Zeitschrift: Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
Band: 37 (1909-1910)

Artikel: Les propriétés homographiques de l'équation de Riccati
Autor: Isely, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88561

Les propriétés homographiques de l'équation de Riccati

PAR L. ISELY, PROFESSEUR

L'équation de Riccati se composait primitivement de trois termes. C'est la forme que lui donne son auteur dans le fascicule de novembre 1723 des *Acta Eruditorum*. Le propre de cette équation différentielle du premier ordre est de renfermer le carré de la fonction inconnue. Trois ans plus tard, Goldbach la compléta par l'addition d'un quatrième terme contenant la première puissance de cette fonction *(Commentarii Academiæ Petropolitanæ ad annum 1726)*.

Cette équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = o,$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, ne peut pas en général s'intégrer par des quadratures. Par contre, deux quadratures suffiront si l'on en connaît une seule solution particulière. Son intégrale générale se présente alors sous la forme d'une fonction *rationnelle et linéaire* de la constante d'intégration.

Réciproquement, il est facile de s'assurer que cette propriété n'appartient qu'aux équations de ce type.

La relation entre l'intégrale générale y et la constante arbitraire θ se ramenant à l'équation *bilinéaire*

$$A\theta y + By + C\theta + D = o,$$

A, B, C, D étant des fonctions de x, il en résulte que le rapport anharmonique (le RA) de quatre valeurs quelconques de y est égal à celui des valeurs correspondantes de θ. Ce qu'on exprime, en employant la notation abrégée de Möbius,

$$(y_1 y_2 y_3 y_4) = (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4).$$

Ainsi, pour une même valeur de la variable x, *le RA de quatre solutions particulières quelconques de l'équation de Riccati est constant*[1].

[1] G. HUMBERT. *Cours d'Analyse*, t. II, p. 282. — ED. GOURSAT. *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, p. 317.

L'interprétation géométrique de ces résultats est aisée. L'intégrale générale, renfermant un paramètre variable, définit une famille de lignes planes que, pour abréger, nous appellerons *courbes de Riccati*. Supposons construites celles de ces dernières qui correspondent aux quatre valeurs particulières $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ du paramètre. *Le double rapport des quatre points où ces courbes sont coupées par une sécante mobile, parallèle à l'axe des y, est constant,* c'est-à-dire que l'on a, M_1, M_2, M_3, M_4 désignant ces points d'intersection,

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = \text{const.}$$

Trois courbes de Riccati permettent donc de déterminer toutes les autres.

Comme corollaire de la propriété ci-dessus énoncée, nous pouvons formuler la proposition suivante, qui nous sera utile plus tard :

Les courbes de Riccati divisent homographiquement deux parallèles quelconques à l'axe des y.

Des équations du type de Riccati se présentent dans nombre de questions de géométrie infinitésimale, entre autres dans le problème des *trajectoires,* et dans la théorie des *lignes asymptotiques*.

L'équation différentielle des trajectoires *orthogonales* d'une *famille de cercles* est de la forme

$$2R\frac{du}{dt} + b'(1 - u^2) - 2a'u = o,$$

a', b' étant les dérivées des coordonnées rectangulaires du centre, par rapport au paramètre variable t, et R le rayon, également fonction de t. On a pris pour inconnue $tg\,\frac{\omega}{2}$, en posant

$$tg\,\frac{\omega}{2} = u,$$

ω représentant l'angle du rayon avec la direction de l'axe des x.

Comme on le voit, l'équation différentielle des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles (cela est aussi vrai des trajectoires *obliques*) est une équation de Riccati. En l'intégrant, on aura u, et par suite ω, en fonction de t et d'une constante arbitraire. Les équations *paramétriques* des trajectoires seront alors

$$x = a + R\cos\omega = f(t, \theta),$$

et

$$y = b + R\sin\omega = \varphi(t, \theta),$$

θ étant une constante arbitraire. Ces trajectoires posséderont donc la propriété homographique des courbes de Riccati.

