

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles  
**Band:** 33 (1904-1905)

**Artikel:** Simplification du calcul du rayon vecteur et de l'équation du centre  
**Autor:** Legrandroy, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-88524>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Simplification du calcul du rayon vecteur et de l'équation du centre

PAR E. LEGRANDROY, PROFESSEUR

Si  $r$  désigne le *rayon vecteur* d'une planète,  $v$  son *anomalie vraie* (c'est-à-dire l'angle que le rayon vecteur fait avec la ligne des apsides), on sait que quand on néglige l'effet des perturbations, ces deux quantités sont liées entre elles et au temps par les équations

$$(1) \quad r = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + e \cos v} \quad (2) \quad \int r^2 dv = \mu t = M$$

dans lesquelles  $a$  désigne le *demi-grand axe* de l'orbite planétaire,  $e$  son *excentricité*,  $\varphi$  un angle tel que  $\varphi = e$ ,  $\mu$  son *moyen mouvement* (c'est-à-dire le déplacement angulaire de la planète dans l'unité de temps, en supposant son mouvement uniforme) et  $t$  le temps compté à partir du passage au périhélie.

On sait que l'équation (2) n'est intégrable sous forme finie que dans le cas de la parabole ( $e = 1$ ); sinon, on la rend intégrable par l'introduction d'un angle auxiliaire  $u$ , qu'on appelle l'*anomalie excentrique* et qui est tel que (3)  $r = a (1 - e \cos u)$ . On a alors l'égalité

$$\frac{a \cos^2 \varphi}{1 + e \cos v} = a (1 - e \cos u),$$

d'où l'on tire aisément

$$(4) \quad \sin v = \frac{a \cos \varphi \sin u}{r} \quad (6) \quad \sin u = \frac{r \sin v}{a \cos \varphi}$$

$$(5) \quad \cos v = \frac{a(\cos u - e)}{r} \quad (7) \quad \cos u = \frac{r(\cos v + e)}{a \cos^2 \varphi}$$

En introduisant dans l'équation (2) les expressions de  $r$  et de  $v$  en fonction de  $u$ , et intégrant, on obtient l'équation de Kepler (8)  $u - e \sin u = M$ . On peut donc calculer  $u$  par cette équation, puis  $r$  et  $v$  par les équations (4) et (5).

L'excentricité des planètes étant toujours assez petite, l'idée de développer  $r$  et  $v-M$ <sup>1</sup> en séries ordonnées suivant les puissances de cette quantité a dû tout naturellement se présenter à l'esprit des géomètres. LAPLACE, dans sa *Mécanique céleste*, et POISSON, dans son *Traité de mécanique*, ont donné de ce problème des solutions à la fois élégantes et rigoureuses. Je n'ai pas, bien entendu, la prétention de faire mieux qu'eux: je voudrais montrer seulement qu'on peut obtenir les premiers termes de ces séries, les seuls importants pour la pratique, par des calculs tout élémentaires et propres à être introduits dans l'enseignement. Mettons les équations (4) et (5) sous la forme

$$\begin{cases} r \sin v = a \cos \varphi \sin u \\ r \cos v = a(\cos u - e) \end{cases}$$

et différencions-les par rapport à  $e$ : on a

$$(9) \quad \begin{cases} \sin v \frac{dr}{de} + r \cos v \frac{dv}{de} = -a \sin \varphi \sin u \frac{d\varphi}{de} + a \cos \varphi \cos u \frac{du}{de} \\ \cos v \frac{dr}{de} - r \sin v \frac{dv}{de} = -a \left( \sin u \frac{du}{de} + 1 \right). \end{cases}$$

<sup>1</sup> C'est la différence  $v-M$ , ou l'excès de l'anomalie vraie sur l'anomalie moyenne, que les astronomes appellent l'équation du centre.

