

Zeitschrift: Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
Band: 33 (1904-1905)

Artikel: Lie et son œuvre
Autor: Isely, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-88518>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Séance du 28 avril 1905

LIE ET SON ŒUVRE

PAR L. ISELY, PROFESSEUR

Les mathématiques du XIX^{me} siècle doivent à la Norvège deux de leurs plus illustres représentants: Niels Henrik Abel et Sophus Lie. Le premier (1802-1829), que ses malheurs autant que ses découvertes ont rendu célèbre, donna à l'algèbre supérieure et à la théorie des fonctions elliptiques, dont il aperçut la double périodicité, un essor extraordinaire. Le second (1842-1899) acquit un renom universel par ses conceptions géniales sur la géométrie des sphères, les transformations de contact et leur application aux équations aux dérivées partielles, la théorie des groupes continus de transformations et les bases de la géométrie.

Ayant constaté que la détermination de la sphère, aussi bien que celle de la droite, dépendait de six coordonnées homogènes liées entre elles par une équation quadratique également homogène, Sophus Lie parvint, au moyen de substitutions linéaires, à passer sans peine de l'un de ces éléments d'espace à l'autre. Dans l'une des conférences qu'il fit du 28 août au 9 septembre 1893 devant le Congrès des mathématiciens réunis à Chicago lors de l'Exposition, M. Félix Klein, le savant professeur de Göttingue, s'exprime à ce sujet ainsi qu'il suit¹: « Prenant

¹ *L'œuvre géométrique de Sophus Lie* (traduit de l'anglais par M. L. Laugel). *Nouvelles annales de mathématiques*, 3^{me} série, t. XV (janvier 1896).

l'équation de la sphère sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Bx - 2Cy - 2Dz + E = 0,$$

les coefficients B, C, D, E peuvent être regardés comme les coordonnées de la sphère, et l'espace ordinaire se présente alors comme une variété¹ (*Mannigfaltigkeit*) à quatre dimensions. Quant au rayon R de la sphère, nous avons

$$R^2 = B^2 + C^2 + D^2 - E,$$

relation qui lie la cinquième grandeur R aux quatre coordonnées B, C, D, E.

Pour introduire des coordonnées homogènes, posons

$$B = \frac{b}{a}, C = \frac{c}{a}, D = \frac{d}{a}, E = \frac{e}{a}, R = \frac{r}{a};$$

alors a, b, c, d, e sont les cinq coordonnées homogènes de la sphère, et la sixième grandeur r leur est liée par l'entremise de l'équation quadratique homogène

$$r^2 = b^2 + c^2 + d^2 - ae. \gg$$

Antérieurement à Lie, on admettait communément que la sphère était déterminée par les cinq quantités a, b, c, d, e , assujetties à vérifier l'expression homogène

$$b^2 + c^2 + d^2 - ae = 0,$$

obtenue en supposant $r = 0$ dans l'équation ci-dessus, ce qui revient à dire que la sphère se réduit à un point. Le géomètre norvégien généralisa la question en choisissant les six grandeurs a, b, c, d, e, r pour

¹ On dit aussi une multiplicité.

les coordonnées homogènes de la sphère. D'où deux conceptions différentes du même objet. Dans la première, que M. F. Klein désigne sous la dénomination de *géométrie élémentaire des sphères*, on n'emploie que les cinq paramètres a, b, c, d, e . Le groupe qui lui correspond est celui des transformations ponctuelles dites *conformes*, dont la conservation des angles est le caractère distinctif. La plus connue est l'inversion ou transformation par rayons vecteurs réciproques, dont la projection stéréographique n'est qu'un cas particulier. Le propre de ces méthodes réside dans le changement des sphères en sphères, le plan étant assimilé à une sphère de rayon infiniment grand. Cette géométrie a conduit M. Darboux à des recherches du plus haut intérêt sur les *cyclides*¹, ces surfaces du quatrième ordre, ou quartiques, admettant pour ligne double, ou courbe nodale, le cercle de l'infini. Le tore, les podaires et les inverses de quadriques, sont les exemples les plus simples de ce genre de surfaces, dont la classique *cyclide de Dupin* est le type le plus remarquable.

Dans la *géométrie supérieure des sphères* ou de *Lie*, comme l'appelle M. F. Klein, on introduit la sixième grandeur r , liée aux cinq précédentes par l'équation homogène déjà mentionnée :

$$b^2 + c^2 + d^2 - ae = r^2.$$

¹ DARBOUT, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, mémoire présenté à l'Académie des sciences en 1869, 1^{re} édit., 1873; 2^{me} édit., 1896. — *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 1887-1896.

