si l'on introduit la quantité auxiliaire :

$$K = \Sigma \mu x^3$$

Et de même :

$$\frac{dS}{d\tau} = \Sigma\mu\left(-\frac{x^2}{2}\alpha\right) = -\Sigma\frac{\mu}{2}x^2\alpha = -\frac{1}{2}J\alpha$$

En introduisant ces valeurs dans (1) on obtient :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{1}{D}\left[-K\alpha + \frac{l}{2}J\alpha + \frac{di}{d\tau} - l\frac{ds}{d\tau}\right] \qquad (2)$$

Reste à remplacer dans cette formule $\frac{di}{d\tau}$ et $\frac{ds}{d\tau}$ par leurs valeurs. Nous nous servirons ici d'un raisonnement analogue à celui qui nous a permis d'établir la formule (3) du chapitre précédent.

Les quantités i et s sont de la forme :

$$i = \Sigma\mu x^2 \qquad s = \Sigma\mu x$$

On peut distinguer deux parties dans la variation de ces quantités. La première partie s'obtient en supposant que, lorsque la stratification de température $d\tau$ se produit, le mercure continue à arriver au même niveau, qu'on s'imagine repéré sur la paroi du vase. Mais en réalité le mercure est, par suite d'une variation positive du gradient, à une température inférieure à celle de la suspension ; il s'est donc contracté (beaucoup plus que le récipient qui le contient) et n'atteint plus à son niveau primitif ; il en résulte une diminution ι_2 de i et une diminution σ_2 de s, qui constituent les secondes parties des variations de ces deux quantités.

Pour le calcul des premières parties on a simplement :

$$\frac{dx}{d\tau} = x\left(-\frac{x}{2}\alpha\right) = -\frac{x^2}{2}\alpha$$

De plus, puisque $\mu = v\delta$ (volume $\times$ densité d'un élément de masse de mercure) :

$$\frac{d\mu}{d\tau} = v\frac{d\delta}{d\tau} + \delta\frac{dv}{d\tau}$$

mais on a :

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \delta(x\gamma) = x\delta\gamma$$

$$\frac{dv}{d\tau} = v(-x3\alpha) = -3vx\alpha$$

donc on trouve :

$$\frac{d\mu}{d\tau} = xv\delta(\gamma - 3\alpha) = \mu x\varepsilon$$

Ces valeurs préliminaires étant connues, on peut calculer facilement $\frac{di}{d\tau}$ et $\frac{ds}{d\tau}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{di}{d\tau} &= \Sigma\left(\mu 2x\frac{dx}{d\tau} + x^2\frac{d\mu}{d\tau}\right) - \iota_2 \\ &= \Sigma\left[2\mu x\left(-\frac{x^2}{2}\alpha\right) + x^2\mu x\varepsilon\right] - \iota_2 \\ &= \Sigma\mu x^3(\varepsilon - \alpha) - \iota_2\end{aligned}$$

Si l'on pose pour abréger, et par analogie :

$$\Sigma\mu x^3 = k$$

notre expression devient :

$$\frac{di}{d\tau} = k(\varepsilon - \alpha) - \iota_2$$

On trouve de même :

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\tau} &= \Sigma\left(\mu\frac{dx}{d\tau} + x\frac{d\mu}{d\tau}\right) - \sigma_2 \\ &= \Sigma\left[\mu\left(-\frac{x^2}{2}\alpha\right) + x\mu x\varepsilon\right] - \sigma_2 \\ &= \Sigma\mu x^2\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2}\right) - \sigma_2 \\ &= i\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2}\right) - \sigma_2\end{aligned}$$

Reste encore à remplacer ι_2 et σ_2 par leurs valeurs. Nous venons de voir que $\frac{d\mu}{d\tau}=\mu x\varepsilon$. Si le mercure atteignait encore son niveau primitif, sa masse aurait donc dû augmenter de $\Sigma\mu x\varepsilon=s\varepsilon$; en réalité, la masse est restée constante; $s\varepsilon$ est donc la quantité de mercure qui paraît manquer (par rapport au niveau primitif). σ_2 et ι_2 sont par définition la diminution du moment statique et la diminution du moment d'inertie dues à cette diminution toute fictive de la masse du mercure. On a donc:

$$\sigma_2=sd\varepsilon \qquad \iota_2=s(\iota_1+d^2)\varepsilon$$

d étant la distance du niveau du mercure à la suspension, ι_1 étant le moment d'inertie de la surface du mercure (supposée de masse 1) par rapport à un axe contenu dans la surface et parallèle à l'axe de suspension. Cette quantité s'annule si on suppose, comme nous l'avons fait dans tout ce chapitre, que la masse du pendule est tout entière concentrée dans un plan vertical passant par l'axe de suspension. Alors on a plus simplement:

$$\iota_2=sd^2\varepsilon$$

D'où finalement les valeurs cherchées:

$$\frac{di}{d\tau}=k(\varepsilon-\alpha)-sd^2\varepsilon$$

$$\frac{ds}{d\tau}=i\left(\varepsilon-\frac{\alpha}{2}\right)-sd\varepsilon$$

Si nous introduisons ces valeurs dans l'équation de stratification (2), celle-ci devient:

$$\frac{dl}{d\tau}=\frac{1}{D}\left[-K\alpha+\frac{l}{2}J\alpha+k(\varepsilon-\alpha)-sd^2\varepsilon-li\left(\varepsilon-\frac{\alpha}{2}\right)+lsd\varepsilon\right]$$

qu'on peut écrire:

$$\frac{dl}{d\tau}=\frac{l^2}{2}\alpha+\frac{1}{D}\left[-G\alpha+\{k-li+sd(l-d)\}\varepsilon\right] \qquad (3)$$

en posant:

$$K+k=G$$

Telle est la formule tout à fait générale pour le calcul du coefficient de stratification d'un pendule à mercure. Il y a quelquefois intérêt à laisser G séparé en K et k. Cette formule s'écrit alors :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l^2}{2}\alpha - \frac{1}{D}\left[K\alpha - k(\varepsilon - \alpha) + \{li - sd(l-d)\}\varepsilon\right] \qquad (4)$$

3. Quelques cas spéciaux.

De même que nous avons tiré de la condition générale de compensation quelques formules spéciales concernant certains types bien déterminés de pendules à mercure, nous pourrons spécialiser aussi cette formule (4). Il y aura lieu d'employer, pour une droite matérielle quelconque située sur l'axe du pendule, à côté des valeurs déjà utilisées plus haut :

$$i = \frac{c}{3}(b^3 - a^3)$$

$$s = \frac{c}{2}(b^2 - a^2)$$

$$m = c(b - a)$$

la nouvelle formule :

$$k = \int_a^b cx^3\,dx = \frac{c}{4}\Big|x^4\Big|_a^b = \frac{c}{4}(b^4 - a^4)$$

Nous allons reprendre successivement les cinq cas particuliers étudiés déjà au chapitre précédent.

Premier cas (fig. 3, p. 245). — On a simplement $k = m\lambda^3$, et la formule (4) devient :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l^2}{2}\alpha - \frac{1}{D}\left[K\alpha - m\lambda^3(\varepsilon - \alpha) + \{lm\lambda^2 - dm\lambda(l-d)\}\varepsilon\right]$$

ou bien :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l^2}{2}\alpha - \frac{1}{D}\left(K\alpha - m\lambda\{\lambda^2(\varepsilon - \alpha) - [l\lambda - d(l-d)]\varepsilon\}\right) \qquad (5)$$

Deuxième cas (fig. 4, p. 245). — On a : $d = a$, et, pour k, la valeur donnée plus haut. La formule (4) donne :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l^2}{2}\alpha - \frac{1}{D}\left(K\alpha - c\left\{\frac{b^4 - a^4}{4}(\varepsilon - \alpha) - \left[l\frac{b^3 - a^3}{3} - a(l-a)\frac{b^2 - a^2}{2}\right]\varepsilon\right\}\right) \tag{6}$$

On peut en déduire une formule analogue à la formule (6 bis) du chapitre précédent, par quelques transformations :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l^2}{2}\alpha - \frac{1}{D}\left(K\alpha + m\left\{\frac{b^3 + ab^2 + a^2b + a^3}{4}\alpha + \left[l\frac{b^2 + ab + a^2}{3} - a(l-a)\frac{b+a}{2} - \frac{b^3 + ab^2 + a^2b + a^3}{4}\right]\varepsilon\right\}\right)$$

mais :

$$\frac{b^3 + ab^2 + a^2b + a^3}{4} = \frac{1}{4}(b^3 + b^3 - b^2h + b^3 - 2b^2h + bh^2 + b^3 - 3b^2h + 3bh^2 - h^3)$$
$$= b^3 - \frac{3}{2}b^2h + bh^2 - \frac{h^3}{4}$$

de même :

$$l\frac{b^2 + ab + a^2}{3} - a(l-a)\frac{b+a}{2} = l\frac{b^2 + b^2 - bh + b^2 - 2bh + h^2}{3}$$
$$- l\frac{b^2 - bh + b^2 - 2bh + h^2}{2} + \frac{b^3 - 2b^2h + bh^2 + b^3 - 3b^2h + 3bh^2 - h^3}{2}$$
$$= l\left(\frac{bh}{2} - \frac{h^2}{6}\right) + b^3 - \frac{5}{2}b^2h + 2bh^2 - \frac{h^3}{2}$$
$$= \frac{lh}{2}\left(b - \frac{h}{3}\right) + b^3 - \frac{5}{2}b^2h + 2bh^2 - \frac{h^3}{2}$$

donc :

$$[\;] = \frac{lh}{2}\left(b - \frac{h}{3}\right) - b^2h + bh^2 - \frac{h^3}{4} = h\left[\frac{l}{2}\left(b - \frac{h}{3}\right) - \left(b - \frac{h}{2}\right)^2\right]$$

et en introduisant ces valeurs dans (6) :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l^2}{2}\alpha - \frac{1}{D}\left(K\alpha + m\left\{\left(b^3 - \frac{3}{2}b^2h + bh^2 - \frac{h^3}{4}\right)\alpha + h\left[\frac{l}{2}\left(b - \frac{h}{3}\right) - \left(b - \frac{h}{2}\right)^2\right]\varepsilon\right\}\right) \tag{6 bis}$$

Cette formule est déjà passablement compliquée; les formules analogues pour les cas suivants le seraient encore plus: nous renoncerons donc désormais à cette transformation.

Pour tous les pendules à mercure actuels, la formule (6), ainsi que (6^{bis}), permet de calculer le coefficient de stratification. Au premier abord, la formule (6) paraît plus avantageuse. Toutefois, pour les pendules à mercure ordinaires, il est bon de noter qu'il faut conduire le calcul avec plus de chiffres qu'on n'en désire d'exacts dans le résultat, car, au cours de ce calcul, on doit faire des différences de termes à peu près égaux.

La formule (6^{bis}) présente ce même inconvénient, mais à un moindre degré. Pour les pendules à mercure ordinaires, cette dernière formule est donc plus avantageuse.

La quantité K qui figure dans ces deux formules dépend naturellement de la forme de la partie solide du pendule, forme qui varie beaucoup d'un pendule à l'autre. Il faut donc calculer à nouveau cette quantité pour chaque type de pendule. On pourra simplifier ce calcul en remplaçant la partie solide du pendule par une forme plus simple mais équivalente, composée par exemple exclusivement de droites et de points matériels.

A titre de vérification, j'ai fait l'essai de ces deux formules pour les deux pendules à mercure Riefler 20 et Denker 27, tels qu'ils ont été légèrement simplifiés et schématisés, puis calculés exactement par M. B. Wanach[1]. Pour le calcul de K, j'ai supposé que la masse de la partie solide était, comme celle du mercure, concentrée dans la ligne centrale du pendule. J'ai fait ce calcul, d'abord très approximativement, avec une table de multiplication de Crelle (trois chiffres significatifs), puis un peu plus soigneusement, à 5 décimales. Voici les résultats obtenus:

	Pendule Riefler (n° 20) $\frac{dl}{d\tau}=$	Pendule ordinaire (Denker 27) $\frac{dl}{d\tau}=$
Calcul avec trois chiffres:		
Formule (6)	$0{,}058_7$	$0{,}068_2$!
» (6^{bis})	$0{,}058_9$	$0{,}056_4$
Calcul avec cinq chiffres:		
Formule (6)	$0{,}059_{96}$	$0{,}056_{86}$
» (6^{bis})	$0{,}059_{95}$	$0{,}056_{14}$
Valeur exacte, calculée par M. Wanach	$0{,}059_{86}$	$0{,}055_{56}$

[1] *Loc. cit.* Voir aussi les fig. 1 et 2 et les données numériques de la p. 226.