En différentiant de même les équations

$$u - e \sin u = M, \sin \varphi = e,$$

on obtient

$$\frac{du}{de} - e \cos u \frac{du}{de} - \sin u = 0 \quad \cos \varphi \frac{d\varphi}{de} = 1,$$

d'où

$$\frac{du}{de} = \frac{\sin u}{1 - e \cos u} = \frac{a \sin u}{r},$$

ou, en vertu de l'équation (6),

$$(10) \quad \frac{du}{de} = \frac{\sin v}{\cos \varphi}.$$

D'autre part

$$(11) \quad \frac{d\varphi}{de} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

En introduisant dans les équations (9) ces expressions, ainsi que celles de  $\sin u$  et de  $\cos u$  données par les équations (6) et (7), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin v \frac{dr}{de} + r \cos v \frac{dv}{de} = -a \sin \varphi \cdot \frac{r \sin v}{a \cos^2 \varphi} + a \cos \varphi \cdot \frac{r(\cos v + e) \sin v}{a \cos^2 \varphi \cos \varphi} \\ \cos v \frac{dr}{de} - r \sin v \frac{dv}{de} = -a \left( \frac{r \sin v}{a \cos \varphi} \cdot \frac{\sin v}{\cos \varphi} + 1 \right) \end{array} \right.$$

ou, en simplifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin v \frac{dr}{de} + r \cos v \frac{dv}{de} = \frac{r \sin v \cos v}{\cos^2 \varphi} \\ \cos v \frac{dr}{de} - r \sin v \frac{dv}{de} = \frac{r \sin^2 v + a \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \end{array} \right.$$

d'où l'on tire aisément

$$(12) \quad \frac{dr}{de} = -a \cos v \quad \frac{r dv}{de} = \left( \frac{r + a \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) \sin v$$

ou

$$(13) \quad \frac{dv}{de} = \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{a}{r} \right) \sin v.$$

La série de Mac-Laurin donne

$$r = r_0 + \frac{e}{1} \left( \frac{dr}{de} \right)_0 + \frac{e^2}{1.2} \left( \frac{d^2r}{de^2} \right)_0 + \dots$$

$$v = v_0 + \frac{e}{1} \left( \frac{dv}{de} \right)_0 + \frac{e^2}{1.2} \left( \frac{d^2v}{de^2} \right)_0 + \dots$$

les quantités affectées d'indices étant ce que deviennent ces mêmes quantités sans indices quand on y fait  $e=0$ .

De  $r = a(1 - e \cos u)$  on tire  $r_0 = a$ .

Les égalités  $\begin{cases} r \sin v = a \cos \varphi \sin u \\ r \cos v = a(\cos u - e) \end{cases} u - e \sin u = M, \sin \varphi = e$

deviennent, pour  $e=0$ ,

$\begin{cases} \sin v_0 = \sin u_0 \\ \cos v_0 = \cos u_0 \end{cases} u_0 = M, \text{ d'où } v_0 = M; \varphi_0 = 0, \text{ d'où } \cos \varphi_0 = 1.$

On a ensuite, d'après (12) et (13) :

$$\left( \frac{dr}{de} \right)_0 = -a \cos M, \quad \left( \frac{dv}{de} \right)_0 = 2 \sin M.$$

Pour obtenir les dérivées suivantes, posons

$$\frac{dv}{de} = P(Q + R),$$

formule dans laquelle

$$P = \sin v, \quad Q = \cos^{-2} \varphi, \quad R = ar^{-1}.$$

On a alors :

$$P' = \cos v \frac{dv}{de}, \quad Q' = 2 \cos^{-3} \varphi \sin \varphi \frac{d\varphi}{de} = 2 \sin \varphi \cos^{-4} \varphi, \quad R' = -ar^{-2} \frac{dr}{de}$$

d'où

$$P_0 = \sin M, \quad Q_0 = 1, \quad R_0 = 1, \quad P'_0 = 2 \sin M \cos M = \sin 2M;$$

$$Q'_0 = 0, \quad R'_0 = -\frac{1}{a} (-a \cos M) = \cos M$$

puis

$$\left(\frac{d^2r}{de^2}\right)_0 = a \sin v_0 \left(\frac{dv}{de}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2v}{de^2}\right)_0 = P_0(Q'_0 + R'_0) + P'_0(Q_0 + R_0)$$

ou

$$\left(\frac{d^2r}{de^2}\right)_0 = 2a \sin^2 M = a(1 - \cos 2M); \quad \left(\frac{d^2v}{de^2}\right)_0 = \sin M \cos M + 2 \sin 2M = \frac{5}{2} \sin 2M$$