Voir aussi : CASEY, *Sur les cyclides et les sphéro-quartiques* (*Phil. trans.*, t. CLXI); MOUTARD, *Nouvelles annales de mathématiques*, 1864; NEUBERG, *Sur la cyclide de Dupin* (*Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*, 2^{me} série, t. X, 1884); SALMON, *Traité de géométrie analytique à trois dimensions* (trad. O. Chemin), 3^{me} partie, 1892; etc.

Le groupe correspondant n'est plus caractérisé par des transformations ponctuelles. En effet, toute sphère de rayon nul, c'est-à-dire tout point de l'espace, devient une sphère dont le rayon est, en général, différent de zéro. Un point se transforme ainsi en une sphère de rayon déterminé. De plus, des sphères primitivement en contact demeurent encore en contact après la transformation. Nous sommes ainsi conduits aux fameuses transformations dites *de contact*, dont la découverte constitue un des plus beaux titres de gloire du géomètre scandinave, bien qu'occasionnellement entrevues avant lui par Legendre, Plücker et Jacobi¹. Comme leur nom l'indique, dans ce genre de transformations, le contact est une propriété invariante. Les courbes, ou les surfaces, qui se touchent, se changent en courbes, ou en surfaces, possédant la même vertu.

Dans sa *géométrie de la droite*, Plücker avait introduit six coordonnées homogènes, liées entre elles par une équation quadratique également homogène. Lie ne tarda pas à discerner l'étonnante connexion de sa propre géométrie des sphères avec la géométrie plückérienne de la droite. De simples substitutions linéaires lui permirent de passer de l'une à l'autre; dès 1870, il parvint ainsi à « rattacher toute proposition relative à des droites à une proposition relative à des sphères et *vice versa*² ». Il reconnut, en premier lieu, que deux sphères en contact correspondent à deux droites qui se coupent, remarque qui l'amena à

¹ LIE, *Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen* (*Math. annalen*, t. VIII), Leipzig, 1872.

² DARBOUX, *Etude sur le développement des méthodes géométriques*, Paris, 1904.

établir un rapprochement ingénieux entre deux surfaces en apparence complètement dissemblables : l'hyperboloïde à une nappe et la cyclide de Dupin. On sait, en effet, que toutes les droites (*génératrices*) qui rencontrent trois droites fixes quelconques (*directrices*), en rencontrent une infinité. C'est en quoi consiste la génération rectiligne de l'hyperboloïde, qui forme, avec son voisin le paraboloid hyperbolique, la classe si intéressante des quadriques gauches. De même, toutes les sphères tangentes à trois sphères fixes en touchent une infinité. L'enveloppe de ces sphères n'est autre que la cyclide de Dupin, dont il a déjà été fait mention plus haut. Le colonel Mannheim a démontré d'une façon élégante que cette surface remarquable à tant d'égards est la transformée d'un tore par rayons vecteurs réciproques¹.

Poursuivant le cours de ses investigations, dont le début avait été si brillant, Lie fut conduit quelques années plus tard (1872-1873) à la transformation générale qui porte son nom. Partant de l'idée de l'*élément de contact* ou de *surface* (on appelle ainsi l'ensemble d'un point et d'un plan passant par ce point), il parvint à remplacer des lignes se coupant dans l'espace par des surfaces tangentes entre elles, et à faire correspondre les lignes de courbure d'une surface aux lignes asymptotiques de sa transformée, et réciproquement. D'où le beau théorème, auquel M. G. Humbert, professeur à l'École polytechnique de Paris, donne l'énoncé suivant :

« Soient deux surfaces, s et S , transformées l'une

¹ GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. I^{er}, p. 592. Paris, 1902.

HUMBERT, *Cours d'analyse*, t. I^{er}, p. 446. Paris, 1903.

de l'autre par la transformation de Lie; à un point m de s correspond un point M de S : quand m décrit une ligne asymptotique de s , M décrit une ligne de courbure de S . » (*Cours d'analyse*, t. I^{er}, p. 447).

Il convient de rappeler ici que, dans un mémoire publié dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXVII, 1899, p. 146), le regretté Ernest Duporcq a généralisé la transformation de Lie, en faisant correspondre aux droites de l'espace, non les sphères, mais les quadriques circonscrites à une quadrique fixe. Dans un article remarquable, inséré dans la livraison du mois de mai 1905 des *Nouvelles annales de mathématiques*, M. R. Bricard définit, par des formules très simples, une transformation qui jouit de propriétés identiques à celle de Duporcq, et admet, comme cas particulier, la transformation de Lie (p. 221-225).