On voit que, pour le pendule Riefler, l'accord est bon. Par contre, la valeur fournie pour le pendule ordinaire par la formule (6), calculée avec trois chiffres significatifs seulement, est absolument inacceptable : nous en avons déjà indiqué la cause. Le calcul par la même formule, avec cinq décimales, donne toute l'exactitude désirable, car la connaissance du coefficient de stratification jusqu'à $^1/_{20}$ ou $^1/_{30}$ de sa valeur est toujours suffisante. Les chiffres ci-dessus confirment donc que nous étions bien autorisés à négliger les dimensions horizontales des pendules en supposant toute la masse concentrée dans le plan de symétrie : en effet, il n'y a pas de différences systématiques de quelque importance entre les résultats fournis par les formules (6) et (6^{bis}) et ceux calculés par M. Wanach sans cette simplification.

Des valeurs de $\frac{dl}{d\tau}$ ainsi obtenues, on peut immédiatement déduire les coefficients de stratification proprement dits, à l'aide de la formule (14) qu'on suppose divisée par $d\tau$. Les valeurs de M. Wanach donnent ainsi les nombres que nous avons déjà cités plus haut $\frac{dm}{d\tau} = +\,0^{s},260$ pour le pendule Riefler, et $\frac{dm}{d\tau} = +\,0^{s},241$ pour le pendule à mercure ordinaire (effet d'un gradient de 1° par mètre sur la marche). L'évaluation tout approximative du début de ce chapitre se trouve ainsi confirmée, à savoir que, pour tous les pendules à mercure actuels battant la seconde, le coefficient de stratification est d'environ $+\,0^{s},25$.

Troisième cas (fig. 5, p. 245). — On a ici :

$$k = \frac{c}{4}(b^4 - a^4) + q\,b^3,$$

et (4) devient :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l^2}{2}\alpha - \frac{1}{D}\left(K\alpha - c\left\{\frac{1}{4}(b^4 - a^4)(\varepsilon - \alpha) - \left[\frac{l}{3}(b^3 - a^3) - \frac{a}{2}(l - a)(b^2 - a^2)\right]\varepsilon\right\} - q\,b\left\{b^3(\varepsilon - \alpha) - [l\,b - a(l - a)]\,\varepsilon\right\}\right) \qquad (7)$$

Quatrième cas (fig. 6, p. 245). — k, i, s ont ici mêmes valeurs que dans le deuxième cas ; la seule différence est que d reste une grandeur indépendante. (4) devient :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l^2}{2}\alpha - \frac{1}{\mathrm{D}}\left(\mathrm{K}\alpha - c\left\{\frac{1}{4}(b^4 - a^4)(\varepsilon - \alpha) - \left[\frac{l}{3}(b^3 - a^3) - \frac{d}{2}(l-d)(b^2 - a^2)\right]\varepsilon\right\}\right) \tag{8}$$

Cinquième cas (fig. 7, p. 245). — Ici :

$$k = \frac{c}{4}(b^4 - a^4) + qa^3,$$

et on a :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l^2}{2}\alpha - \frac{1}{\mathrm{D}}\left(\mathrm{K}\alpha - c\left\{\frac{1}{4}(b^4 - a^4)(\varepsilon - \alpha) - \left[\frac{l}{3}(b^3 - a^3) - \frac{d}{2}(l-d)(b^2 - a^2)\right]\varepsilon\right\} - qa\left\{a^2(\varepsilon - \alpha) - [la - d(l-d)]\varepsilon\right\}\right) \tag{9}$$

4. Influence possible de la stratification sur le coefficient thermique.

Nous avons dit plus haut que les variations de stratification observées à Berlin par M. Zwink[1] présentent une période annuelle qui concorde presque exactement avec celle des variations de la température elle-même. Si ce phénomène était général, il entraînerait, pour tous les pendules à mercure actuels qui ont, à peu de chose près, le même coefficient de stratification très élevé, un défaut de compensation. Il y aurait lieu de tenir compte de ce fait dans le calcul de cette compensation thermique : on pourrait en effet s'arranger pour que celle-ci compense du même coup la partie de l'effet de stratification qui varie proportionnellement à la température.

Voyons d'abord, d'après les observations de M. Zwink, quelle est la grandeur des quantités dont il s'agit. En me servant des températures extrêmes observées chaque année et du gradient observé en même temps, j'obtiens que, pour une variation moyenne de 14°,5, ce gradient varie de 0°,249,

[1] *Loc. cit.*

sur une hauteur de $0^m,72$. On en déduit qu'une augmentation de température de 1^o entraîne un gradient de $0^o,024$ par mètre de hauteur. Or nous avons vu que le coefficient de stratification des pendules à mercure actuels est d'environ $^1/_4$ de seconde, pour un gradient de 1^o par mètre. Donc notre augmentation de température de 1^o produira ainsi indirectement un changement de marche de $\frac{1}{4} \times 0{,}024 = 0^s{,}006$, c'est-à-dire altérera d'autant le coefficient thermique. Cette quantité est à peine supérieure à la limite des quantités que nous étions convenu de négliger.

Pour savoir si cette coïncidence des périodes des deux phénomènes est générale, j'ai pu encore utiliser les observations de température faites à la pendule Hipp installée dans la tour de l'équatorial à l'Observatoire de Neuchâtel. La différence des températures extrêmes a été ici en moyenne de $20^o,0$ et la variation moyenne correspondante du gradient : $0^o,187$ pour $0^m,60$ de hauteur; cela donne, pour une variation de température de 1^o, une variation du gradient de $0^o,015$ par mètre, donc notablement plus faible que dans le cas de M. Zwink. L'effet systématique de la stratification sur la compensation est ici négligeable. Il n'y a donc pas lieu de tenir compte de cette influence d'une façon générale.

Ceci n'infirme d'ailleurs en rien ce que nous avons dit plus haut de l'influence de la stratification sur la marche, car il ne s'agit ici que de la partie de cet effet qui a même période que la température, et pas de l'effet entier. Il est curieux de noter en particulier que (comme nous l'avons déjà dit) la variation totale du gradient est plus grande dans le second des cas ci-dessus que dans le premier, tandis que la partie de cette variation du gradient qui coïncide avec celle de la température est plus faible dans le second que dans le premier.

5. Compensation de l'effet de stratification.

Les formules établies jusqu'ici nous permettent d'aborder maintenant l'étude d'un problème particulièrement intéressant et important : est-il possible de construire un pendule à mercure compensé simultanément pour les variations de la température et pour les variations de stratification de la température. Si une semblable construction est possible, il faut évidemment s'empresser de l'adopter, car elle supprimerait le principal, on peut presque dire le seul inconvénient de la compensation à mercure.

On pourrait croire au premier abord que rien ne s'oppose à ce perfectionnement : il suffit, semble-t-il, de placer le mercure assez haut pour que l'effet de stratification disparaisse. En réalité, la question est loin d'être aussi simple ; c'est que, au fur et à mesure qu'on élève le mercure, son pouvoir compensateur diminue, et on est obligé d'en augmenter la masse. D'ailleurs, on ne peut pas élever le mercure indéfiniment, puisque, comme nous l'avons vu déjà, tout le mercure situé au-dessus du milieu du pendule (point à la distance $\frac{l}{2}$ de la suspension) est non seulement inutile, mais nuisible à la compensation. D'autre part, le fait de transporter ainsi le mercure vers le milieu du pendule entraîne une autre conséquence : la partie solide doit alors être en grande partie concentrée en un point très bas, pour que le pendule entier continue à battre la seconde ; on aboutit donc, lorsqu'on veut construire de tels pendules doublement compensés, à des formes tellement allongées qu'on ne peut pas songer à les réaliser dans la pratique.

La question qui se pose est donc celle-ci : quelle sera la longueur minimum d'un tel pendule doublement compensé ? Nous étudierons tout d'abord le cas d'un vase cylindrique : c'est le deuxième des cas traités au § 4 du chapitre II et au § 3 du présent chapitre. Les résultats qui y ont été établis sont ici immédiatement utilisables.

La condition de compensation pour la température est (formule (6), chap. II) :

$$l\alpha = \frac{c}{D}\left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{l}{2}(b^2 - a^2) + a(l - a)(b - a)\right]\varepsilon$$

et celle de la compensation de la stratification (formule (6) du présent chapitre) :

$$\frac{l^2}{2}\alpha = \frac{1}{D}\left(K\alpha - c\left\{\frac{b^4 - a^4}{4}(\varepsilon - \alpha) - \left[l\frac{b^3 - a^3}{3} - a(l - a)\frac{b^2 - a^2}{2}\right]\varepsilon\right\}\right)$$

Nous ne diminuerons en rien la généralité de notre démonstration si nous supposons que notre pendule a une longueur réduite, l, donnée, ainsi qu'un moment d'inertie, N, donné ; car, pour passer d'un tel pendule à un pendule de longueur quelconque, il suffira d'en multiplier toutes les dimensions par un rapport déterminé ; si l'un de ces pendules est doublement compensé, l'autre le sera aussi, et d'autre part, pour passer d'un tel pendule à un pendule d'un autre moment d'inertie, il suffira de multiplier les différentes masses par un facteur constant, la double compensation n'étant pas affectée par une telle transformation, tant qu'on néglige, comme il est convenu, les dimensions transversales du pendule. Nous pouvons donc poser, pour simplifier les calculs, $l = 1$ et $N = 1$. Alors, d'après la formule $l = \frac{N}{D}$, on a aussi $D = 1$, et nous devons ajouter aux deux équations ci-dessus les deux nouvelles équations :

$$D = S + \frac{c}{2}(b^2 - a^2) = 1$$

$$N = J + \frac{c}{3}(b^3 - a^3) = 1$$

Pour poursuivre notre démonstration, il faut faire ici une supposition quant à la forme de la partie solide du pendule : nous supposerons tout d'abord, à l'exemple de M. Wanach, que toute la masse solide est concentrée en un point. Soit Q cette masse, F sa distance à la suspension. On a alors pour S, J et K les valeurs les plus simples possibles :

$$S = QF \qquad J = QF^2 \qquad K = QF^3$$

Il nous reste à déterminer la valeur minimum de F pour un pendule doublement compensé de ce type. D'après tout ce que nous avons dit plus haut, la solution la plus favorable sera celle où le mercure a son niveau exactement au milieu du pendule, c'est-à-dire celle où on aura, dans les formules ci-dessus, $a = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}$. Nous aboutissons ainsi au système d'équations suivant :

$$QF + \frac{c}{2}\left(b^2 - \frac{1}{4}\right) = 1 \qquad QF^2 + \frac{c}{3}\left(b^3 - \frac{1}{8}\right) = 1$$

$$\alpha = c\left[\frac{1}{3}\left(b^3 - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2}\left(b^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(b - \frac{1}{2}\right)\right]\varepsilon$$

$$\frac{\alpha}{2} = QF^3\alpha - c\left\{\frac{1}{4}\left(b^4 - \frac{1}{16}\right)(\varepsilon - \alpha) - \left[\frac{1}{3}\left(b^3 - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\left(b^2 - \frac{1}{4}\right)\right]\varepsilon\right\}$$

Nous avons ainsi quatre équations pour quatre inconnues. On peut sans difficulté en éliminer trois; les calculs sont un peu longs: qu'il me suffise donc d'indiquer ici la marche suivie.

La troisième équation permet d'exprimer c en fonction de b; on introduit cette valeur dans les trois autres équations: on peut alors en tirer les valeurs de QF, QF² et QF³. En prenant le rapport de la deuxième de ces quantités à la première, puis de la troisième à la deuxième, on obtient deux valeurs de F qu'on n'a plus qu'à égaler pour former une équation à une seule inconnue, b. Voici cette équation:

$$24\,b^3\varepsilon(\varepsilon-\alpha)-4\,b^2(9\varepsilon^2-4\varepsilon\alpha-\alpha^2)+2\,b(9\varepsilon^2-11\,\varepsilon\alpha+4\alpha^2)$$
$$-(3\varepsilon^2+2\varepsilon\alpha-\alpha^2)=0$$

Cette équation résolue, on a, pour calculer les trois autres inconnues, les formules suivantes:

$$F=\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon-\left(b^2+\frac{b}{2}+\frac{1}{4}\right)\alpha}{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon-\frac{3}{2}\left(b+\frac{1}{2}\right)\alpha}$$

$$c=\frac{3\alpha}{\left(b-\frac{1}{2}\right)^3\varepsilon}$$

$$Q=\frac{1-\frac{c}{2}\left(b^2-\frac{1}{4}\right)}{F}$$

On a, pour un pendule à mercure en acier, $\alpha=0{,}000\,011$ $\varepsilon=0{,}000\,148$, et l'équation du troisième degré en b devient approximativement:

$$1622\,b^3-2540\,b^2+1198\,b-229{,}5=0$$

Une résolution, grossièrement approchée, m'a donné pour les inconnues:

$$b=0{,}941 \qquad c=2{,}61$$
$$F=2{,}23 \qquad Q=0{,}0775$$

Ces résultats concordent bien avec ceux auxquels M. Wanach avait abouti par une méthode sensiblement différente. Du tableau des résultats de M. Wanach, je tire les valeurs suivantes pour le cas du minimum de F :

$$E = 717 \qquad E' = 2220 \qquad \mu = 0{,}0674 \qquad L = 433$$ [1]

Les valeurs que nous venons d'obtenir donneraient pour ces mêmes quantités les nombres suivants :

$$E = 720 \qquad E' = 2230 \qquad \mu = 0{,}0677 \qquad L = 441$$

Si l'on remarque que je suis parti de constantes un peu différentes, $l = 1$ au lieu de $l = 0{,}994$ et $\varepsilon = 148.10^{-6}$ au lieu de $148{,}36.10^{-6}$, et que de plus je me suis borné à des calculs très peu précis, on conviendra que l'accord est très satisfaisant.

