Zeitschrift: Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
Band: 33 (1904-1905)

Artikel: Simplification du calcul du rayon vecteur et de l'équation du centre
Autor: Legrandroy, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88524

Séance du 20 janvier 1905

Simplification du calcul du rayon vecteur et de l'équation du centre

PAR E. LEGRANDROY, PROFESSEUR

Si r désigne le *rayon vecteur* d'une planète, v son *anomalie vraie* (c'est-à-dire l'angle que le rayon vecteur fait avec la ligne des apsides), on sait que quand on néglige l'effet des perturbations, ces deux quantités sont liées entre elles et au temps par les équations

$$(1) \quad r = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + e \cos v} \qquad (2) \quad \int r^2 \, dv = \mu t = \mathrm{M}$$

dans lesquelles a désigne le *demi-grand axe* de l'orbite planétaire, e son *excentricité*, φ un angle tel que $\varphi = e$, μ son *moyen mouvement* (c'est-à-dire le déplacement angulaire de la planète dans l'unité de temps, en supposant son mouvement uniforme) et t le temps compté à partir du passage au périhélie.

On sait que l'équation (2) n'est intégrable sous forme finie que dans le cas de la parabole ($e = 1$); sinon, on la rend intégrable par l'introduction d'un angle auxiliaire u, qu'on appelle l'*anomalie excentrique* et qui est tel que (3) $r = a\,(1 - e \cos u)$. On a alors l'égalité

$$\frac{a \cos^2 \varphi}{1 + e \cos v} = a\,(1 - e \cos u),$$

d'où l'on tire aisément

$$(4)\quad \sin v = \frac{a \cos\varphi \sin u}{r} \qquad (6)\quad \sin u = \frac{r \sin v}{a \cos\varphi}$$

$$(5)\quad \cos v = \frac{a(\cos u - e)}{r} \qquad (7)\quad \cos u = \frac{r(\cos v + e)}{a \cos^2\varphi}.$$

En introduisant dans l'équation (2) les expressions de r et de v en fonction de u, et intégrant, on obtient l'équation de Kepler (8) $u - e \sin u = \mathrm{M}$. On peut donc calculer u par cette équation, puis r et v par les équations (4) et (5).

L'excentricité des planètes étant toujours assez petite, l'idée de développer r et v-M[1] en séries ordonnées suivant les puissances de cette quantité a dû tout naturellement se présenter à l'esprit des géomètres. LAPLACE, dans sa *Mécanique céleste,* et POISSON, dans son *Traité de mécanique*, ont donné de ce problème des solutions à la fois élégantes et rigoureuses. Je n'ai pas, bien entendu, la prétention de faire mieux qu'eux: je voudrais montrer seulement qu'on peut obtenir les premiers termes de ces séries, les seuls importants pour la pratique, par des calculs tout élémentaires et propres à être introduits dans l'enseignement. Mettons les équations (4) et (5) sous la forme

$$\begin{cases} r \sin v = a \cos\varphi \sin u \\ r \cos v = a(\cos u - e) \end{cases}$$

et différentions-les par rapport à e: on a

$$(9)\quad \begin{cases} \sin v \dfrac{dr}{de} + r \cos v \dfrac{dv}{de} = -a \sin\varphi \sin u \dfrac{d\varphi}{de} + a \cos\varphi \cos u \dfrac{du}{de} \\ \cos v \dfrac{dr}{de} - r \sin v \dfrac{dv}{de} = -a\left(\sin u \dfrac{du}{de} + 1\right). \end{cases}$$

[1] C'est la différence v-M, ou l'excès de l'anomalie vraie sur l'anomalie moyenne, que les astronomes appellent l'*équation du centre*.