Un cas intéressant des trajectoires orthogonales est celui où les cercles donnés ont leurs centres en ligne droite. En prenant cette droite pour axe des x, l'équation différentielle ci-dessus se réduira à

$$R\frac{du}{dt} - a'u = o,$$

équation à variables séparables, qui s'intégrera immédiatement.

En particulier, prenons l'abscisse du centre pour paramètre variable $(t = a)$, et supposons $R = a$. L'intégration donnera

$$u = Ca,$$

C désignant une constante arbitraire, et les équations paramétriques des trajectoires seront

$$x = \frac{2a}{1 + C^2a^2},\quad y = \frac{2\,Ca^2}{1 + C^2a^2};$$

d'où l'on conclut, en éliminant a,

$$y = o \text{ (axe des } x\text{)},$$

et

$$C(x^2 + y^2) - 2y = o,$$

cercles ayant leurs centres sur l'axe des y, à la distance $\frac{1}{C}$ de l'origine.

Les cercles donnés et leurs trajectoires orthogonales forment donc deux *faisceaux conjugués*, dont les *axes radicaux* (les axes de coordonnées eux-mêmes) sont rectangulaires, et les *points limites* confondus avec l'origine. De l'équation de Riccati dont ils proviennent, on déduit aisément les propriétés homographiques et involutoires de chacun de ces faisceaux.

Les *lignes asymptotiques* des surfaces conduisent à des résultats plus importants encore. Ces lignes, imaginées par Dupin[1], doivent leur nom au fait qu'elles sont tangentes en chaque point à l'une des asymptotes de l'*indicatrice* de la surface en ce point. Ce sont des *lignes de courbure nulle*.

Les coordonnées d'un point quelconque d'une surface étant exprimées en fonction de deux paramètres variables u et v,

[1] *Développements de géométrie*, 1813.

l'équation différentielle des lignes asymptotiques, qui correspond au cas où le rayon de courbure est infini, est de la forme

$$R + 2S\frac{dv}{du} + T\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = o,$$

R, S, T étant des fonctions connues de u et v.

L'intégration de cette équation du premier ordre conduit, lorsque la surface considérée est *gauche,* à des résultats du plus haut intérêt. Dans ce cas, en effet, R est nul, S indépendant de u, et T un polynôme du second degré en u. L'équation se décompose alors en deux :

$$dv = o,$$

et

$$\frac{du}{dv} + Lu^2 + Mu + N = o,$$

où L, M, N sont des fonctions de v seul.

La première donne $v =$ const. ; les lignes correspondantes sur la surface sont les génératrices rectilignes, qui figurent ainsi l'une des séries d'asymptotiques. La seconde, qu'on ne sait intégrer que si l'on en connaît une solution particulière, détermine celles de l'autre série. On voit que c'est une équation de Riccati. Sur les quadriques gauches (hyperboloïde à une nappe, paraboloïde hyperbolique), les deux systèmes de génératrices rectilignes sont les deux séries d'asymptotiques de la surface.

L'intégrale générale de l'équation de Riccati ci-dessus étant une fonction rationnelle et linéaire de la constante d'intégration, le RA de quatre solutions u_1, u_2, u_3, u_4, pour une même valeur de la variable v, est constant. Or, $v =$ const. représente une génératrice rectiligne quelconque de la surface ; il en résulte que le *double rapport des quatre points de rencontre de cette génératrice avec quatre asymptotiques proprement dites est constant*, ce qui permet de déterminer, sans aucune quadrature, toutes ces lignes, dès qu'on en connaît trois. On peut encore dire que *les asymptotiques d'une surface gauche divisent homographiquement deux génératrices quelconques de cette surface*[1].

Si toutes les génératrices de la surface rencontrent une droite fixe, cette droite est une asymptotique de la seconde série, et l'on obtiendra toutes les autres par deux quadratures.

[1] Paul Serret. *Thèse sur les propriétés géométriques des courbes à double courbure.*

En effet, cette droite correspond à une solution particulière de l'équation de Riccati, qui peut dès lors s'intégrer.