La conclusion à laquelle M. Wanach était parvenu est ainsi confirmée, à savoir qu'un pendule à seconde, à mercure et en acier, qui serait simultanément compensé pour les variations de température et pour celles de stratification, aurait plus de $2^m{,}20$ de longueur, et que de ce fait il ne serait guère réalisable.

Toutefois il faut noter que ce résultat assez inattendu n'a été obtenu qu'en faisant deux spécialisations : la partie solide a été supposée concentrée en un seul point, et le mercure supposé constituer une colonne cylindrique. Ces deux suppositions sont-elles de nature à influencer sensiblement le résultat ?

Si l'on suppose que la masse solide n'est plus concentrée en un point, mais répartie en une tige et une lentille, la longueur de cette partie solide sera vraisemblablement encore plus longue que les $2^m{,}20$ obtenus ci-dessus. Mais, comme nous l'avons vu à plus d'une reprise au cours de ce travail, il est imprudent de se baser sur de simples vraisemblances dans cette question. C'est pourquoi j'ai procédé à quelques essais numériques, et ces calculs de pendules ainsi constitués et doublement compensés ont pleinement confirmé cette supposition. Le cas où la masse solide est concentrée en un point est un cas limite et correspond à la longueur minimum de cette partie solide ; pour toute autre forme, la longueur nécessaire pour atteindre une double compensation est plus grande.

[1] Dans les notations de M. Wanach, L est la longueur de la colonne de mercure, E la distance de son centre de gravité à la suspension, E' la distance F de la masse solide à la suspension, enfin μ le rapport de cette masse solide à celle du mercure.

Il semble par contre qu'on pourrait, en renonçant à la forme cylindrique de la colonne de mercure, et en supposant que celui-ci est concentré en grande partie en un point, et se transporte par dilatation jusqu'au milieu du pendule, réaliser des conditions plus favorables (car l'effet compensateur d'une masse donnée de mercure est ainsi plus grand) et réduire dans une proportion notable la longueur de la partie solide.

Pour trancher cette question, il nous faut simplement refaire le même calcul que ci-dessus, mais pour le premier des cas spéciaux étudiés plus haut. Les conditions des deux compensations sont ici les formules (5):

$$l\alpha = \frac{m}{D}\Big[\lambda(\lambda - l) + d(l-d)\Big]\varepsilon$$

$$\frac{l^2}{2}\alpha = \frac{1}{D}\left(K\alpha - m\lambda\left\{\lambda^2(\varepsilon-\alpha) - \Big[l\lambda - d(l-d)\Big]\varepsilon\right\}\right)$$

Nous posons, exactement comme ci-dessus, $l = 1$, $N = 1$, d'où $D = 1$. Alors:

$$D = QF + m\lambda = 1$$
$$N = QF^2 + m\lambda^2 = 1$$

De plus, si nous plaçons le niveau du mercure au milieu du pendule, nous aurons $d = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}$. Nous aboutissons ainsi au système des quatre équations suivantes:

$$QF + m\lambda = 1$$
$$QF^2 + m\lambda^2 = 1$$
$$\alpha = m\left[\lambda(\lambda-1) + \frac{1}{4}\right]\varepsilon \quad \text{ou bien} \quad \alpha = m\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2\varepsilon$$
$$\frac{1}{2}\alpha = QF^3\alpha - m\lambda\left\{\lambda^2(\varepsilon-\alpha) + \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)\varepsilon\right\}$$
$$\text{ou bien} \quad QF^3 - \frac{m\lambda}{\alpha}\left[\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon - \lambda^2\alpha\right] = \frac{1}{2}$$

Pour résoudre ce système, on procède de même que dans le cas précédent. La troisième équation nous donne la valeur de m, en fonction de λ:

$$m = \frac{\alpha}{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2\varepsilon}$$

En introduisant cette valeur dans les deux premières et dans la quatrième des équations ci-dessus, on obtient :

$$QF = 1 - \frac{\lambda \alpha}{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon}$$

$$QF^2 = 1 - \frac{\lambda^2 \alpha}{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon}$$

$$QF^3 = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon}\left[\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon - \lambda^2 \alpha\right]$$

En divisant membre à membre la deuxième équation par la première et la troisième par la deuxième, on obtient les deux valeurs suivantes de F :

$$F = \frac{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon - \lambda^2 \alpha}{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon - \lambda \alpha}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon + \lambda\left[\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon - \lambda^2 \alpha\right]}{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon - \lambda^2 \alpha}$$

En égalant ces deux valeurs de F on obtient une équation en λ, qu'on peut simplifier notablement ; il reste finalement :

$$\lambda^3(\varepsilon - \alpha) - \lambda^2\left(\frac{3\varepsilon}{2} - \alpha\right) + \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{3\varepsilon}{2} - \alpha\right) - \frac{\varepsilon}{8} = 0$$

Une fois cette équation résolue, on peut calculer F à l'aide de la première des deux valeurs ci-dessus :

$$F = \frac{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon - \lambda^2 \alpha}{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon - \lambda \alpha}$$

Puis, la troisième formule du système dont nous sommes partis donne :

$$m = \frac{\alpha}{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon}$$

Enfin, Q se calcule le plus facilement à partir de la première des équations du début ; on obtient :

$$Q = \frac{\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon - \lambda\,\alpha}{F\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon}$$

Pour un pendule à mercure en acier, on a en moyenne $\alpha = 11 \times 10^{-6}$, $\varepsilon = 148 \times 10^{-6}$, et l'équation en λ devient :

$$274\,\lambda^3 - 422\,\lambda^2 + 211\,\lambda - 37 = 0$$

Deux racines sont imaginaires. La racine réelle a pour valeur $\lambda = 0{,}762$. Les valeurs correspondantes des autres inconnues sont : $F = 2{,}12$, $m = 1{,}08$, $Q = 0{,}0829$. C'est la valeur $F = 2^m{,}12$ qui nous intéresse plus particulièrement : On voit que le gain réalisé est bien minime (la longueur n'est réduite que de 10 cm. environ). Nous en concluons que, quelle que soit la forme qu'on donne au récipient à mercure, la partie solide aura plus de $2^m{,}10$ de longueur.

L'espoir qu'on pouvait conserver de réussir, par une semblable disposition, à réaliser un pendule doublement compensé est donc déçu. Cela ne veut pas dire toutefois qu'il faille renoncer définitivement à résoudre ce problème. Nous n'avons jusqu'ici envisagé que le cas où le mercure est situé en entier au-dessous de sa surface libre. Or, puisque le pendule oscille sous une pression d'une atmosphère lorsqu'il est à l'air libre, et souvent aussi sous une pression assez considérable quand il est dans une cloche hermétiquement close, il y a possibilité de maintenir, par cette pression de l'air, une partie du mercure au-dessus de sa surface libre. On peut espérer arriver par ce stratagème à construire un pendule doublement compensé parfaitement utilisable.

C'est dans ce but que les conditions de compensation ont été étudiées pour des pendules de ce genre (voir le quatrième et le cinquième des cas spéciaux traités plus haut). Au lieu de calculer ici simplement, comme pour les cas précédents, le pendule de longueur minimum (ce qui eût été un peu plus compliqué puisqu'il y a une variable de plus) j'ai préféré calculer quelques cas de pendules vraiment réalisables, c'est-à-dire dont la partie solide ne soit pas seulement constituée par un seul point matériel, mais bien par une tige pesante portant un tel point à son extrémité (la lentille).

Nous avons vu que plus le mercure est éloigné du milieu du pendule, plus son pouvoir compensateur est considérable. Malheureusement, lorsqu'on envisage des pendules avec mercure au-dessus de la surface libre, deux raisons s'opposent à éloigner beaucoup le mercure de ce milieu; tout d'abord, si on ne modifie pas la façon actuelle de suspendre le pendule, le sommet de la colonne de mercure devra rester à 10 ou en tout cas à 5 cm. au-dessous du point de suspension; ensuite, il semble utile de laisser la pression atmosphérique en excès important sur la pression du mercure. Dans les cinq cas que j'ai calculés, j'ai donc choisi $a = 10$; j'ai pris successivement pour b les valeurs: 90, 100, 105, 110, 120. La première de ces valeurs détermine donc une colonne de mercure disposée symétriquement par rapport au milieu du pendule; il semblait à première vue que cette disposition devait permettre le plus facilement de compenser l'effet de stratification. Les valeurs suivantes ont été choisies plus grandes dans le but d'avoir une plus forte action compensatrice du mercure. Quant à d, on l'a naturellement choisi ici aussi égal à $\frac{l}{2} = 50$ (en prenant $l = 100$) puisque cette valeur est la plus favorable. De plus, et pour que les masses soient à peu près dans l'ordre de grandeur qu'elles devraient avoir en pratique, j'ai posé $D = 1\,000\,000$ et $N = 100\,000\,000$, ce qui donne bien $l = \frac{N}{D} = 100$.

Pour le calcul d'un pareil pendule doublement compensé on dispose alors des équations suivantes:

1. Moment statique:

$$D = S + \frac{c}{2}(b^2 - a^2)$$

2. Moment d'inertie:

$$N = J + \frac{c}{3}(b^3 - a^3)$$

3. Condition de compensation thermique (formule (8). chap. II):

$$l\alpha = \frac{c}{D}\left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{l}{2}(b^2 - a^2) + d(l-d)(b-a)\right]\varepsilon$$

4. Condition de compensation de la stratification (8):

$$\frac{l^2}{2}\alpha = \frac{1}{D}\left(K\alpha - c\left\{\frac{1}{4}(b^4 - a^4)(\varepsilon - \alpha) - \left[\frac{l}{3}(b^3 - a^3) - \frac{d}{2}(l-d)(b^2 - a^2)\right]\varepsilon\right\}\right)$$

La troisième formule permet de calculer c, puis les trois autres donnent S, J et K, c'est-à-dire les données relatives à la partie solide du pendule. J'ai fait ces calculs pour les cinq valeurs de b mentionnées ci-dessus, et j'ai obtenu les résultats suivants:

$b =$	90	100	105	110	120
$c =$	174,1	118,0	96,5	79,6	54,7
$S =$	304×10^3	416×10^3	473×10^3	522×10^3	609×10^3
$J =$	577×10^5	607×10^5	628×10^5	647×10^5	685×10^5
$K =$	713×10^7	844×10^7	919×10^7	985×10^7	1106×10^7

Nous connaissons ainsi le moment statique, le moment d'inertie et le moment du troisième degré de la partie solide de chacun de ces cinq pendules; voici comment on peut en déduire les dimensions et les masses: supposons chacun de ces pendules constitué par une ligne matérielle homogène de longueur B et de densité C (= masse de l'unité de longueur). L'une des extrémités de cette ligne est à la suspension, l'autre porte une masse Q. On a donc, par définition:

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{C}{2}B^2 + QB \\ J &= \frac{C}{3}B^3 + QB^2 \\ K &= \frac{C}{4}B^4 + QB^3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En soustrayant membre à membre la deuxième équation de la première multipliée par B, et de même la troisième de la deuxième multipliée par B, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} SB - J &= \frac{C}{6} B^3 \\ JB - K &= \frac{C}{12} B^4 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Q est ainsi éliminé. On élimine de même C entre ces deux dernières équations, et on trouve :

$$SB^2 - 3JB + 2K = 0 \qquad (3)$$

L'équation (3), la première des équations (2) et la première des équations (1) donnent alors pour les inconnues :

$$B = \frac{3J \pm \sqrt{9J^2 - 8SK}}{2S}$$

$$C = \frac{6(SB - J)}{B^3}$$

$$Q = \frac{S}{B} - \frac{C}{2} B$$

En appliquant ces formules aux nombres obtenus précédemment, on arrive aux dimensions et masses suivantes :

b =	90	100	105	110	120
B_1 =	471	305	227	Imaginaires.	Imaginaires.
C_1 =	+ 4,90	+ 14,0	− 22,9		
Q_1 =	− 509	− 775	− 515		
B_2 =	99,8	133	171		
C_2 =	− 165	− 13,8	+ 21,7		
Q_2 =	+ 11200	+ 4050	+ 913		

On voit tout d'abord par ces résultats que, dès que b dépasse sensiblement 105, on aboutit à des valeurs imaginaires pour la partie solide du pendule. De plus, des six pendules calculés (à valeurs réelles) un seul est réalisable, car pour un seul C et Q sont simultanément positifs. Il en résulte que b ne peut varier que dans d'étroites limites pour une valeur donnée de a. On a une représentation meilleure de ces résultats si on les groupe selon la longueur B du pendule :

	b	B	C	Q
	90	471	+ 4,90	— 509
I	100	305	+ 14,0	— 775
	105	227	+ 22,9	— 515
	105	171	+ 21,7	+ 913
II	100	133	— 13,8	+ 4 050
	90	100	— 16,5	+ 11 200

On voit bien par ce tableau que b doit rester très près de 105 si l'on veut obtenir un pendule réalisable, car dès que b dépasse un peu cette valeur, on obtient des résultats imaginaires; et d'autre part, dès que b est sensiblement inférieur à 105, soit Q, soit C devient négatif.