Mais l'une des plus merveilleuses applications des transformations de contact est celle que l'illustre géomètre norvégien fit à l'interprétation des équations aux dérivées partielles et de leurs intégrales. Car, il est bon qu'on le sache, le but constant poursuivi par Lie dans ses investigations géométriques a été le perfectionnement de la théorie des équations différentielles¹, comme le prouvent ses nombreux ouvrages sur cette matière². S'occupant tout d'abord des

¹ GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. Paris, 1892.

² LIE, *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung* (*Göttinger Nachrichten*, 1872); *Ueber partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Christiania, 1878; *Untersuchungen über Differentialgleichungen*, Christiania, 1882; *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y , die eine Gruppe von Transformationen gestatten*, Christiania, 1883; *Ueber Integralinvarianten und Differentialgleichungen*, Christiania, 1902, etc.

équations aux dérivées partielles du premier ordre, il réussit à définir, même dans les cas les plus spéciaux, les trois sortes de solutions dont elles sont susceptibles : *complète*, *générale* et *singulière*. Malgré les admirables travaux de Monge, de Lagrange, de Jacobi et de Cauchy, ce chapitre important du calcul infinitésimal péchait par un manque de précision et d'uniformité. Lie sut, le premier, ramener toutes les variétés de ces équations, en apparence distinctes les unes des autres, à un type unique très simple. Les transformations de contact lui fournirent ensuite un mode de représentation géométrique de leurs intégrales, qui ne laisse rien à désirer au double point de vue de l'élégance et de la clarté.

Résumons ici, d'après l'excellent aperçu qu'en donne M. F. Klein, les idées de Sophus Lie sur ce sujet. On sait que les équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes sont de la forme

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

p et q étant les dérivées premières de la fonction z par rapport à x et y respectivement.

Toute équation différentielle de ce genre admet trois sortes de solutions, savoir :

1^o Une solution renfermant deux constantes arbitraires. C'est l'*intégrale complète*.

2^o Une solution dépendant d'une fonction arbitraire. C'est l'*intégrale générale*.

3^o Une solution qui ne contient rien d'arbitraire. C'est l'*intégrale singulière*.

Lagrange¹ a montré comment, la première de ces solutions étant connue, on en peut déduire les deux autres, à l'aide de simples différentiations et éliminations. C'est la méthode généralement suivie dans les cours actuels².

« Dans l'ancienne théorie classique, ainsi s'exprime M. F. Klein, on fait une distinction suivant la manière dont p et q se présentent dans l'équation. Ainsi, lorsque p et q y entrent au premier degré, l'équation est dite *linéaire*; si p et q tous deux étaient absents, l'on ne regarderait pas l'équation comme étant une équation *différentielle*. Au point de vue de la nouvelle géométrie de Lie, ces distinctions disparaissent complètement, comme nous allons le voir.

« Le nombre de tous les éléments de surface, dans tout l'espace, est évidemment ∞^5 .

« Ecrire notre équation différentielle, c'est mettre à part, prendre parmi ces éléments une variété à quatre dimensions M_4 de ∞^4 éléments.

« Or, trouver une *solution* de l'équation au sens de Lie, c'est prendre encore dans cette M_4 , et mettre à part, une variété M_2 jouissant de la propriété caractéristique; que cette M_2 soit point, courbe ou surface, c'est là chose indifférente.

« Ce que Lagrange nomme trouver une *solution complète* consiste à partager l' M_4 en ∞^2 variétés M_2 . Ceci, naturellement, peut être pratiqué d'un nombre infini de manières. Enfin, si dans ces ∞^2 variétés M_2

¹ *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, 1774, p. 266,

² Voir entre autres: HOÜEL, *Cours de calcul infinitésimal*, t. III, p. 186-189. Paris 1880.

HUMBERT, *Cours d'analyse*, t. II, p. 456-460. Paris, 1904.

GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. II, p. 552-555. Paris, 1905.

nous prenons un système simplement infini, l'enveloppe de ce système représente ce que Lagrange nomme *solution générale*. Ces définitions sont valables d'une manière toute générale pour *toutes* les équations aux dérivées partielles du premier ordre, sous leurs formes même les plus particulières¹. »

Puis le savant professeur de l'Université de Goettingue fait voir par un exemple en quel sens une équation $f(x, y, z) = 0$, où p et q manquent, peut être regardée comme une équation différentielle, et ce que signifient alors ses diverses solutions. « Prenons, dit-il, le cas tout spécial $z = 0$. Tandis que, dans le système habituel de coordonnées, cette expression représente *tous les points* du plan des xy , dans le système de *Lie*, elle représente naturellement *tous les éléments* (de surface) dont les points font partie du plan. Rien de plus simple que d'assigner une *solution complète* dans ce cas. Nous n'avons qu'à prendre les ∞^2 points du plan eux-mêmes, chaque point étant une M_2 relative à l'équation.

« Pour déduire de ceci la *solution générale*, nous devons prendre tous les systèmes en nombre simplement infini de points du plan, autrement dit une courbe quelconque, et former alors l'enveloppe des éléments de surface appartenant aux points; en d'autres termes encore, nous devons prendre les éléments qui ont un contact avec la courbe. En dernier lieu, c'est évidemment le plan lui-même qui représente une *solution singulière*.

« Or, l'immense importance et l'intérêt capital de ce simple exemple tiennent à cette circonstance qu'à

¹ *Nouvelles annales de mathématiques*, 3^{me} série, t. XV (janvier 1896); p. 17-19.

l'aide d'une transformation de contact, toute équation aux dérivées partielles du premier ordre peut être mise sous cette forme particulière si simple, $z = 0$. Ainsi, toute la disposition des solutions que nous venons d'esquisser à grands traits reste valable et légitime d'une manière toute générale. »

L'étude des transformations de contact apporta aussi quelques éclaircissements à la théorie encore si obscure des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier. Elle permit à Lie, en particulier, de généraliser les recherches si originales de Monge et d'Ampère sur l'intégration des équations du second ordre à deux variables indépendantes, et d'indiquer tous les cas où la méthode des *caractéristiques* du premier de ces géomètres est pleinement applicable à ce genre d'expressions.

Les équations aux dérivées partielles du second ordre attirèrent l'attention de Lie sur les *surfaces minima*. On donne ce nom aux surfaces qui ont pour *indicatrice*, en chaque point, une hyperbole équilatère, ou, en d'autres termes, celles dont les rayons de courbure principaux sont égaux et de signe contraire. Lagrange (1760-1761) et Meusnier (1785) en ont fondé la théorie. Mais c'est à Monge que l'on doit la première intégration de leur équation aux dérivées partielles. Lie perfectionna la méthode et les formules du géomètre français et résolut, d'une manière complète, le problème concernant la détermination de toutes les surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique, sans que la courbe de contact soit donnée¹. Il fut ainsi, dans ce chapitre

¹ DARBOUX, *Etude sur le développement des méthodes géométriques*, p. 25.

si attrayant de la géométrie infinitésimale, l'émule heureux des Bonnet, des Darboux, des Riemann, des Schwarz et des Weierstrass.

Lie eut moins de succès lorsqu'il tenta d'intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces à *courbure constante*. On sait que, R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux, l'on donne à l'inverse du produit R_1R_2 le nom de *courbure totale* de la surface au point considéré, tandis que la somme $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

en est la *courbure moyenne*. La condition de constance de l'une ou de l'autre de ces courbures est une équation différentielle, que Bour prétendait avoir complètement intégrée. S. Lie, voulant en avoir le cœur net, essaya, mais en vain, d'appliquer une méthode générale d'intégration des équations aux dérivées partielles à l'équation particulière des surfaces à courbure constante. Cependant, ses efforts, et ceux des géomètres ses contemporains, ne demeurèrent pas infructueux. Comme M. Darboux le fait fort judicieusement remarquer, « s'il est impossible de déterminer en termes finis toutes ces surfaces, on a pu du moins en obtenir quelques-unes, caractérisées par des propriétés spéciales, telles que celle d'avoir leurs lignes de courbure planes ou sphériques; et l'on a montré, en employant une méthode qui réussit dans beaucoup d'autres problèmes, que l'on peut faire dériver de toute surface à courbure constante une infinité d'autres surfaces de même nature, par des opérations nettement définies qui n'exigent que des quadratures¹ ».

¹ DARBOUX, *Etude sur le développement des méthodes géométriques*, p. 26.