C'est ce qui a lieu, entre autres, pour les surfaces *réglées à plan directeur*. Ces surfaces, à l'exception du cylindre, sont gauches *(conoïdes)*. Leurs génératrices rencontrent alors la *droite de l'infini* de ce plan. *Les asymptotiques de la seconde série,* dont cette droite fait partie, *interceptent alors sur deux génératrices quelconques des segments proportionnels*[1]*;* en d'autres termes, *les ponctuelles homographiques déterminées sur ces génératrices sont semblables.*

Sur les quadriques gauches, les deux systèmes de génératrices rectilignes figurent, comme déjà dit, les deux séries d'asymptotiques. On en conclut que, dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, *les génératrices d'un système déterminent sur deux droites de l'autre système des divisions homographiques;* et que, dans celui du paraboloïde hyperbolique, *toutes les génératrices d'un même système divisent deux génératrices quelconques de l'autre système en parties proportionnelles.* Réciproquement, *étant données deux ponctuelles homographiques*, dont les *bases* ne sont pas situées dans un même plan, *le lieu des droites qui joignent deux points homologues quelconques est une quadrique gauche.* Cette quadrique sera un paraboloïde hyperbolique si les deux ponctuelles en question sont semblables: d'où la génération rectiligne de cette surface au moyen d'un quadrilatère gauche. Dans le cas général, la surface engendrée sera un hyperboloïde à une nappe.

Nous avons vu, au début de cette étude, que la fonction inconnue qui entre dans une équation de Riccati est liée à la constante d'intégration par une équation bilinéaire, et que, réciproquement, cette propriété n'appartient qu'aux équations de cette nature. Soit, en effet, une relation de la forme

$$A\theta y + By + C\theta + D = o,$$

A, B, C, D étant des fonctions connues de x, et θ une constante arbitraire. On en tire

$$\theta = -\frac{By + D}{Ay + C},$$

d'où, en dérivant,

$$(Ay + C)(B'y + By' + D') - (By + D)(A'y + Ay' + C') = o,$$

[1] P. Serret. *Loc. cit.*

qui est bien une équation de Riccati, sous la forme que Goldbach lui a donnée.

Or, l'équation bilinéaire ci-dessus, qui exprime qu'à chaque valeur de θ correspond une seule valeur de y, et réciproquement, est la *relation fondamentale d'homographie* de deux formes géométriques de première espèce, en particulier de deux ponctuelles. L'équation de Riccati, qui s'en déduit par le procédé indiqué, peut donc être regardée comme l'expression différentielle de la correspondance homographique, ou de la correspondance (1, 1), de deux formes fondamentales de première espèce.

Lorsque le coefficient A du produit des deux paramètres déterminatifs θ et y est nul, la relation d'homographie se réduit à

$$By + C\theta + D = o,$$

d'où

$$\theta = -\frac{By + D}{C}.$$

La dérivation donne alors

$$BCy' + (CB' - BC')y + CD' - DC' = o,$$

équation différentielle *linéaire en* y, qui provient de celle de Riccati par l'évanouissement du terme en y^2. Dans ce cas, les points à l'infini des deux ponctuelles considérées, par exemple, se correspondent, de manière que *leurs points de fuite* sont à l'infini.

De la relation

$$By + C\theta + D = o,$$

on déduit aisément

$$y = k\theta,$$

k étant une constante. Il existe donc un rapport constant entre deux segments homologues quelconques des deux ponctuelles projectives. On dit, pour cette raison, que ces ponctuelles sont *semblables* (ou égales). Nous avons trouvé des divisions homographiques de ce genre dans les surfaces réglées à plan directeur, en particulier dans le paraboloïde hyperbolique.

Il résulte de tout ce qui précède que l'équation de Riccati mérite d'être placée à la base de la théorie de l'homographie. Elle forme, pour ainsi dire, le trait d'union entre l'analyse et la géométrie. Les propriétés si curieuses de ses intégrales sont une mine inépuisable de recherches élégantes et fécondes. Nous y reviendrons quelque jour.