De plus, par ce tableau, un résultat que nous avions déjà établi précédemment se trouve confirmé, à savoir que, toutes conditions étant égales d'ailleurs, c'est le pendule réduit à un seul point matériel qui est le plus court. On voit en effet que si B diminue à partir de la valeur 171 correspondante à $b = 105$, on continue à obtenir des valeurs positives pour C et Q jusqu'au moment où $C = 0$, c'est-à-dire jusqu'au moment où le pendule se réduit à la masse Q. Ce cas tout spécial et tout théorique nous donnerait ici pour le pendule une longueur minimum d'environ 140. Mais en pratique, C doit avoir une valeur appréciable, et on ne pourrait guère descendre au-dessous de $C = 20$ environ, correspondant à $b = 105$ et à $B = 170$. Donc en pratique, un pendule doublement compensé du type que nous étudions actuellement sera encore trop long. La différence entre ces deux longueurs nous montre en outre que, dans les cas précédemment étudiés, où le minimum théorique était de plus de 2 m., le minimum pratique eût sans doute été de 2 $^1/_2$ m. ou 3 m.

Par le type que nous venons de considérer, nous nous sommes rapprochés de la solution, mais nous ne l'avons pas encore atteinte. On diminuerait sans doute encore un peu la longueur totale si l'on prenait $a = 5$ au lieu de $a = 10$, et en faisant subir à b une augmentation correspondante; mais le gain réalisé de cette façon ne serait probablement pas très considérable. Un pendule ainsi construit serait donc encore trop long; il aurait de plus, comme le précédent, le désavantage de nécessiter trop de mercure (et bien inutilement, comme nous allons le voir). Tout cela provient de ce que, dans ce type, comme nous l'avons dit déjà, le mercure est trop rapproché du milieu du pendule, ce qui diminue son pouvoir compensateur. Le seul moyen d'obvier à cet inconvénient, si l'on ne veut pas faire monter le mercure au-dessus de la suspension, c'est d'en concentrer une partie en un point, au sommet de la colonne. Ce cas a été examiné comme cinquième cas spécial.

J'ai entrepris le calcul approximatif de quelques pendules doublement compensés de ce nouveau type. On a, ici aussi, quatre équations à satisfaire, exprimant que le pendule doit battre un temps donné, qu'il doit posséder une puissance réglante donnée (moment d'inertie), qu'il doit être compensé pour la température et qu'il doit l'être aussi pour la stratification. Ces quatre équations sont (les deux dernières sont les équations (9) du chapitre précédent et du présent chapitre):

$$D = \frac{c}{2}(b^2 - a^2) + q\,a + S$$

$$N = \frac{c}{3}(b^3 - a^3) + q\,a^2 + J$$

$$l\,\alpha = \frac{1}{D}\left\{ c\left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{l}{2}(b^2 - a^2) + d\,(l - d)(b - a)\right] + q\left[d\,(l - d) - a\,(l - a)\right]\right\}\varepsilon$$

$$\frac{l^2}{2}\alpha = \frac{1}{D}\left(K\alpha - c\left\{\frac{1}{4}(b^4 - a^4)(\varepsilon - \alpha) - \left[\frac{l}{3}(b^3 - a^3) - \frac{d}{2}(l - d)(b^2 - a^2)\right]\varepsilon\right\} - q\,a\left\{a^2(\varepsilon - \alpha) - \left[l\,a - d\,(l - d)\right]\varepsilon\right\}\right)$$

Dans ces équations, les quantités S, J, K se rapportent à une forme absolument quelconque de la partie solide. Pour passer aux calculs numériques, il est nécessaire de spécialiser cette forme de façon simple. Nous supposerons donc que la partie solide consiste en une ligne matérielle partant du point de suspension, de longueur B et de densité C, et en un point matériel de masse Q situé à la distance F de la suspension. On a alors:

$$S = \frac{C}{2}B^2 + Q\,F$$

$$J = \frac{C}{3}B^3 + Q\,F^2$$

$$K = \frac{C}{4}B^4 + Q\,F^3$$

En introduisant ces valeurs dans le système d'équations précédent, et en les ordonnant de façon un peu différente, on obtient $\left(\text{en remarquant encore que } l = \frac{N}{D}\right)$:

$$c\left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{l}{2}(b^2 - a^2) + d(l-d)(b-a)\right]\varepsilon$$

$$+ q\left[d(l-d) - a(l-a)\right]\varepsilon = \mathrm{D}\, l\, \alpha - c\left\{\frac{1}{4}(b^4 - a^4)(\varepsilon - \alpha)\right.$$

$$\left. - \left[\frac{l}{3}(b^3 - a^3) - \frac{d}{2}(l-d)(b^2 - a^2)\right]\varepsilon\right\} - q\,a\left\{a^2(\varepsilon - \alpha)\right.$$

$$\left. - \left[l\,a - d(l-d)\right]\varepsilon\right\} + \frac{\mathrm{C}}{4}\mathrm{B}^4\alpha + \mathrm{Q}\,\mathrm{F}^3\alpha = \frac{l\,\mathrm{N}}{2}\alpha$$

$$\frac{c}{2}(b^2 - a^2) + q\,a + \frac{\mathrm{C}}{2}\mathrm{B}^2 + \mathrm{Q}\,\mathrm{F} = \mathrm{D}$$

$$\frac{c}{3}(b^3 - a^3) + q\,a^2 + \frac{\mathrm{C}}{3}\mathrm{B}^3 + \mathrm{Q}\,\mathrm{F}^2 = \mathrm{N}$$

Puisqu'il y a seulement quatre équations à satisfaire, on peut choisir toutes les quantités à volonté, sauf quatre d'entre elles qu'on prendra comme inconnues, et dont on obtiendra la valeur en résolvant ce système d'équations. Pour la commodité du calcul, il semble préférable de choisir les masses et les densités, c'est-à-dire c, q, C, Q comme inconnues, car le système est linéaire par rapport à ces quantités.

J'ai donné à D, N, l et d les valeurs suivantes qui, plus encore que celles du cas précédent, seraient directement utilisables pour un pendule à secondes :

$$\mathrm{D} = 500\,000 \qquad \mathrm{N} = 50\,000\,000 \qquad l = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}} = 100 \qquad d = \frac{l}{2} = 50$$

J'ai calculé ensuite les coefficients de ce système d'équations pour quelques valeurs de a, b, B et F. Voici, à titre d'exemple, les équations auxquelles on aboutit lorsqu'on prend $a = 5$, $b = \mathrm{B} = 120$, $\mathrm{F} = 115$:

$$\begin{array}{rlrlrlrl}
21{,}04\,c & + & 0{,}300\,q & & & & & = 550 \\
-1\,236\;\;c & - & 1{,}497\,q & + & 570\,\mathrm{C} & + & 16{,}73\,\mathrm{Q} & = 27\,500 \\
7\,190\;\;c & + & 5\;\;q & + & 7\,200\,\mathrm{C} & + & 115\;\;\mathrm{Q} & = 500\,000 \\
576\,000\;\;c & + & 25\;\;q & + & 576\,000\,\mathrm{C} & + & 13\,225\;\;\mathrm{Q} & = 50\,000\,000
\end{array}$$

La résolution approximative de ce système donne :

$$c = 16{,}75 \qquad q = 660 \qquad C = 11{,}72 \qquad Q = 2540$$

Ces calculs ont été répétés pour trois autres cas ; voici les résultats obtenus :

		1er cas	2me cas	3me cas	4me cas
Données :	a	10	10	10	5
	b	120	120	115	120
	B	120	120	115	120
	F	110	115	115	115
Inconnues :	c	15,7	16,4	21,1	16,75
	q	989	951	822	660
	C	3,33	9,78	5,61	11,72
	Q	3215	2630	2750	2540
Masse du mercure $= c(b-a)+q$		2720	2760	3040	2590
Masse de la partie solide $=$ CB $+$ Q		3610	3800	3390	3940
Masse totale $=$		6330	6560	6430	6530
Rayon de la colonne de mercure .		0,61	0,62	0,70	0,62
Rayon extérieur du tube		0,71	0,88	0,85	0,93
Epaisseur du tube.		0,10	0,26	0,15	0,31

J'ai fait figurer au tableau, à côté des inconnues elles-mêmes, des résultats qui s'en déduisent immédiatement : la masse du mercure, la masse de la partie solide et la masse totale du pendule. J'ai ensuite supposé que la ligne matérielle solide est réalisée par un tube d'acier destiné à contenir sur une partie de sa longueur la colonne de mercure. Le rayon intérieur de ce tube est donc fourni par la densité c de la ligne de mercure ; son rayon extérieur s'en déduit alors facilement en considérant la densité C de la ligne solide.

De ces quatre modèles, le dernier est certainement préférable pour deux raisons : tout d'abord parce que c'est celui qui exige le moins de mercure, ensuite et surtout parce que l'épaisseur obtenue pour la paroi du tube est la plus forte. Les quatre cas d'ailleurs paraissent tous facilement réalisables ; mais il y aurait lieu, si on voulait construire un tel pendule, de se rapprocher le plus possible du quatrième cas. J'ai calculé encore, pour ce quatrième cas, le rayon qu'aurait le réservoir de mercure du sommet de la colonne, si on le suppose de forme sphérique, et j'ai obtenu $2^{cm},26$. Quant à la lentille, représentée par un point matériel Q, elle aurait, supposée sphérique elle aussi et en acier, un rayon de $4^{cm},27$. (Voir fig. 8.)

Le problème du calcul d'un pendule à mercure doublement compensé est ainsi résolu.

S'il s'agissait de construire un tel pendule, on choisirait un tube d'acier se rapprochant le plus possible comme dimensions du type qu'on aurait choisi ; la valeur de c serait par là même déterminée ; on devrait alors choisir une autre inconnue au lieu de cette quantité, par exemple la distance de la lentille à la suspension F, et on procéderait à la résolution du système des quatre équations de condition. On construirait ensuite le pendule en réservant les dimensions exactes de la lentille. Elles seraient fixées après coup, de façon que le pendule soit exactement compensé pour la température, d'après la méthode que nous avons indiquée plus haut (p. 239). La compensation de stratification sera suffisamment approchée, alors même qu'on a négligé, par exemple, la masse de la paroi du vase de mercure au haut de la colonne, ainsi que celle d'autres détails du pendule : pour la stratification, comme nous l'avons déjà vu, une approximation très grossière suffit.

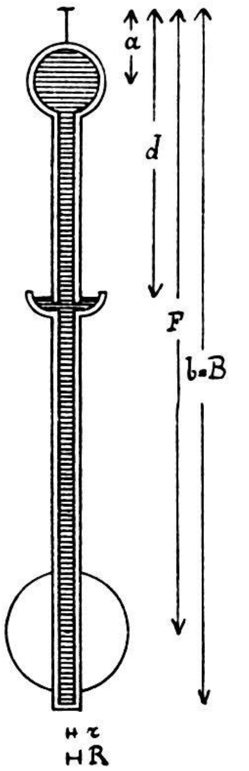


Fig. 8.
Schéma d'un pendule à mercure doublement compensé.