Pour les troisièmes dérivées, on a :

$$\left(\frac{d^3r}{de^3}\right)_0 = a \cos v_0 \left(\frac{dv}{de}\right)_0^2 + a \sin v_0 \frac{d^2v}{de^2_0}; \quad \left(\frac{d^3v}{de^3}\right)_0 = P_0(Q''_0 + R''_0) + 2P'_0(Q'_0 + R'_0) + P''_0(Q_0 + R_0)$$

mais

$$P'' = -\sin v \left(\frac{dv}{de}\right)^2 + \cos v \frac{d^2v}{de^2}; \quad Q'' = 2 \cos^{-3} \varphi \frac{d\varphi}{de} + 8 \sin^2 \varphi \cos^{-5} \varphi \frac{d\varphi}{de},$$

ou

$$Q'' = 2 \cos^{-4} \varphi + 8 \sin^2 \varphi \cos^{-6} \varphi; \quad R'' = 2ar^{-3} \left(\frac{dr}{de}\right)^2 - ar^{-2} \frac{d^2r}{de^2};$$

d'où

$$P''_0 = 4 \sin^3 M + \frac{5}{2} \sin 2M \cos M; \quad Q''_0 = 2; \quad R''_0 = 2 \cos^2 M - (1 - \cos 2M) = 2 \cos 2M$$

On a ainsi

$$\left(\frac{d^3r}{de^3}\right)_0 = 4a \sin^2 M \cos M + \frac{5}{2} a \sin M \sin 2M$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3v}{de^3}\right)_0 &= \sin M(2 + 2\cos 2M) + 2\sin 2M \cos M + 2\left(-4\sin^3 M + \frac{5}{2}\sin 2M \cos M\right) \\ &= 2\sin 3M + 2\sin M - 8\sin 3M + 5\sin 2M \cos M. \end{aligned}$$

Par la transformation bien connue

$$\sin M = \frac{e^{+iM} - e^{-iM}}{2i}, \quad \cos M = \frac{e^{+iM} + e^{-iM}}{2}, \quad \sin 2M = \frac{e^{2iM} - e^{-2iM}}{2i}$$

( $e$  étant ici la base des logarithmes népériens) et les transformations inverses, on obtient aisément

$$\sin^2 M \cos M = \frac{\cos M - \cos 3M}{4}; \quad \sin M \sin 2M = \frac{\cos M - \cos 3M}{2};$$

$$\sin^3 M = \frac{3\sin M - \sin 3M}{4}; \quad \sin 2M \cos M = \frac{\sin M + \sin 3M}{2};$$

d'où, après quelques transformations,

$$\frac{d^3r}{de^3} = \frac{9a}{4}(\cos M - \cos 3M); \quad \frac{d^3v}{de^3} = \frac{13}{2}\sin 3M - \frac{3}{2}\sin M.$$

On pourrait poursuivre le calcul par la même méthode. En se bornant aux termes obtenus, on a les expressions suivantes, bien suffisantes pour la pratique :

$$\begin{aligned} a &= a \left[ 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) + \frac{3e^3}{8}(\cos M - \cos 3M) + \dots \right] \\ v - M &= 2e \sin M + \frac{5e^2}{4}\sin 2M + \frac{e^3}{12}(13\sin 3M - \sin M) + \dots \end{aligned}$$

Elles sont d'ailleurs conformes à celles qu'on obtient par d'autres méthodes plus compliquées.