En différentiant de même les équations

$$u - e \sin u = \mathrm{M}, \sin \varphi = e,$$

on obtient

$$\frac{du}{de} - e \cos u \frac{du}{de} - \sin u = 0 \quad \cos \varphi \frac{d\varphi}{de} = 1,$$

d'où

$$\frac{du}{de} = \frac{\sin u}{1 - e \cos u} = \frac{a \sin u}{r},$$

ou, en vertu de l'équation (6),

$$\frac{du}{de} = \frac{\sin v}{\cos \varphi}. \tag{10}$$

D'autre part

$$\frac{d\varphi}{de} = \frac{1}{\cos \varphi}. \tag{11}$$

En introduisant dans les équations (9) ces expressions, ainsi que celles de $\sin u$ et de $\cos u$ données par les équations (6) et (7), on a

$$\left\{\begin{aligned} \sin v \frac{dr}{de} + r \cos v \frac{dv}{de} &= - a \sin \varphi \cdot \frac{r}{a} \frac{\sin v}{\cos^2 \varphi} \cdot + a \cos \varphi \cdot \frac{r(\cos v + e)}{a \cos^2 \varphi} \frac{\sin v}{\cos \varphi} \\ \cos v \frac{dr}{de} - r \sin v \frac{dv}{de} &= - a \left(\frac{r \sin v}{a \cos \varphi} \cdot \frac{\sin v}{\cos \varphi} + 1 \right) \end{aligned}\right.$$

ou, en simplifiant :

$$\left\{\begin{aligned} \sin v \frac{dr}{de} + r \cos v \frac{dv}{de} &= \frac{r \sin v \cos v}{\cos^2 \varphi} \\ \cos v \frac{dr}{de} - r \sin v \frac{dv}{de} &= - \frac{r \sin^2 v + a \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire aisément

$$(12) \qquad \frac{dr}{de} = -a\cos v \qquad \frac{r\,dv}{de} = \left(\frac{r + a\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\sin v$$

ou

$$(13) \qquad \frac{dv}{de} = \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{a}{r}\right)\sin v.$$

La série de Mac-Laurin donne

$$r = r_0 + \frac{e}{1}\left(\frac{dr}{de}\right)_0 + \frac{e^2}{1.2}\left(\frac{d^2r}{de^2}\right)_0 + \cdots$$

$$v = v_0 + \frac{e}{1}\left(\frac{dv}{de}\right)_0 + \frac{e^2}{1.2}\left(\frac{d^2v}{de^2}\right)_0 + \cdots$$

les quantités affectées d'indices étant ce que deviennent ces mêmes quantités sans indices quand on y fait $e = 0$.

De $r = a(1 - e\cos u)$ on tire $r_0 = a$.

Les égalités $\begin{cases} r\sin v = a\cos\varphi\sin u \\ r\cos v = a(\cos u - e) \end{cases}$ $u - e\sin u = \mathrm{M}$, $\sin\varphi = e$

deviennent, pour $e = 0$,

$\begin{cases} \sin v_0 = \sin u_0 \\ \cos v_0 = \cos u_0 \end{cases}$ $u_0 = \mathrm{M}$, d'où $v_0 = \mathrm{M}$; $\varphi_0 = 0$, d'où $\cos\varphi_0 = 1$.

On a ensuite, d'après (12) et (13) :

$$\left(\frac{dr}{de}\right)_0 = -a\cos\mathrm{M}, \left(\frac{dv}{de}\right)_0 = 2\sin\mathrm{M}.$$

Pour obtenir les dérivées suivantes, posons

$$\frac{dv}{de} = \mathrm{P}(\mathrm{Q} + \mathrm{R}),$$

formule dans laquelle

$$\mathrm{P} = \sin v,\ \mathrm{Q} = \cos^{-2}\varphi,\ \mathrm{R} = ar^{-1}.$$

On a alors:

$$P' = \cos v \frac{dv}{de}, \ Q' = 2 \cos^{-3} \varphi \sin \varphi \frac{d\varphi}{de} = 2 \sin \varphi \cos^{-4} \varphi, \ R' = -ar^{-2} \frac{dr}{de}$$