Si l'on admettait que le pendule puisse être prolongé au-dessus de sa suspension (ce qui semble très facilement réalisable) on pourrait encore construire des pendules doublement compensés d'un type un peu différent : on pourrait éloigner davantage le mercure du milieu du pendule, ce qui permettrait d'éviter le réservoir à mercure au haut de la colonne, c'est-à-dire d'en rester à la forme cylindrique, plus simple. Mais il faudrait alors séparer le mercure en deux colonnes distinctes, pour qu'il reste toujours, au haut de la colonne supérieure, un excès de pression suffisant. On pourrait, par exemple, admettre pour la hauteur de la colonne supérieure 50 cm. Si l'on veut placer cette colonne de la façon la plus avantageuse, il faut réaliser la condition du minimum de mercure. La distance séparant l'extrémité inférieure de la colonne du milieu du pendule doit être égale au tiers de la hauteur de la colonne, soit à 17 cm. environ.

La colonne dépasserait alors d'autant la suspension. On disposerait à la partie inférieure une deuxième colonne exactement symétrique par rapport au milieu du pendule.

Les autres éléments du pendule se calculeraient ensuite très facilement de la manière suivante: On se donnerait encore la longueur de la partie solide, qui devrait pouvoir contenir ces deux colonnes de mercure, c'est-à-dire avoir 117 cm. au-dessous de la suspension et 17 au-dessus. Les quatre équations de condition permettraient alors de calculer d'une façon analogue aux précédentes les quantités c, C, Q et F.

Les formules seraient légèrement plus compliquées que précédemment, tout d'abord parce qu'on a deux colonnes de mercure au lieu d'une, ensuite parce que les équations ne sont pas linéaires par rapport à F. Mais la résolution numérique approximative d'un tel système d'équations ne présente aucune difficulté.

Un pendule de ce type serait sans aucun doute parfaitement réalisable. Il serait plus avantageux que le modèle précédemment décrit, parce que de forme plus simple. La construction d'une horloge munie d'un tel pendule ne manquerait pas d'intérêt. Mais s'il s'agit simplement de substituer, dans une horloge existante, un pendule à mercure doublement compensé à n'importe quel autre pendule, on pourra, sans modifier la suspension, adopter la première forme de pendules doublement compensés.

On voit qu'ainsi la question se trouve résolue de façon à satisfaire à tous les besoins.

CHAPITRE IV

Influence de l'air ambiant sur la compensation thermique d'un pendule.

1. Introduction.

L'influence de l'air ambiant sur la marche du pendule est connue depuis plus d'un siècle et demi; elle a été l'objet d'un très grand nombre de travaux tant théoriques qu'expérimentaux: Les astronomes ont déterminé pour leurs horloges le coefficient barométrique, c'est-à-dire la variation de la marche diurne correspondant à une variation de pression de 1 mm.; les géodésiens ont déterminé pour leurs pendules une constante analogue, celle de la réduction au vide; enfin, les physiciens ont abordé l'étude théorique du problème et résolu celui-ci pour les formes les plus simples de pendule; leurs résultats s'accordent avec ceux de l'expérience.

Il n'est évidemment pas possible de reprendre ici toute cette vaste question, ni même d'en résumer les résultats obtenus; cela sortirait d'ailleurs du cadre de cette étude. Je me borne donc à rappeler que l'effet du milieu ambiant sur le mouvement d'un pendule est double: 1° l'amplitude est progressivement diminuée; 2° la durée d'une oscillation pour une amplitude donnée est augmentée. Ce second effet est le seul qui nous intéresse ici, puisque dans les horloges le mécanisme maintient l'amplitude à peu près constante.

L'augmentation de la durée d'oscillation d'un pendule peut être considérée comme proportionnelle à l'augmentation de la pression atmosphérique, car, en un même endroit, les variations de cette pression sont faibles. Mais il faut noter que ce n'est pas la variation de pression comme telle qui produit un changement dans la durée d'oscillation, mais bien la variation de densité qui en résulte. En d'autres termes, la pression du milieu ambiant paraît être sans influence appréciable sur la durée d'oscillation d'un pendule; cette durée d'oscillation dépend seulement de la densité du milieu ambiant[1].

[1] Les travaux classiques sur cette question ont été réunis par C. Wolf: « Mémoires sur le pendule. »
On trouve un bon résumé des résultats dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, édition allemande, Bd. IV II, 7, article de Ph. Furtwangler.

Mais alors, la variation de température du milieu ambiant aura aussi quelque effet sur la durée d'oscillation, puisqu'elle entraîne, elle aussi, une variation de densité. Le milieu ambiant doit donc avoir une influence sur la compensation thermique, et nous devrons modifier les résultats obtenus jusqu'ici. C'est à ce titre, et à ce titre seulement, que nous avons à nous en occuper ici.

Il semble qu'on n'a jamais, jusqu'ici, tenu compte de cette influence dans le calcul de pendules compensés au mercure, et bien rarement pour d'autres types de pendules [1], et cependant, comme nous allons voir, cet effet est très appréciable.

Voici comment on peut en obtenir une première approximation à partir du coefficient barométrique du pendule :

La densité δ de l'air est une fonction de la pression p et de la température absolue T, de la forme $\delta = \frac{p}{T}$, si l'on suppose la pression exprimée en atmosphères, et la température absolue en unités $273 + 15 = 288$ fois plus grandes que le degré centigrade, et si l'on prend pour unité de densité celle de l'air à la pression 1 ($= 760$ mm.) et à la température absolue 1 ($= 15°$ C).

On en déduit les relations suivantes entre les variations correspondantes de ces quantités :

$$d\delta = dp \qquad d\delta = -\,dT$$

Mais si on change d'unités et qu'on prenne pour évaluer dp le millimètre de mercure, et pour dT le degré centigrade, ces formules deviennent :

$$d\delta = \frac{1}{760}\,dp \qquad d\delta = -\,\frac{1}{288}\,dT$$

Il en résulte qu'un changement de pression dp et un changement de température dT produiront exactement le même

[1] M. W.-A. Nippoldt a tenu compte de cet effet de l'air ambiant dans le calcul de sa nouvelle compensation, en se basant uniquement sur les recherches de Bessel : W.-A. Nippoldt, « Ein neues für Temperatur- und Luftdruckschwankungen kompensiertes Pendel », *Zeitschr. f. Instrumentenkunde*, 1889, p. 197. De son côté, M. Ch.-Ed. Guillaume a calculé cet effet pour les pendules d'acier nickel, mais en tenant seulement compte de l'effet de la variation de la poussée de l'air. Nous verrons que ce n'est guère que la moitié de l'effet total. Voir : Ch.-Ed. Guillaume, « L'action de l'air sur la compensation du pendule », *Journ. suisse d'horl.*, XXIX, p. 109, 1904.

changement de densité (et par conséquent le même changement de marche) pourvu qu'ils soient liés par la relation :

$$\frac{1}{760}\,dp = -\frac{1}{288}\,dT$$

d'où :

$$dT = -\frac{288}{760}\,dp$$

En particulier, une augmentation de pression de 1 mm. produira sur la densité, donc sur la marche, le même effet qu'une variation de température de $-\frac{288}{760} = -0^\circ{,}379$. Si nous appelons b le coefficient barométrique d'un pendule (correction à apporter à la marche diurne quand la pression augmente de 1 mm.), nous aurons donc comme coefficient thermique θ résultant (correction à apporter à la marche diurne quand la température de l'air augmente de 1°) :

$$\theta = -\frac{b}{0{,}379} = -2{,}64\,b$$

En admettant, par exemple, un coefficient barométrique de $0^s{,}014$ pour les pendules cylindriques, et de $0^s{,}012$ pour les pendules aplatis, on obtient pour ces deux cas :

$$\theta_1 = -0^s{,}037 \qquad \theta_2 = -0^s{,}032$$

Ces modifications du coefficient thermiques sont loin d'être négligeables. Il résulterait donc de ce premier calcul que l'effet de l'air ambiant est de compenser environ $^1/_{12}$ ou $^1/_{14}$ de la dilatation de la tige ; de sorte qu'un pendule parfaitement compensé pour le vide serait surcompensé dans l'atmosphère et qu'on devrait lui enlever environ $^1/_{12}$ ou $^1/_{14}$ de son mercure.

Mais en réalité, comme nous allons le voir au paragraphe suivant, le phénomène n'est pas tout à fait aussi simple : c'est que le ralentissement de marche d'un pendule dans l'atmosphère ne dépend pas seulement de la densité, mais aussi du coefficient de frottement intérieur ou de viscosité de l'air, et que ce coefficient est lui aussi fonction de la température. Nous verrons que l'effet de la température sur la viscosité de l'air est opposé à celui de la température sur la densité et en compense une faible partie. L'effet total de la température est donc un peu moindre que celui mentionné ci-dessus.

Avant de passer à une étude plus complète de toute cette question, notons encore une conséquence inattendue de ce qui précède[1] : c'est qu'un pendule exactement compensé à l'air libre ne le sera plus sous pression constante; car le terme « pression constante » signifie en réalité densité constante; les variations de température de l'air ne produisent donc plus de variations de densité, ni de marche, et il ne reste plus que l'effet de la variation du frottement intérieur avec la température, variation qui est donc de sens contraire.

2. Données théoriques.

Il résulte des études théoriques de Stokes que l'effet d'un gaz ambiant sur la durée d'oscillation d'une sphère est de la forme :

$$A\delta + B\sqrt{\eta\delta}$$

δ étant la densité du gaz, η son coefficient de frottement intérieur, A et B des constantes dépendant de la dimension, de la masse et de la position de la sphère.

Pour des formes autres que la sphère, le problème n'a pas été jusqu'ici entièrement résolu. On obtient pour le cylindre une série dont les termes prépondérants sont exactement de la forme ci-dessus. Il était assez naturel d'en déduire qu'en pratique on pourrait très probablement employer une formule pareille pour des formes de pendule assez diverses.

Les expériences faites par Peirce[2], Defforges[3], Kühnen et Furtwängler[4] sur huit pendules à réversion différents, dans leurs deux positions, soit en tout seize pendules distincts, ont montré qu'en effet cette formule représente fort bien l'action de l'air ambiant sur la durée d'oscillation.

[1] Conséquence déjà signalée par M. Ch.-Ed. Guillaume, *loc. cit.*

[2] PEIRCE. « Methods and results of measurements of gravity at initial stations in America and Europa. » U. S. Survey, 1876, App. 15.

[3] DEFFORGES. « Observations du pendule. » *Mémorial du dépôt général de la guerre*, t. XV, 1894, p. 56.

[4] F. KUHNEN et PH. FURTWANGLER. « Bestimmung der absoluten Grösse der Schwerkraft zu Potsdam mit Reversionspendeln. » *Ver. Preuss. Geod. Inst.*, 1906, p. 253.

Faute d'autres renseignements, nous admettons que cette formule s'applique aussi aux diverses formes de pendules utilisées dans les horloges astronomiques.

Si l'on suppose que, dans cette formule, on a donné aux constantes A et B des valeurs telles que la densité δ et le coefficient de frottement η soient dans les conditions normales désignés tous deux par l'unité, on en déduit pour la variation de marche produite par des variations de densité ou de coefficient de frottement une expression de la forme:

$$dm = \left(A + \frac{1}{2} B\right) d\delta + \frac{1}{2} B\, d\eta$$

Cette formule linéaire est bien suffisante tant qu'on ne s'écarte pas trop de la pression normale et de la température moyenne adoptée.

Il reste à exprimer $d\delta$ et $d\eta$ en fonction de la variation de la température de l'air dT.

On admet aujourd'hui (les théories et les expériences les plus récentes sont d'accord sur ce point[1]) que le coefficient de frottement intérieur d'un gaz est donné par la formule:

$$\eta = a \frac{\sqrt{T}}{1 + c/T}$$

où T est la température absolue, et a et c des constantes particulières au gaz. Pour l'air atmosphérique, on a en particulier $c = 114$.

Supposons qu'on prenne pour unité de température absolue, non pas le degré centigrade, mais l'intervalle de 288°. Cette formule deviendra:

$$\eta = a\sqrt{288}\, \frac{\sqrt{T}}{1 + \dfrac{c}{288\, T}} = a' \frac{T^{3/2}}{T + c'}$$

si on pose:

$$a\sqrt{288} = a' \quad \text{et} \quad \frac{c}{288} = \frac{114}{288} = c'$$

[1] Voir par exemple WINKELMANN, *Handb. d. Phys.*, p. 1379, article de GRAEF: « Reibung der Gase ».

