Zeitschrift: Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles

Band: 35 (1907-1908)

Artikel: Une application intéressante de la "section d'or" : rectification approchée de la circonférence

Autor: Isely, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88544

UNE APPLICATION INTÉRESSANTE DE LA «SECTION D'OR»

RECTIFICATION APPROCHÉE DE LA CIRCONFÉRENCE

PAR L. ISELY, PROFESSEUR

Pendant près de quatre mille ans, la question de transformer un cercle donné, au moyen de la règle et du compas, en un carré de surface égale, a agité l'esprit des géomètres. Posé déjà sous sa forme habituelle dans le papyrus Rhind (2000 à 1700 ans avant J.-C.), conservé au *British Museum* [1], le problème de la quadrature du cercle préoccupe de nos jours encore un certain nombre de cerveaux, avides de chimères, bien que son impossibilité ait été rigoureusement et définitivement démontrée, en 1882, par M. Lindemann [2], en établissant, comme l'avait fait neuf ans auparavant Hermite pour la constante e, la transcendance du nombre π.

Ce problème revient au fond à trouver un rectangle dont les côtés seraient respectivement égaux au rayon et au demi-périmètre du cercle considéré. Les efforts des géomètres se portèrent donc sur la rectification de la circonférence. Parmi les solutions les plus heureuses qui en furent données, il convient de citer celles de Kochanski [3] et de Specht [4], la première déterminant graphiquement π avec quatre, la seconde avec cinq décimales exactes. Le procédé ci-après, très simple et très élégant, repose sur la division d'un segment rectiligne en moyenne et extrême raison, la fameuse «section d'or», qui joua un rôle si important dans l'architecture grecque au siècle de Périclès.

Soit $AB = a$ le segment en question. On sait qu'il existe deux points C et C', l'un sur le segment lui-même, l'autre sur son prolongement, tels que

$$\overline{AC}^2 = AB.CB,$$

et

$$\overline{AC'}^2 = AB.C'B.$$

[1] AUG. EISENLOHR. *Ein mathematisches Handbuch der alten Ægypter.* Leipzig, 1877.

[2] *Ueber die Zahl π,* dans les *Mathematische Annalen,* t. XX, p. 213-225.

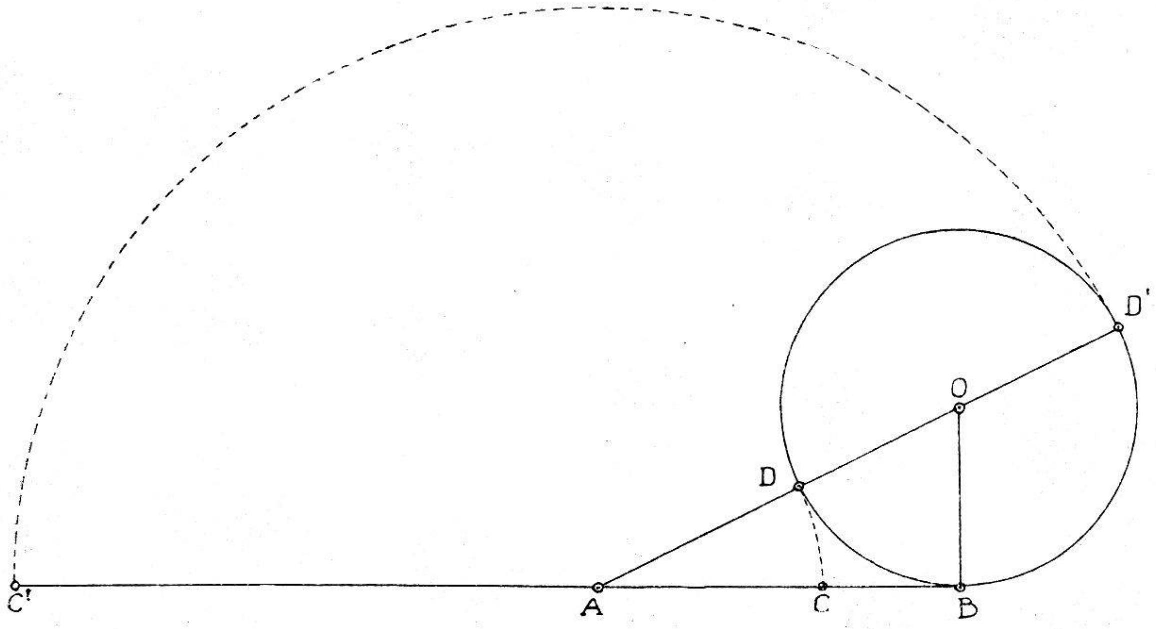
[3] *Acta Eruditorum,* année 1685, p. 394-398.

[4] *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. III, 1828, p. 83.

De la construction classique de ces points (voir la figure), on déduit aisément

$$CB = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

et
$$C'B = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}).$$



Représentons maintenant par d le diamètre de la circonférence qu'il s'agit de rectifier. πd sera sa longueur. Egalons celle-ci au segment C'B.

$$\frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}) = \pi d,$$

d'où
$$\frac{a}{d} = \frac{2\pi}{3 + \sqrt{5}} = \frac{\pi(3 - \sqrt{5})}{2}.$$

Donnons à ce rapport la valeur très approchée par excès 1,199981615, et convertissons-le en fraction continue.

$$\frac{a}{d} = 1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2175 + \ldots}}$$

Les trois premières réduites sont

$$\frac{1}{1}, \frac{6}{5}, \frac{13051}{10876}.$$

Posons alors

$$\frac{a}{d} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

On en déduit

$$a = 1{,}2\, d$$

et, par suite,

$$C'B = 0{,}6\,(3 + \sqrt{5})\, d.$$

Or, le coefficient numérique de d équivaut à 3,14164... On trouve ainsi, à un cent-millième près par excès,

$$\pi = 3{,}1416,$$

valeur généralement adoptée dans les applications ordinaires.

On conclut de là qu'en prenant AB égal *au diamètre augmenté de ses deux dixièmes*, et en soumettant ce segment à la division en moyenne et extrême raison, *la longueur C'B représentera très sensiblement la circonférence rectifiée.*

En remarquant que C'B équivaut au périmètre du triangle rectangle ABO, dont les cathètes valent respectivement

$$\frac{6}{5}\, d \text{ et } \frac{3}{5}\, d,$$

la construction ci-dessus se présentera sous la forme suivante[1] :

On partage le diamètre d en cinq parties égales. On construit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit contiennent respectivement 6 et 3 de ces parties : *le périmètre de ce triangle est une valeur suffisamment approchée de la circonférence du cercle considéré.*

Sur un cercle de 100 mètres de diamètre, cette construction ne ferait pas une erreur de *1 centimètre.*

La réduite $\dfrac{13051}{10876}$ donnerait une valeur beaucoup plus approchée encore ; malheureusement, la grandeur des termes de cette fraction la rend inutilisable dans la pratique.

[1] W. Fiedler. *Die darstellende Geometrie,* 1re éd., p. 236. — C. Bourlet. *Géométrie plane,* 3me éd., p. 301.