Zeitschrift: Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles

Band: 27 (1898-1899)

Artikel: Intégrale d'un système de deux équations différentielles se rapportant à un circuit téléphonique, et son interprétation

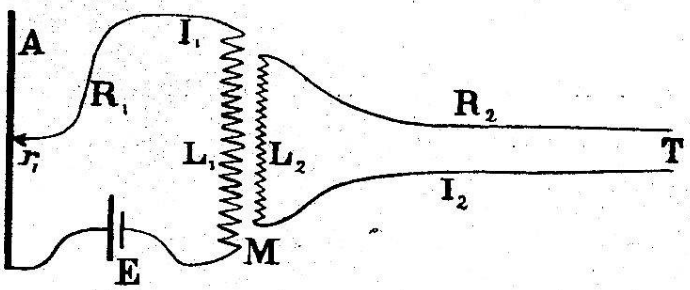
Autor: Weber, Robert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88424

Intégrale d'un système de deux équations différentielles se rapportant à un circuit téléphonique, et son interprétation,

Par ROBERT WEBER, Professeur

Désignons dans un circuit microphone-téléphonique, tel qu'il est représenté par le schéma ci-contre, par r, la résistance variable au contact microphonique; par R_1, I_1, L_1 et E la résistance totale, l'intensité, la self-induction et la force électro-motrice dans le circuit primaire ou microphonique; par R_2, J_2, L_2 les quantités correspondantes du second circuit contenant le téléphone, et par M l'induction mutuelle dans la bobine du microphone. La résistance R_1 se compose



d'une quantité constante R_0, réalisée quand la membrane A ne vibre pas, et de la quantité variable r_1. On sait que la résistance r_1 varie comme une fonction harmonique, si la membrane A a un mouvement vibratoire harmonique. En désignant par n le nombre de vibrations de la membrane, et en posant $\omega = 2\pi n$, on aura les relations

$$R_1 = R_0 + r_1 = R_0 + r_0 \cos \omega t \qquad (1)$$
$$I_1 = I_0 - i_1 = I_0 - i_0 \cos (\omega t + \alpha) \qquad (2)$$
$$E = I_0 R_0 \qquad (3)$$

La loi générale sur l'induction, formulée par Neumann, dit que la somme algébrique de toutes les forces électro-motrices d'un circuit fermé est nulle. En l'appliquant au circuit microphonique d'abord, puis au circuit téléphonique, elle fournit les relations

$$(I_1 R_1 - E) + L_1 \times \frac{dI_1}{dt} + M \times \frac{dI_2}{dt} = 0 \qquad (4)$$

$$I_2 R_2 + L_2 \times \frac{dI_2}{dt} + M \times \frac{dI_1}{dt} = 0 \qquad (5)$$

Les équations (1), (2), (3) permettent d'éliminer $I_1 R_1$ de (4). En outre, $r_1 i_1$ est une quantité négligeable par rapport aux autres termes de (4), de sorte que cette équation devient

$$r_0 I_0 \cos \omega t - R_0 (I_1 - I_0) + L_1 \times \frac{dI_1}{dt} + M \times \frac{dI_2}{dt} = 0 \quad (6)$$

Les équations (5) et (6) nous fourniront la quantité à chercher, l'intensité I_2 du courant induit dans le circuit téléphonique.

Après avoir éliminé dI_1/dt entre (6) et (5), et avoir différentié une fois par rapport à t, on peut combiner l'équation obtenue à (5) pour éliminer dI_1/dt entre elles. Le résultat sera

$$\frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{R_0 L_2 - R_2 L_1}{M^2 - L_1 L_2} \times \frac{dI_2}{dt} + \frac{R_0 R_1}{M^2 - L_1 L_2} \times I_2 = \frac{\omega r_0 I_0 M}{M^2 - L_1 L_2} \sin \omega t \quad (7)$$

Cette équation différentielle de second ordre étant pourvue du second membre, son intégrale générale I_2

se compose de la somme de deux intégrales: de l'intégrale générale Z de la même équation différentielle (7) dépourvue du second membre, et d'une intégrale particulière I de l'équation différentielle complète (7), c'est-à-dire

$$I_2 = I + Z \tag{8}$$

Trouvons d'abord l'intégrale générale Z de l'équation différentielle (7) dépourvue du second membre.