Si, de plus, on décide de prendre pour unité de η le coefficient de frottement de l'air à l'état normal, c'est-à-dire à $T=1$, notre formule deviendra :

$$\eta=(1+c')\frac{T^{3/2}}{T+c'}$$

On en tire la relation cherchée :

$$d\eta=(1+c')\frac{{}^{3}/_{2}(1+c')-1}{(1+c')^{2}}dT=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{1+c'}\right)dT$$

Nous avions pour l'air

$$c'=\frac{114}{288}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+c'}=\frac{288}{402}$$

d'où enfin :

$$d\eta=0{,}784\,dT$$

Quant à la variation de densité $d\delta$, il est évident qu'elle est nulle dans un récipient hermétiquement clos, c'est-à-dire pour les pendules sous pression constante. Ce qui va suivre ne s'applique donc qu'aux pendules oscillant dans l'air ambiant libre. On a alors :

$$\delta=\frac{p}{T}$$

d'où, si les unités sont convenablement choisies :

$$d\delta=dp-dT$$

En réunissant ce résultat au précédent, on obtient :

1° Pour les pendules oscillant à l'air libre :

$$dm=\left(A+\frac{1}{2}B\right)dp-\left(A+0{,}216\frac{B}{2}\right)dT$$

2° Pour les pendules sous pression constante :

$$dm=0{,}784\frac{B}{2}dT$$

Ces deux formules s'appliquent naturellement à des états voisins de l'état normal. Le résultat de la dernière devra donc être modifié si la pression constante est sensiblement différente d'une atmosphère. On voit facilement qu'il faudrait simplement multiplier le chiffre obtenu par $\sqrt{\delta} = \sqrt{p}$.

Par les deux formules précédentes, le problème est ramené à la détermination des coefficients A et B de la formule de réduction au vide.

3. Evaluation du premier coefficient, A.

La détermination théorique des coefficients A et B d'un pendule n'a été faite, à ma connaissance, qu'une seule fois, par Peirce, pour les deux positions de son pendule à réversion. Je m'en vais refaire exactement le même calcul pour deux pendules d'horloges choisis comme types des deux catégories qu'il faut nécessairement distinguer ici : les pendules à vase cylindrique ou pendules à mercure ordinaires, et les pendules à lentille aplatie, tel le pendule à mercure de Riefler. Au point de vue de l'influence de l'air, les pendules à gril peuvent vraisemblablement rentrer aussi dans cette dernière catégorie.

Je choisis comme types les deux pendules à mercure que M. Wanach a étudiés dans son travail, et qui sont les formes un peu simplifiées et schématisées de deux pendules existants. Nous en avons donné les dimensions et les densités à la note 1 de la page 20 du présent travail. Ajoutons que nous prendrons pour la densité de l'air à la pression d'une atmosphère et à la température de 15° le chiffre admis par Peirce : 0,001 206 obtenu en supposant que l'air contient une quantité de vapeur d'eau un peu moindre que la moitié de la saturation. Le mémoire de Peirce n'étant pas facilement accessible à chacun, je vais transcrire ici tous les détails de mon calcul.

Peirce rappelle que l'air ambiant retarde l'oscillation d'un pendule pour quatre causes :

1° La poussée de l'air déplacé (diminution du moment statique).

2° L'air enfermé dans les parties creuses (augmentation du moment d'inertie).

3° L'effet hydrodynamique (air entraîné à l'extérieur du pendule et augmentant, lui aussi, le moment d'inertie).

4° L'effet de la viscosité ou frottement intérieur de l'air.

Le premier terme de la réduction au vide, c'est-à-dire la constante A dépend des trois premières causes. Le deuxième terme et sa constante B sont dus uniquement à la quatrième cause.

On suppose que les parties creuses, s'il y en a, communiquent avec l'air extérieur. Si elles étaient hermétiquement closes, il faudrait considérer l'air y enfermé comme faisant complètement partie du pendule, et tenir alors compte de la poussée correspondante à cet espace; tandis que lorsque les parties creuses communiquent avec l'extérieur, il faut simplement tenir compte de l'air y contenu, qui est entraîné avec le pendule.

1. *Poussée.* — Pour 1 mm. d'augmentation de la pression, l'effet de la poussée augmente de:

$$a_1 = \frac{1}{2} C \, \frac{\text{moment statique de l'air déplacé}}{\text{moment statique du pendule}}$$

Dans cette formule, ainsi que dans les suivantes, $\frac{1}{2}$ provient de la différentiation par laquelle on obtient une formule linéaire à partir de la formule exacte contenant une racine carrée: $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, et $C = \frac{86\,400}{760}$ est une constante nécessaire pour passer de l'effet sur une oscillation à l'effet sur la marche d'un jour entier, d'une part, et d'autre part pour réduire l'effet produit par toute l'atmosphère à celui produit par 1 mm. de pression.

On a pour les deux pendules considérés:

$$a_1 = \frac{C}{2} \, \frac{\pi[0{,}4^2 \times 85 \times 45{,}6 + (2{,}7^2 - 2{,}5^2)20 \times 98{,}1 + 2{,}5^2 \times 17{,}41 \times 99{,}4]\,0{,}001\,206}{\pi\{[0{,}4^2 \times 85 \times 45{,}6 + (2{,}7^2 - 2{,}5^2)20 \times 98{,}1]7{,}8 + [2{,}5^2 \times 17{,}41 \times 99{,}4]13{,}60\}}$$

$$= 0{,}005\,5_2 \text{ (pendule ordinaire)}$$

$$a_1 = \frac{C}{2} \, \frac{\pi[(0{,}9^2 - 0{,}8^2)122 \times 65 + (4{,}83^2 - 0{,}9^2)5{,}8 \times 104{,}1 + 0{,}8^2 \times 76 \times 88]\,0{,}001\,206}{\pi\{[(0{,}9^2 - 0{,}8^2)122 \times 65 + (4{,}83^2 - 0{,}9^2)5{,}8 \times 104{,}1]7{,}8 + [0{,}8^2 \times 76 \times 88]13{,}60\}}$$

$$= 0{,}007\,5_6 \text{ (pendule Riefler)}$$

2. *Air enfermé.* — L'effet de cet air enfermé sur la marche diurne, pour une variation de pression de 1 mm., est de:

$$a_2 = \frac{1}{2} C \frac{\text{moment d'inertie de l'air enfermé}}{\text{moment d'inertie du pendule}}$$

Les moments d'inertie figurant ici au dénominateur s'obtiennent le plus facilement en multipliant les moments statiques des dénominateurs des formules précédentes, à savoir, 1 053 000 et 1 098 000, par la longueur du pendule simple battant la seconde: 99,4. On obtient ainsi: 104 700 000 et 109 100 000.

Pour calculer le moment d'inertie des cylindres d'air, il faut d'abord connaître leur rayon de gyration. Pour celui du pendule ordinaire, on peut simplement prendre 90. Quant à celui d du pendule Riefler, on le calcule d'après la formule connue:

$$d^2 = E^2 + \frac{1}{4}\left(R^2 + \frac{L^2}{3}\right) = 27^2 + \frac{1}{4}\left(0,8^2 + \frac{46^2}{3}\right) = 905$$

En introduisant ces valeurs on a:

$$\text{Pendule ordin.} \quad a^2 = \frac{1}{2} C \frac{\pi 2,5^2 \times 2,59 \times 90^2 \times 0,001\,206}{104\,700\,000} = 0,000\,5_4$$

$$\text{Pendule Riefler} \quad a^2 = \frac{1}{2} C \frac{\pi 0,8^2 \times 46 \times 905 \times 0,001\,206}{109\,100\,000} = 0,000\,0_7$$

3. *Effet hydrodynamique ou air extérieur entraîné.* — Peirce se base ici sur les résultats obtenus par Green, en considérant les cylindres comme des cas spéciaux d'ellipsoïdes. Il obtient ainsi que, pour un cylindre notablement plus long que large et oscillant suivant un méridien, la quantité d'air entraîné extérieurement est égale à l'air déplacé. Pour des cylindres courts, il y a lieu de modifier cette formule par l'introduction d'un coefficient convenable.

Appliquons d'abord ce résultat aux deux tiges. Nous aurons:

$$a'_3 = \frac{1}{2} C \frac{\text{moment d'inertie de l'air déplacé}}{\text{moment d'inertie du pendule}}$$

On a d'abord, pour les carrés des rayons de gyration des volumes cylindriques d'air déplacé :

$$\text{Pendule ordinaire} \ . \quad 45,6^2 + \frac{1}{4}\left(0,4^2 + \frac{85^2}{3}\right) = 2680$$

$$\text{Pendule Riefler} \ . \ . \quad 65^2 + \frac{1}{4}\left(0,9^2 + \frac{122^2}{3}\right) = 5470$$

d'où ensuite :

$$\text{Pend. ordin.} \quad a'_3 = \frac{1}{2}\, C\, \frac{\pi \,.\, 0,4^2 \times 85 \times 0,001\,206 \times 2680}{104\,700\,000} = 0,0001_5$$

$$\text{Pend. Riefl.} \quad a'_3 = \frac{1}{2}\, C\, \frac{\pi \,.\, 0,9^2 \times 122 \times 0,001\,206 \times 5470}{109\,100\,000} = 0,0021_4$$

Le vase cylindrique du pendule ordinaire est assez allongé pour qu'on puisse lui appliquer exactement la même formule. On a pour son rayon de gyration :

$$98,1^2 + \frac{1}{4}\left(2,7^2 + \frac{20^2}{3}\right) = 9650,$$

d'où :

$$\text{Pend. ordin.} \quad a''_3 = \frac{1}{2}\, C\, \frac{\pi \,.\, 2,7^2 \times 20 \times 0,001\,206 \times 9650}{104\,700\,000} = 0,0058_0$$

Quant à la lentille du pendule Riefler, il faut remarquer qu'elle n'a pas la forme indiquée sur le dessin, mais qu'elle est taillée en biseau, ou plutôt formée de deux troncs de cônes très aplatis et accolés par leurs grandes bases. De cette façon elle coupe l'air et en entraîne fort peu. Il est extrêmement difficile d'exprimer par une formule la quantité d'air entraîné par une telle forme ; on peut cependant déduire des remarques de Peirce que l'effet sera très faible et ne dépassera probablement pas celui de la partie correspondante de la tige. Nous n'avons donc rien à ajouter à l'effet de l'air entraîné par la tige entière, tel que nous l'avons calculé ci-dessus. Il en serait d'ailleurs de même si on avait affaire à une lentille aplatie placée verticalement, comme c'est le cas dans d'autres pendules de Riefler et dans presque tous les pendules à gril.

L'effet total de l'air entraîné, pour ces deux pendules, est donc :

Pendule ordinaire . . $a_3 = a_3' + a_3'' = 0{,}0059_5$
Pendule Riefler . . $a_3 = a_3' \qquad = 0{,}0021_4$

Nous avons ainsi évalué successivement toutes les parties du coefficient A.

4. Evaluation du second coefficient, B.

Dans l'état actuel de la théorie, l'évaluation *a priori* de l'effet de la viscosité de l'air sur la marche d'un pendule serait très malaisée; c'est pourquoi Peirce ne l'a même pas tentée. Il a réussi cependant à évaluer ce coefficient B en se basant sur un résultat remarquable des recherches de Stokes, à savoir que cette constante B se retrouve aussi comme coefficient d'un terme analogue, en $\sqrt{\eta\delta}$, dans la partie linéaire du décrément d'un pendule. Peirce a donc pu, des observations de diminution progressive d'amplitude de son pendule, déduire ainsi indirectement ce coefficient B de la formule de réduction au vide.

Pour un pendule d'horloge, une telle détermination ne serait pas aussi aisée, car l'effet du ressort de suspension ne manquerait pas de se mêler à celui de l'air ambiant. Pour séparer ces deux effets, il faudrait faire des observations comparatives du décrément sous la pression ordinaire et dans le vide; il faudrait donc avoir à sa disposition une horloge sous cloche, et l'employer à toute une série d'expériences. Je n'étais pas en situation d'entreprendre une telle recherche, et comme toute cette question est un peu accessoire dans le présent travail, je me suis borné à évaluer plus ou moins exactement ce coefficient B, en me basant sur quelques analogies.