Lie mit un couronnement à son œuvre par sa magistrale théorie des *groupes continus de transformations*. Au début du siècle dernier, Evariste Galois, dont la mort prématurée fut pour la science un malheur irréparable¹, avait jeté les bases de son admirable conception des *groupes de substitutions*, qui devait exercer une influence considérable sur l'évolution de la pensée mathématique. Ce que Galois avait fait pour l'algèbre, Lie le réalisa pour l'analyse et la géométrie. En y introduisant la notion de *groupe*, il éclaira d'un jour tout nouveau trois des chapitres les plus importants des sciences exactes, pures et appliquées : la théorie de l'intégration, celle des quantités complexes et la géométrie non euclidienne. Dans le premier de ces domaines, il généralisa les recherches d'Halphen sur les *invariants différentiels* qu'Ampère avait déjà considérés dans des cas particuliers. Dans le second, il aperçut la connexité entre sa théorie des groupes et les nombres complexes, connexité que les travaux de MM. Poincaré et Scheffers ont rendue plus étroite encore. « Le rapprochement entre la théorie des groupes de Lie et les nombres complexes, dit M. Emile Picard, fait disparaître le mystère qui semblait planer sur ceux-ci, et la véritable origine des symboles est ainsi bien mise en évidence². » Enfin, reprenant les idées d'Helmholtz sur l'espace, Lie fut amené à regarder toute géométrie comme l'étude d'un groupe qui la caractérise, et à légitimer, tout en la fortifiant, la conception moderne des hyperespaces.

¹ Galois fut tué en duel le 30 mai 1832. Il était né le 25 octobre 1811 !

² PICARD, *Sur le développement de l'analyse*, p. 35. Paris, 1905.

M. Poincaré qui, à l'instar de M. Klein en Allemagne, s'est fait en France le défenseur des principes non euclidiens, ne place-t-il pas en tête de son mémoire sur l'*Analysis situs*¹ les lignes suivantes : « La géométrie à n dimensions a un objet réel, personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la mécanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de tout objet, il n'en est pas de même de l'hypergéométrie.

« La géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe. Rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes. »

M. Laisant, par contre, ne se prononce sur cette matière qu'avec une sage réserve. « Les géométries à plus de trois dimensions, dit-il, n'ont guère été qu'un moyen de donner des formes géométriques à des faits algébriques... Elles abrègent le langage, peuvent dispenser de longs calculs, permettre à l'esprit de moins s'égarer dans les symboles. Mais autant une pareille étude est digne d'intérêt et d'une utilité réelle si on la maintient dans ses limites naturelles, autant elle deviendrait funeste dans le cas où l'on prétendrait lui accorder la réalité qui appartient à l'espace dans lequel nous vivons. Cela ne deviendrait plus qu'un jeu plus ou moins brillant de l'esprit, se mettant au

¹ *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1895, p. 1-125.

service de rêveries directement contraires au but de la mathématique¹. »

Certains esprits exaltés ne vont-ils pas, en effet, jusqu'à affirmer l'existence d'un hyperespace, dont notre monde tangible et visible ne serait qu'une variété à trois dimensions, sorte d'Olympe scientifique où réside la Divinité et où se rendent les âmes après avoir quitté leur enveloppe périssable ! De tout temps, le surnaturel a eu des partisans aveugles mais convaincus.

Lie a exposé sa doctrine dans une série d'ouvrages, dont le plus étendu comme le plus important est sa magistrale *Theorie der Transformationsgruppen*², publiée en collaboration avec le professeur Engel. L'application qu'il y fait de la notion de groupe à la définition et au rôle des axiomes en géométrie, dont il a cherché à réduire le nombre au minimum, a servi de point de départ aux savantes recherches de M. Hilbert sur ce sujet³.

L'œuvre de Lie, on le voit, a été considérable. Elle brille surtout par l'originalité et la diversité. La postérité l'a consacrée, en plaçant à côté des plus grands noms de l'Histoire celui du modeste géomètre scandinave.

¹ LAISANT, *La Mathématique*, p. 104-105. Paris, 1898. — Consulter aussi sur ce sujet : JOUFFRET, *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions*. Paris, 1903. — HERMANN, *La Pangéométrie*, n° 20 de la collection *Scientia*; etc.

² 3 vol., Leipzig, Teubner; 1888-1893.

³ HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 2^{me} éd.; Leipzig, 1903; p. 121-162, — Voir aussi : POINCARÉ, *Les fondements de la Géométrie, à propos de l'ouvrage de M. Hilbert*. Paris, 1902.