Son équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{R_0 L_2 - R_2 L_1}{M^2 - L_1 L_2} \times r + \frac{R_0 R_1}{M^2 - L_1 L_2} = 0; \tag{9}$$

dont les racines sont

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\frac{R_0 L_2 - R_2 L_1}{2(M^2 - L_1 L_2)} + \frac{\sqrt{(R_0 L_2 + R_2 L_1)^2 - 4 R_0 R_2 M^2}}{2(M^2 - L_1 L_2)} \\ r_2 &= -\frac{R_0 L_2 - R_2 L_1}{2(M^2 - L_1 L_2)} - \frac{\sqrt{(R_0 L_2 + R_2 L_1)^2 - 4 R_0 R_2 M^2}}{2(M^2 - L_1 L_2)} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ecrivons-les, pour simplifier et pour marquer qu'elles peuvent contenir des quantités imaginaires,

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -p + q.i, \\ r_2 &= -p - q.i. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

L'intégrale générale cherchée sera donc

$$Z = C_1 . e^{-pt + qt.i} + C_2 . e^{-pt - qt.i} \tag{12}$$

Nous la transformons d'abord, en introduisant les fonctions trigonométriques à la place des fonctions exponentielles, en

$$Z = e^{-pt} \times \left\{ (C_1 + C_2) \cos qt + i (C_1 - C_2) \sin qt \right\}.$$

Par la formule goniométrique

$$A \sin x \pm B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left(x \pm \operatorname{arc} tg \frac{B}{A}\right) \quad (13)$$

on peut réunir les deux fonctions trigonométriques, de sorte que

$$Z = e^{-pt} . C \sin \left\{ qt + \operatorname{arc} tg C' \right\}, \quad (14)$$

formule dans laquelle C et C′ ne sont formées que par C_1 et C_2. Si nous substituons maintenant les valeurs de p et q telles qu'elles dérivent de (10) et (11), l'intégrale générale cherchée devient

$$Z = C . e^{-\frac{R_0 L_2 - R_2 L_1}{M^2 - L_2 L_1} t} \times$$
$$\times \sin \left\{ \frac{4 R_0 R_2 M^2 - (R_0 L_2 + R_2 L_1)^2}{2(M^2 - L_1 L_2)} t + \beta \right\} \quad (15)$$

La seconde partie de la solution générale de (7), l'intégrale particulière I de cette équation différentielle complète s'obtient en la supposant de la forme

$$I = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (16)$$

dans laquelle les constantes a et b seraient à déterminer. En effet, écrivons, pour abréger, l'équation (7)

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + P . \frac{dI}{dt} + Q . I = R . \sin \omega t, \quad (17)$$

formons avec (16) les expressions pour dI/dt et d^2I/dt^2 et substituons-les dans (17). Cette équation différentielle se décompose en les deux équations de condition

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 a - \omega b P + a Q &= R\,, \\ -\omega^2 b + \omega a P + b Q &= 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Elles donnent comme valeurs pour les constantes a et b

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{R(Q-\omega^2)}{\omega^2 P^2 + (Q-\omega^2)^2}\,, \\ b &= \frac{-\omega P R}{\omega^2 P^2 + (Q-\omega^2)^2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

et, en outre,

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{a^2+b^2} &= \frac{R}{\sqrt{\omega^2 P^2 + (Q-\omega^2)^2}} \\ \text{et} \quad \frac{b}{a} &= -\frac{\omega . P}{Q-\omega^2} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Si l'on substitue maintenant les valeurs pour a et b de (19) dans l'expression (16), et si l'on réunit ensuite les deux fonctions trigonométriques d'après (13), l'intégrale particulière de (17) devient

$$I = \frac{R}{\sqrt{\omega^2 P^2 + (Q-\omega^2)^2}} \sin\left\{\omega t + \operatorname{arc} tg \frac{-\omega P}{Q-\omega^2}\right\} \quad (21)$$

En remplaçant les valeurs qui conviennent à P, Q, R, d'après (17) et (7), on aura l'intégrale particulière

$$I = \frac{\omega r_0 I_0 M}{\sqrt{\omega^2 (R_0 L_2 - R_2 L_1)^2 + [R_0 R_2 - \omega^2 (M^2 - L_1 L_2)]^2}} \times$$
$$\times \sin\left\{\omega t + \operatorname{arc} tg \frac{\omega (R_2 L_1 - R_0 L_2)}{R_0 R_2 - \omega^2 (M^2 - L_1 L_2)}\right\} \quad (22)$$

Nous réunissons maintenant les deux parties (22) et (15) pour avoir la solution générale de l'équation différentielle pourvue de son second membre (7)

$$I_2 = I + Z =$$

$$I_2 = \frac{\omega r_0 I_0 M}{\sqrt{\omega^2 [R_0 L_2 - R_2 L_1]^2 + [R_0 R_2 - \omega^2 (M^2 - L_1 L_2)]^2}} \times$$

$$\times \sin \left\{ \omega t + \operatorname{arc} tg \frac{\omega (R_2 L_1 - R_0 L_2)}{R_0 R_2 - \omega^2 (M^2 - L_1 L_2)} \right\} +$$