J'ai déjà dit plus haut que les coefficients A et B ont été déterminés expérimentalement pour les deux positions de huit pendules à réversion; voici les chiffres obtenus :

Constantes de quelques pendules a réversion

Auteurs	Désignation du pendule	Position	Poids	Distance au centre de gravité	Longueur du pendule simple synchrome	A 0,00	$\frac{1}{2}$ B 0,000	$\frac{1}{2}$ B/A	$1{,}44 \times \frac{1}{2}$ B/A
Peirce	Pendule américain	B	6,3kg	70cm	100cm	0 287 9	024 8	0,09	0,13
		H	»	30	»	0 649 3	063 3	0,10	0,14
Defforges	Pendule français long	B	5,2	60	100	0 206 0	035 4	0,17*	—
		H	»	40	»	0 313 4	053 6	0,17*	—
»	Pendule français court	B	5,2	30	50	0 126 1	022 2	0,18*	—
		H	»	20	»	0 192 3	033 9	0,18*	—
Kühnen & Fürtwängler	Pend. à sec. de l'Institut géod. prussien	B	5,6	69	100	0 309 7	035 5	0,11	0,16
		H	»	31	»	0 702 6	074 6	0,11	0,16
»	Pendule italien	B	5,9	69	100	0 300 8	031 3	0,10	0,14
		H	»	31	»	0 669 0	073 8	0,11	0,16
»	Pendule autrichien lourd	B	6,2	71	100	0 282 1	026 8	0,09	0,13
		H	»	29	»	0 693 0	073 1	0,11	0,16
»	Pendule autrichien léger	B	2,9	70	100	0 445 9	051 8	0,12	0,17
		H	»	30	»	1 014 7	125 3	0,12	0,17
»	Pendule à demi-seconde	B	3,5	16	25	0 155 7	046 6	0,11	0,16
		H	»	9	»	0 287 5	033 6	0,12	0,17
		Moyenne des *						0,175	
		Moyenne des autres valeurs						0,107	0,154
		Moyenne générale des * et des $1{,}44 \times \frac{1}{2}$ B/A . .							0,159

A la troisième colonne, les lettres B et H marquent la position du pendule: B = poids en bas, H = poids en haut. Les trois colonnes suivantes donnent les caractéristiques essentielles de ces divers pendules.

Mais ce sont les valeurs de A et de $\frac{1}{2}$B qui nous intéressent plus spécialement. (Notons que nous avons pris pour le pendule Peirce la moyenne des valeurs théoriques et des valeurs expérimentales que cet auteur indique.) A et $\frac{1}{2}$B sont exprimés en fraction d'oscillation et correspondent à une atmosphère entière, sauf pour le pendule à $^1/_2$ seconde, dont les coefficients sont déjà réduits à la seconde entière. Si l'on voulait déduire de ces valeurs de A et de $\frac{1}{2}$B les parties correspondantes du coefficient barométrique, il faudrait donc les multiplier par le nombre de secondes par jour, et les diviser par 760. Defforges donne les valeurs de A et de $\frac{1}{2}$B en d'autres unités; nous les avons donc transformées pour faciliter la comparaison; tandis que les constantes des autres pendules sont celles même données par les auteurs cités.

L'examen de ces chiffres montre que A et $\frac{1}{2}$B varient dans une large mesure, leurs valeurs extrêmes étant dans le rapport de 1 à 7 environ; mais par contre le rapport d'un coefficient à l'autre, s'il n'est pas constant, se maintient cependant dans des limites assez étroites, ce que montre bien l'avant-dernière colonne.

On remarque toutefois que les quatre valeurs de $\frac{1}{2}$B/A (marquées d'un *) correspondant aux pendules de Defforges sont passablement isolées et très supérieures aux autres (moyenne 0,175 contre 0,107). On serait tout d'abord tenté d'attribuer ce résultat au fait que les pendules de Defforges sont d'un type spécial, avec les poids à l'intérieur du tube, tandis que tous les autres pendules sont du type de Bessel, avec les poids extérieurs au tube.

Toutefois la cause principale de cette différence est tout autre; elle provient de ce que les valeurs de A publiées par Defforges ne sont pas celles données directement par l'expérience, mais ont déjà été corrigées de l'effet de l'air enfermé; elles ne concernent donc plus que l'effet de poussée et l'effet de l'air extérieur entraîné. Il y a donc lieu de faire la même réduction sur les valeurs de tous les autres pendules si l'on veut les comparer utilement. Or, d'après le calcul théorique des diverses parties du coefficient A fait par Peirce pour les deux positions de son pendule, on voit que le rapport du coefficient entier A à la partie provenant de la poussée et de l'effet hydrodynamique, est égal, dans l'une des positions, à $\frac{2693}{1874} = 1{,}437$, et dans l'autre position à $\frac{6181}{4285} = 1{,}443$, donc en moyenne égal à 1,44. Si l'on admet ce même rapport pour les autres pendules, qui sont d'ailleurs tous à peu près du même type, on voit qu'il suffit de multiplier les chiffres de l'avant-dernière colonne par 1,44 pour obtenir des valeurs comparables à celles données par Defforges. C'est ces produits qui sont inscrits dans la dernière colonne.

On voit qu'après cette correction l'accord est beaucoup meilleur; les valeurs de Defforges, alors même qu'elles restent un peu supérieures (moyenne 0,175 contre 0,154) ne sont plus isolées. En somme, l'accord de tous ces rapports est très bon; et on voit que si on prend, au lieu de l'un quelconque d'entre eux, leur valeur moyenne 0,159, l'erreur commise ne dépasse guère $^1/_6$ de la quantité.

Or la caractéristique de ces pendules à réversion est qu'ils sont tous composés de cylindres réunis; à part cela, leurs formes, leurs dimensions et leurs masses sont très diverses. On peut donc admettre avec quelque vraisemblance que pour un pendule à mercure ordinaire, également composé de parties cylindriques, ce même rapport, de valeur moyenne 0,159, sera approximativement valable; c'est-à-dire que la partie $\frac{1}{2}$B du coefficient barométrique, due à la viscosité, pourra s'obtenir sans grosse chance d'erreur en multipliant par 0,159 les parties du coefficient dues à la poussée et à l'effet hydrodynamique, c'est-à-dire $a_1 + a_3$. Or nous avions trouvé $a_1 = 0{,}005\,5_2$, $a_3 = 0{,}005\,9_5$, donc $a_1 + a_3 = 0{,}011\,4_7$.

On en déduit pour le coefficient de viscosité :

$$\text{Pendule ordinaire . } \frac{1}{2}\text{B} = 0{,}011\,4_7 \times 0{,}159 = 0{,}001\,8_2$$

Nous ne pouvons naturellement pas utiliser, dans le cas d'un pendule aplati, ces mêmes rapports 1,44 et 0,159 : ils ne sont sans doute plus valables pour un pendule qui n'est pas composé uniquement de cylindres : ainsi, d'après la théorie, l'effet de l'aplatissemet sera à la fois une diminution de la quantité d'air entraîné et une augmentation du frottement, d'où augmentation considérable du rapport 0,159.

Nous ne pouvons d'autre part déterminer directement ces rapports, car nous ne possédons aucune détermination des coefficients A et B pour des pendules aplatis.

Faute de déterminations directes, nous devons nous baser sur les seules données suivantes : le capitaine Basevi, dans *Survey of India*[1], a obtenu empiriquement, pour deux pendules invariables très aplatis, les formules suivantes de réduction au vide :

Pendule 4 . $$dN = 0,23206 \frac{p}{1 + 0,0023(t - 32^0)} + 0,022\sqrt{p(461^0 + t)} + 0,123 \frac{p^{3/2}}{\sqrt{461^0 + t}}$$

Pendule 1821 $$dN = 0,23549 \frac{p}{1 + 0,0023(t - 32^0)} + 0,020\sqrt{p(461^0 + t)} + 0,172 \frac{p^{3/2}}{\sqrt{461^0 + t}}$$

où dN désigne la correction à apporter au nombre d'oscillations par jour, p étant évalué en pouces de mercure, t en degrés Fahrenheit.

Si on introduit d'autres unités et qu'on calcule plutôt l'effet sur la marche diurne (en tenant compte du fait que le pendule 4 battait en moyenne 86 080 oscillations par jour, le pendule 1821, 85 980) ces deux formules deviennent :

Pendule 4 . . . $$\Delta m = 5,727 \frac{p}{T} + 2,744\sqrt{pT} + 0,883 \frac{p^{3/2}}{\sqrt{T}}$$

Pendule 1821 . . $$\Delta m = 5,813 \frac{p}{T} + 2,495\sqrt{pT} + 1,235 \frac{p^{3/2}}{\sqrt{T}}$$

Il y a lieu de faire de grosses réserves au sujet de ces formules, qui ne concordent pas avec la théorie, puisqu'elles diffèrent passablement de la formule bien plus probable : $A\delta + B\sqrt{\delta}$. On peut néanmoins supposer avec quelque vraisemblance que, puisque ces formules ont été déduites de l'expérience, elles s'accorderont suffisamment bien avec les faits dans le voisinage de l'état normal ; en d'autres termes, que la formule différentielle qu'on en peut déduire sera sans doute admissible.

On en tire par différentiation, pour le voisinage de l'état normal :

Pendule 4 . . $$dm = 8,423\,dp - 4,796\,dT$$
Pendule 1821 . $$dm = 8,912\,dp - 5,183\,dT$$

[1] *Survey of India*, 5, p. [72], 1876.

L'exactitude de ces formules étant admise, on pourra, en suivant le raisonnement inverse de celui de la fin du § 2, en tirer les valeurs de A et de $\frac{1}{2}$B. Nous avions en effet établi que :

$$dm = \left(A + \frac{1}{2} B\right) dp - \left(A + 0{,}216 \frac{B}{2}\right) dT$$

tandis que nous avons maintenant une expression de la forme :

$$dm = G\,dp - D\,dT$$

On en déduit facilement que :

$$\frac{1}{2} B = \frac{G - D}{0{,}784}$$

et

$$A = G - \frac{1}{2} B$$

On obtient, d'après ces formules, et par une voie un peu tortueuse, il faut le reconnaître, les valeurs suivantes de A et de $\frac{1}{2}$B pour les pendules de Basevi :

	A	$\frac{1}{2}$ B
Pendule 4 . .	$0{,}0050_1$	$0{,}0061_2$
Pendule 1821 .	$0{,}0054_9$	$0{,}0063_0$
Moyennes .	$0{,}0052_5$	$0{,}0062_1$

Remarquons toutefois que nous ne pouvons pas simplement adopter la moyenne de ces coefficients des pendules de Basevi pour les pendules aplatis des horloges astronomiques. Ce qui le montre bien, c'est que nous avons obtenu pour le coefficient A de ceux-ci, par évaluation directe, $A = a_1 + a_2 + a_3 = 0{,}0097_7$, tandis que pour les pendules de Basevi nous venons de trouver $A = 0{,}0052_5$.

Nous ne pouvons pas même adopter, pour nos pendules d'horloges, le rapport $\frac{1}{2}$B/A des constantes de Basevi, car ces pendules de Basevi sont extrêmement aplatis : non seulement leur lentille, mais aussi toute la tige ; de sorte qu'on peut s'attendre à ce que, pour eux, ce rapport soit plus grand que pour nos pendules d'horloges.

La seule conclusion que nous pouvons tirer de ce qui précède est que la constante $\frac{1}{2}$B relative au pendule à mercure de Riefler est comprise entre celle que nous avons obtenue pour le pendule ordinaire (cylindrique) et celle des pendules Basevi (très aplatis).

Il nous faut donc avoir recours à une interpolation pour obtenir une valeur approchée de cette constante. Voici les chiffres dont nous disposons (nous considérons, non pas A entier, mais $a_1 + a_3$, parce que les pendules de Basevi ne contiennent pas d'air enfermé) :

	$a_1 + a_3$	$\frac{1}{2}$B
Pendule ordinaire .	$0{,}011\,4_7$	$0{,}001\,8_2$
Pendule Riefler . .	$0{,}009\,7_0$	x
Pendule Basevi . .	$0{,}005\,2_5$	$0{,}006\,2_1$

Pour l'interpolation même, il m'a paru plus rationnel de procéder, non pas par interpolation arithmétique, mais par interpolation *géométrique* (si je puis dire ainsi), car j'ai fait intervenir, non les différences de ces quantités, mais leurs rapports, en posant :

$$\frac{1147/970}{970/525} = \frac{x/182}{621/x}$$

Ce qui donne pour le coefficient cherché :

$$\text{Pendule Riefler} \quad \frac{1}{2}\text{B} = x = 0{,}002\,6_9$$

5. Résultats.

Nous avons, dans les deux paragraphes précédents, cherché à évaluer tant bien que mal la part des diverses causes dans le coefficient barométrique des pendules, en utilisant tous les renseignements que nous avons pu recueillir sur ce sujet. Voici les chiffres obtenus :

		Pendule ordinaire	Pendule Riefler
Poussée de l'air déplacé . . .	$a_1 =$	$0{,}005\,5_2$	$0{,}007\,5_6$
Inertie de l'air enfermé . . .	$a_2 =$	$0{,}000\,5_4$	$0{,}000\,0_7$
Inertie de l'air extérieur entraîné	$a_3 =$	$0{,}005\,9_5$	$0{,}002\,1_4$
	A $=$	$0{,}012\,0_1$	$0{,}009\,7_7$
Viscosité	$\frac{1}{2}$B $=$	$0{,}001\,8_2$	$0{,}002\,6_9$
Coefficient barométrique	$b = \text{A} + \frac{1}{2}\text{B} =$	$0{,}013\,8_3$	$0{,}012\,4_6$

Il ne faut pas se dissimuler toutefois que ces nombres reposent sur des bases bien précaires. Nous avons heureusement une vérification à notre disposition. On a, en effet, de divers côtés, déduit des observations directes des marches, la valeur du coefficient barométrique d'un assez grand nombre de pendules. La liste la plus complète de ces coefficients est celle donnée par M. Hartmann[1].