d'où

$$P_0 = \sin M, \ Q_0 = 1, \ R_0 = 1, \ P'_0 = 2 \sin M \cos M = \sin 2 M;$$

$$Q'_0 = 0, \ R'_0 = -\frac{1}{a}(-a \cos M) = \cos M$$

puis

$$\left(\frac{d^2 r}{de^2}\right)_0 = a \sin v_0 \left(\frac{dv}{de}\right)_0, \ \left(\frac{d^2 v}{de^2}\right)_0 = P_0 (Q'_0 + R'_0) + P'_0 (Q_0 + R_0)$$

ou

$$\left(\frac{d^2 r}{de^2}\right) = 2 a \sin^2 M = a(1 - \cos 2 M); \ \left(\frac{d^2 v}{de^2}\right)_0 = \sin M \cos M + 2 \sin 2 M = \frac{5}{2} \sin 2$$

Pour les troisièmes dérivées, on a:

$$\left(\frac{d^3 r}{de^3}\right)_0 = a \cos v_0 \left(\frac{dv}{de}\right)_0^2 + a \sin v_0 \frac{d^2 v}{de^2_0}; \ \left(\frac{d^3 v}{de^3}\right)_0 = P_0 (Q'' + R''_0) + 2 P'_0 (Q' + R'_0) + P''_0 (Q_0 + R$$

mais

$$P'' = -\sin v \left(\frac{dv}{de}\right)^2 + \cos v \frac{d^2 v}{de^2}; \ Q'' \ 2 \cos^{-3} \varphi \frac{d\varphi}{de} + 8 \sin^2 \varphi \cos^{-5} \varphi \frac{d\varphi}{de},$$

ou

$$Q'' = 2 \cos^{-4} \varphi + 8 \sin^2 \varphi \cos^{-6} \varphi; \ R'' = 2 ar^{-3} \left(\frac{dr}{de}\right)^2 - ar^{-2} \frac{d^2 r}{de^2};$$

d'où

$$P''_0 - = 4 \sin^3 M + \frac{5}{2} \sin 2 M \cos M; \ Q''_0 = 2; \ R''_0 = 2 \cos^2 M - (1 - \cos 2 M) = 2 \cos 2 M$$

On a ainsi

$$\left(\frac{d^3r}{de^3}\right)_0 = 4a\sin^2 M\cos M + \frac{5}{2}a\sin M\sin 2M$$

$$\left(\frac{d^3v}{de^3}\right)^0 = \sin M(2+2\cos 2M)+2\sin 2M\cos M+2\left(-4\sin^3 M+\frac{5}{2}\sin 2M\cos M\right)$$
$$= 2\sin 3M + 2\sin M - 8\sin 3M + 5\sin 2M\cos M.$$

Par la transformation bien connue

$$\sin M = \frac{e^{+iM}-e^{-iM}}{2i}, \cos M = \frac{e^{iM}+e^{-iM}}{2}, \sin 2M = \frac{e^{2iM}-e^{-2iM}}{2i}$$

(e étant ici la base des logarithmes népériens) et les transformations inverses, on obtient aisément

$$\sin^2 M\cos M = \frac{\cos M - \cos 3M}{4}; \sin M\sin 2M = \frac{\cos M - \cos 3M}{2};$$
$$\sin^3 M = \frac{3\sin M - \sin 3M}{4}; \sin 2M\cos M = \frac{\sin M + \sin 3M}{2};$$

d'où, après quelques transformations,

$$\frac{d^3r}{de^3} = \frac{9a}{4}(\cos M - \cos 3M); \frac{d^3v}{de^3} = \frac{13}{2}\sin 3M - \frac{3}{2}\sin M.$$

On pourrait poursuivre le calcul par la même méthode. En se bornant aux termes obtenus, on a les expressions suivantes, bien suffisantes pour la pratique :

$$a = \dot{a}\left[1 - e\cos M + \frac{e^2}{2}(1-\cos 2M) + \frac{3e^3}{8}(\cos M - \cos 3M) + \cdots\right]$$
$$v - M = 2e\sin M + \frac{5e^2}{4}\sin 2M + \frac{e^3}{12}(13\sin 3M - \sin M) + \cdots$$

Elles sont d'ailleurs conformes à celles qu'on obtient par d'autres méthodes plus compliquées.