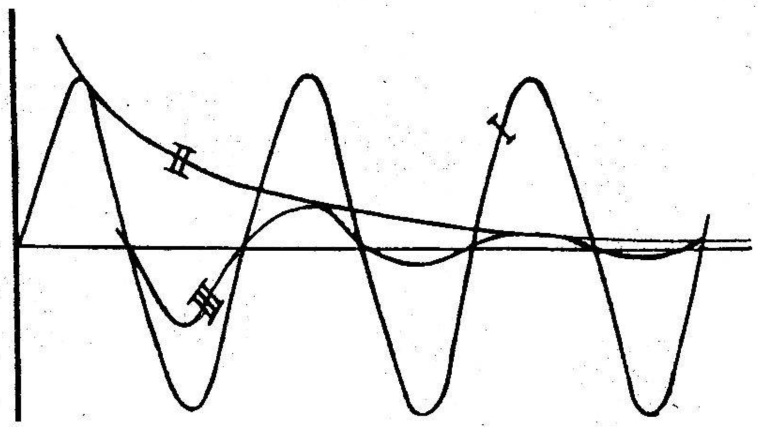
$$+ C . e^{-\frac{R_0 L_2 - R_2 L_1}{M_2 - L_1 L_2} t} \times$$

$$\times \sin \left\{ \frac{4 R_0 R_2 M^2 - (R_0 L_2 + R_2 L_1)^2}{2 (M^2 - L_1 L_2)} t + \beta \right\} \qquad (23)$$

Cette expression montre d'abord que le courant dans le circuit téléphonique est tel que s'il y avait deux courants indépendants. Le premier s'écoule à la manière d'une ondulation harmonique, soit de la même manière que la variation de résistance du contact au microphone, ou que les vibrations de la plaque du microphone; l'amplitude et la phase de ce premier courant sont indépendantes du temps t.

Le second des courants composants est de forme plus complexe. La constante C est également multipliée par un sinus du temps t, et la phase est changée, ne s'accordant ni avec celle de la vibration génératrice, ni avec celle de la première ondulation; mais il y a encore un facteur logarithmique qui est fonction du temps t. Ce second courant n'est pas de forme harmonique. On peut cependant l'envisager comme étant une onde de forme sinusoïdale, dont l'amplitude change d'une manière continue comme le veut la fonction exponentielle. Ce serait une onde dont les amplitudes ne conservent pas la même valeur, la même hauteur, mais elles augmentent (ou elles diminuent) continuellement d'une façon particulière: les extrémités des amplitudes successives d'une même phase se trouvent sur une courbe logarithmique.

Dans la figure, la courbe I représente la sinusoïde de (15), le facteur exponentiel n'existant pas; la courbe II représente la courbe logarithmique seule; enfin la courbe III représente la sinusoïde modifiée par la logarithmique. Les valeurs relatives pour ces courbes ont été choisies arbitrairement; elles dépendent complètement des constantes du problème R, L, M, ω.



Les deux ondes électriques diffèrent encore par leur longueur d'onde, celle-ci étant déterminée par le facteur de t dans le sinus.

La question gagne en clarté, quand on considère un cas particulier très fréquemment réalisé dans les installations téléphoniques. Posons

$r_0 = 0{,}5$ ohm, $L_1 = 0{,}05$ quadrant, $I_0 = 0{,}2$ ampère.
$R_0 = 5$ ohms, $L_2 = 0{,}5$ quadrant, $\omega = 1000$
$R_2 = 1000$ ohms, $M = 0{,}03$ quadrant.

Avec ces valeurs, l'expression (23) donne sensiblement

$$I_2 = \frac{1}{16\,000} \sin\left\{1000\,t + \alpha\right\} + C.e^{-20\,000\,t} . \sin\left\{57\,000\,t + \beta\right\}$$

L'onde sinusoïdale est donc environ 57 fois plus longue que celle de la seconde ondulation; le son correspondant à un nombre de vibrations 57 fois plus petit. Le son correspondant à la vibration non harmonique sera plus aigu d'environ six octaves que le son correspondant à la vibration harmonique du premier terme; mais un pareil son est au-delà de la limite supérieure des sons perceptibles par l'oreille.

En outre, l'exposant du facteur logarithmique est de signe négatif et multiplié par le temps t; il en résulte donc que sa valeur va en diminuant, que l'amplitude de la vibration non harmonique et que l'intensité de ce son très aigu décroît avec le temps croissant. Cette décroissance est très rapide et sa valeur initiale très petite, parce que le facteur de t est très grand. Les proportions, dans la seconde figure, ne correspondent évidemment pas à la réalité de ce cas; mais la courbe II devrait se rapprocher très rapidement de l'axe horizontal, et l'onde sinusoïdale principale (non dessinée) devrait avoir une longueur 57 fois plus grande que l'onde de la courbe III. L'effet du terme non harmonique n'est perceptible qu'au tout premier commencement de l'onde harmonique.

On reconnaît que l'influence du second terme, de l'onde non harmonique, est négligeable, et que l'intensité du courant dans le téléphone est donnée par

$$I_2 = \frac{\omega r_0 I_0 M}{\sqrt{\omega^2 [R_0 L_2 - R_2 L_1]^2 + [R_0 R_2 - \omega^2 (M^2 - L_1 L_2)]^2}} \times$$
$$\times \sin \left\{ \omega t + \operatorname{arc} tg \frac{\omega (R_2 L_1 - R_0 L_2)}{R_0 R_2 - \omega^2 (M^2 - L_1 L_2)} \right\}.$$