Parmi les dix-huit coefficients barométriques qui y sont cités, quinze se rapportent à des pendules à mercure ordinaires, trois à des pendules à mercure système Riefler ou à des pendules à gril. Les moyennes respectives des coefficients de ces deux catégories sont : $+0{,}0139$ et $+0{,}0122$. On voit que l'accord avec les valeurs théoriques est très bon, trop bon même, et on doit sans doute l'attribuer en partie à un heureux hasard.

Quoi qu'il en soit, nous sommes autorisés par ce bon accord, à admettre provisoirement les valeurs obtenues, et cela d'autant plus que nous n'avons nullement besoin ici de connaître très exactement ces constantes : une approximation assez grossière nous suffit.

Les valeurs de A et de $\frac{1}{2}$B déduites ci-dessus étant admises, on en tire immédiatement l'influence de l'air ambiant sur la compensation des pendules de ces deux types, à l'aide des formules de la fin du § 2.

Nous avions, pour un pendule oscillant à l'air libre :

$$dm = \left(\mathrm{A} + \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\right) dp - \left(\mathrm{A} + 0{,}216\,\frac{\mathrm{B}}{2}\right) d\mathrm{T}$$

L'influence de l'air sur la compensation est donc, en appelant θ la correction à apporter à la marche pour une augmentation de température de l'air ambiant de 1° :

$$\theta = -\left(\mathrm{A} + 0{,}216\,\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$$

Pendule ordinaire . . .	$\theta = -0{,}033$
Pendule Riefler . . .	$\theta = -0{,}027$

Quant aux pendules sous pression constante, nous avions :

$$dm = +0{,}784\,\frac{\mathrm{B}}{2}\,d\mathrm{T}$$

[1] HARTMANN. « Ueber den Gang einer mit Riefler' schen Pendel versehenen Uhr », Leipzig. Ber. (math. phys. Cl.), 49, 1897, p. 664.

Ce qui donne, pour un changement de température de l'air de 1° :

Pendule ordinaire . . . $\theta = + 0{,}004$
Pendule Riefler . . . $\theta = + 0{,}005$

Ces deux derniers nombres sont valables pour une densité, donc une pression normale. S'il y a vide partiel, il faut encore les multiplier par $\sqrt{\delta} = \sqrt{p}$; ils sont alors négligeables.

θ est la correction à apporter à la marche pour une augmentation de température de l'air de 1°. La variation correspondante de la longueur du pendule simple synchrone s'obtient par (6), chapitre I^{er} :

$$\theta = \frac{43\,200}{l} \Delta l$$

d'où :

$$\Delta l = l \frac{\theta}{43\,200} = l \times 0{,}000\,023 \times \theta$$

On a en particulier pour des pendules oscillant à l'air libre :

Pendule ordinaire . $\Delta l = - l \times 0{,}000\,000\,8$
Pendule Riefler. . $\Delta l = - l \times 0{,}000\,000\,6$

Il faut donc modifier en conséquence les résultats obtenus dans les deux premiers chapitres de ce travail. Toutes les valeurs de $\frac{dl}{dt}$ qui y figurent sont incomplètes, puisqu'elles ne tiennent compte que du solide et du mercure, et pas de l'air ambiant. Il faut partout y ajouter la valeur $\Delta l = l \times 0{,}000\,023 \times \theta$ que nous venons d'obtenir. Ce nouveau terme pourra partout être réuni au terme $l\alpha$. Pour tenir compte de l'influence de l'air ambiant sur la compensation, il suffit donc de remplacer, dans les conditions de compensation, le terme $l\alpha$ par $l(\alpha + 0{,}000\,023 \times \theta)$, c'est-à-dire par $l(\alpha - 0{,}000\,000\,8)$ pour les pendules ordinaires, et par $l(\alpha - 0{,}000\,000\,6)$ pour les pendules Riefler, s'ils oscillent à l'air libre.

Cette modification s'applique aussi à la quantité auxiliaire η qui figure dans les formules d'approximation du chapitre I^{er}. Par contre, la formule de correction (chap. I^{er}, § 5) ne doit pas être modifiée, car le terme en θ s'en trouve éliminé en même temps que le terme $l\alpha$.

L'air entre aussi en ligne de compte pour l'effet de stratification ; mais son action est ici très faible et on peut presque toujours la négliger. L'air déplacé et l'air entraîné sont, par suite du gradient, à une température différente de celle au point de suspension. On peut prendre l comme distance moyenne approximative de cet air à la suspension. Les valeurs de $\frac{dl}{d\tau}$ calculées au chapitre III sont donc incomplètes; il faut leur ajouter la correction $-l^2 \times 0{,}000\,023 \times \theta$. Cela revient à y remplacer partout le terme $l^2 \frac{\alpha}{2}$ par le terme $l^2 \left(\frac{\alpha}{2} - 0{,}000\,023 \times \theta\right)$. D'ailleurs pour tous les pendules à mercure actuels, ce terme $l^2 \frac{\alpha}{2}$ est le seul important dans la valeur de $\frac{dl}{d\tau}$. On voit par là que l'air ambiant a pour effet d'augmenter le coefficient de stratification de ces pendules d'environ $\frac{1}{8}$ de sa valeur, c'est-à-dire de $\frac{1}{8} 0{,}25 = 0{,}03$. Or les variations de gradient ne dépassent guère $1^\circ{,}5$ de part et d'autre de l'état moyen. L'effet dont il s'agit ici est donc à peu près à la limite de ce que nous étions convenus de négliger (effet maximum de $0^s{,}05$ sur la marche).

On pourra donc négliger cette influence dans le calcul des pendules doublement compensés; mais il faudra tenir compte de celle de l'air ambiant sur le coefficient thermique, telle que nous l'avons obtenue ci-dessus. Le calcul, ainsi modifié, se ferait de la même manière, et les résultats ne seraient pas essentiellement différents.

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS

(Les notations sont expliquées à la page 211.)

1. Pour un pendule à mercure usuel, la quantité de mercure peut se calculer approximativement par la formule :

$$p = 2\pi r^2 \delta l \frac{\alpha}{\gamma - 2\alpha_1 - \alpha} + \frac{3}{4} P \qquad \text{(Form. 12, p. 22-)}$$

Si la tige et le vase sont en acier ($\alpha = \alpha_1 = 0{,}000\,011$) on a :

$$p = 631\, r^2 + \frac{3}{4} P$$

2. La quantité de mercure à ajouter pour corriger la compensation d'un pendule à mercure usuel est donnée par :

$$\Delta p = 2{,}44 \frac{\pi r^2 \delta}{\gamma - 2\alpha_1 - \alpha} \cdot \frac{l}{43{,}200} \Delta m \qquad \text{(14, p. 228, et 16, p. 23-)}$$

Pour un pendule en acier on a :

$$\Delta p = 1620\, r^2 \Delta m$$

3. Pour un pendule à mercure à vase cylindrique, la quantité de mercure peut être calculée plus exactement en faisant $\frac{dl}{dt} = 0$ dans la formule de Wanach :

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{mh}{D}\left(b - \frac{2h}{3} - \frac{l}{2}\right)\varepsilon \qquad \text{(3, p. 236)}$$

La méthode à suivre est exposée à la p. 237. L'exactitude du résultat dépendra principalement de l'exactitude avec laquelle on connaît α.

4. Pour un pendule à mercure quelconque, on doit employer la formule plus générale :

$$\frac{dl}{dt} = l\alpha - \frac{1}{D}\left[i - ls + m(ld - d^2 - \iota_1)\right]\varepsilon \qquad \text{(4, p. 240)}$$

5. L'action compensatrice du mercure est d'autant plus grande que ce mercure est plus éloigné du milieu du pendule $\left(\text{point à la distance } \frac{l}{2} \text{ de la suspension}\right)$ et que la surface libre du mercure est plus proche de ce milieu.

6. Pour un pendule à mercure quelconque, le coefficient de stratification se calcule par la formule générale :

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l^2}{2}\alpha - \frac{1}{D}\left[K\alpha - k(\varepsilon - \alpha) + \left\{li - sd(l-d)\right\}\varepsilon\right] \qquad (4, \text{ p. } 266)$$

Quand le pendule est à vase cylindrique, on a les formules 6 et **6**bis, p. 265.

7. Il est possible de construire un pendule à mercure compensé simultanément pour les variations de la température et pour celle du gradient. Pour que les dimensions du pendule soient acceptables, il faut qu'une partie du mercure soit au-dessus de la surface libre et y soit maintenue par la pression atmosphérique. (Voir p. 280-285.)

8. On peut tenir compte de l'effet de l'air ambiant sur la compensation thermique en ajoutant au second membre des formules sous 1, 3 et 4, le terme :

$$l \times 0{,}000\,023 \times \theta \qquad (\text{p. } 304)$$

où on a en particulier :

	A l'air libre	Sous une pression constante d'une atmosphère
Pour un pendule à mercure ordinaire	$\theta = -0{,}033$	$\theta = +0{,}004$
Pour un pendule à mercure Riefler	$\theta = -0{,}027$	$\theta = +0{,}005$

BIBLIOGRAPHIE

des travaux relatifs à la théorie de la compensation à mercure et à l'effet de l'air sur la compensation thermique des pendules.

George Graham. « A contrivance to avoid the irregularities in a clock's motion occasioned by the action of heat and cold upon the rod of the pendulum » (*Philos. Transactions,* XXXIV, London, 1726).

Fr. Baily. « On the mercurial compensation Pendulum » (*Mem. Astr. Soc. London,* I, p. 381-419, 1825).

J. Boehm. « Ueber das Pendel mit Quecksilber-Compensation » (*Sitzber. d. Wien. Akad.,* 26, p. 337, 1858).

P. Volpicelli. « Theorica della compensazione de Pendoli », Roma, 1860.

Edm. Beckett. Article dans *Mechanics Magazine* (5 février 1864).

G. Lorenzoni. « Sul calcolo dell' altezza del mercurio in un pendolo compensazione » (*Mem. Soc. Spectr. Ital.,* 8 App. 1, 1879).

L. Kleritj. « Zur Theorie der Compensation des physischen Pendels ». Belgrade, 1879.

« Le pendule compensé n'existe pas », Belgrade.

(Voir aussi : *Stäckels Deutsche Uhrmacher-Zeitung,* n^os 10 et 11. Réponse de W. Förster au n° 18.)

« Zur Theorie und Praxis des Compensations-Pendels mit compensirtem Schwerpunkte », Belgrade.

J. Wilsing. « Uber den Einfluss von Luftdruck und Wärme auf die Pendelbewegung ». Berlin, 1880.

W.-A. Nippoldt. « Ein neues für Temperatur- und Luftdruckschwankungen Kompensiertes Pendel » (*Zeitschr. f. Instr.,* 1889, p. 197, et 1896, p. 44).

S. Riefler. « Quecksilber-Kompensationspendel neuer Konstruktion » (*Zeitschr. f. Instr.,* Bd. 13, p. 88, 1893).

E. Anding. « Bericht über den Gang einer Riefler'schen Pendeluhr » (A. N., Bd. 133, n° 3182, 1893).

F. Keelhoff « Calcul d'un compensateur à mercure » (*Journal suisse d'horlogerie,* XXIII, p. 256, 1899).

J.-M. Faddegon. « Mémoire sur la compensation thermique des pendules » (Congrès international de chronométrie, Paris, 1900).

B. Wanach. « Über den Einfluss der Temperaturschichtung auf verschiedene Uhrenpendel » (A. N., Bd. 166, n^os 3967-68, 1904).

Ch.-Ed. Guillaume. « L'action de l'air sur la compensation du pendule » (*Journal suisse d'horlogerie,* XXIX, p. 109, 1904).

Plusieurs de ces mémoires, des plus anciens surtout, n'ont pas été consultés et sont cités ici de seconde main, en particulier d'après : C. Wolf, « Mémoires sur le pendule », Paris.

D'autre part, cette liste ne mentionne que les mémoires spécialement consacrés à tout ou partie du sujet du présent travail. Les autres travaux consultés sont cités au bas des pages. Parmi eux, il faut relever comme particulièrement important :

Peirce. « Methods and results of measurements of gravity at initial stations in America and Europa », U. S. Survey, 1876, App. 15.

TABLE DES MATIÈRES