

Zeitschrift:	Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
Herausgeber:	Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
Band:	27 (1898-1899)
Artikel:	Démonstration élémentaire d'un principe de la méthode des moindres carrés
Autor:	Le Grand Roy, E.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-88422

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Séance du 1^{er} décembre 1898

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

d'un principe de la méthode des moindres carrés

PAR E. LE GRAND ROY, PROF.

On sait que, pour tirer de m équations linéaires à i inconnues, dans le cas de $m > i$, les valeurs les plus probables de ces inconnues, on emploie la méthode dite « des moindres carrés », dont il est nécessaire de rappeler brièvement le principe.

Soient $\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz \dots = n \\ a'x + b'y + c'z \dots = n' \\ a''x + b''y + c''z \dots = n'' \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array} \right\}$ (1)

les m équations à résoudre dans lesquelles $n, n', n'' \dots$ sont des nombres obtenus par observation. On les remplace par i équations nouvelles, qui s'obtiennent en multipliant chaque équation par le coefficient d'une même inconnue pris dans cette équation, et additionnant les résultats obtenus. La première s'obtiendra donc en multipliant chaque équation par le coefficient de x qu'elle renferme; la seconde, en multipliant chaque équation par le coefficient de y , et ainsi de suite. Si donc on pose, pour abréger :

$$(2) \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots = (aa) & ba + b'a' + b''a'' + \dots = (ba) = (ab) \\ ab + a'b' + a''b'' + \dots = (ab) & b^2 + b'^2 + b''^2 + \dots = (bb) \\ ac + a'c' + a''c'' + \dots = (ac) & bc + b'c' + b''c'' + \dots = (bc) \\ \vdots & \vdots \\ an + a'n' + a''n'' + \dots = (an) & bn + b'n' + b''n'' + \dots = (bn) \end{cases}$$

et ainsi de suite, on obtient comme équations finales, en nombre égal à celui des inconnues :

Les valeurs tirées de ces équations ne vérifient pas rigoureusement les équations (1) : tandis qu'on devrait avoir, si les valeurs observées et les valeurs des inconnues étaient rigoureusement exactes :

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz \dots - n = 0 \\ a'x + b'y + c'z \dots - n' = 0 \\ a''x + b''y + c''z \dots - n'' = 0 \end{array} \right.$$

la substitution dans les équations (1), ainsi modifiées, des valeurs des inconnues tirées des équations (3) donne :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz \dots - n = E \\ a'x + b'y + c'z \dots - n' = E' \\ a''x + b''y + c''z \dots - n'' = E'' \end{array} \right.$$

les *résidus* E, E', E''... étant d'autant plus petits que les observations sont plus exactes. On prend pour mesure de leur exactitude leur *erreur moyenne*, qui se calcule par la formule

$$E_1 = \pm \sqrt{\frac{E^2 + E'^2 + E''^2 + \dots}{m-i}}$$

ou, en posant

$$E^2 + E'^2 + E''^2 + \dots = (EE) \quad (5) \quad E_1 = \pm \sqrt{\frac{(EE)}{m-i}}$$

Pour le calcul de l'erreur moyenne de chaque inconnue, on applique la règle suivante : dans les équations (3), on accentue les lettres $x, y, z \dots$, et on remplace les seconds membres par 1 dans l'une des équations, par 0 dans toutes les autres. On obtient ainsi les systèmes d'équations :

$$(6) \begin{cases} (aa)x' + (ab)y' + (ac)z' \dots = 1 \\ (ba)x' + (bb)y' + (bc)z' \dots = 0 \\ (ca)x' + (cb)y' + (cc)z' \dots = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(6 \text{ bis}) \begin{cases} (aa)x' + (ab)y' + (ac)z' \dots = 0 \\ (ba)x' + (bb)y' + (bc)z' \dots = 1 \\ (ca)x' + (cb)y' + (cc)z' \dots = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(6 \text{ ter}) \begin{cases} (aa)x' + (ab)y' + (ac)z' \dots = 0 \\ (ba)x' + (bb)y' + (bc)z' \dots = 0 \\ (ca)x' + (cb)y' + (cc)z' \dots = 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

en nombre égal à celui des inconnues.

Si alors on tire de (6) la valeur de x' , de (6 bis) celle de y' , de (6 ter) celle de $z' \dots$, et qu'on appelle $E_x, E_y, E_z \dots$ les erreurs moyennes des inconnues, on les obtient par les formules

$$(7) \quad E_x = \pm E_1 \sqrt{x'} \quad E_y = \pm E_1 \sqrt{y'} \quad E_z = \pm E_1 \sqrt{z'}$$

C'est de ces formules que nous avons cherché une démonstration nouvelle, celles que donnent les différents ouvrages qui traitent de cette question nous ayant paru manquer, soit de clarté, soit de généralité.

Résolvons par rapport à x les équations (3), où nous introduisons une 4^{me} inconnue u . On a ainsi les équations

$$(3 \text{ bis}) \begin{cases} (aa)x + (ab)y + (ac)z + (ad)u \dots = (an) \\ (ba)x + (bb)y + (bc)z + (bd)u \dots = (bn) \\ (ca)x + (cb)y + (cc)z + (cd)u \dots = (cn) \\ (da)x + (db)y + (dc)z + (dd)u \dots = (dn) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(8) \quad x = \frac{\begin{vmatrix} (an) & (ab) & (ac) & (ab). \\ (bn) & (bb) & (bc) & (bd). \\ (cn) & (cb) & (cc) & (cb). \\ (dn) & (db) & (dc) & (dd). \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (an) & (ab) & (ac) & (ad). \\ (bn) & (bb) & (bc) & (bd). \\ (cn) & (cb) & (cc) & (cd). \\ (dn) & (db) & (dc) & (dd). \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} = \frac{D}{D}$$

D désignant le déterminant du système (3 bis).

Désignons par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots$ les déterminants mineurs relatifs aux termes de la 1^{re} colonne. On a alors, en développant :

$$Dx = (an)\Delta_1 - (bn)\Delta_2 + (cn)\Delta_3 - (dn)\Delta_4 + \dots$$

ou, en vertu des formules (2) :

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= (an + a'n' + a''n'' + \dots) \Delta_1 - (bn + b'n' + b''n'' \dots) \Delta_2 \\ &+ \dots = (a\Delta_1 - b\Delta_2 + c\Delta_3 - d\Delta_4 \dots) n + (a'\Delta_1 - b'\Delta_2 + c'\Delta_3 \dots) n' \\ &+ (a''\Delta_1 - b''\Delta_2 + c''\Delta_3 \dots) n'' + \dots \end{aligned}$$

Différentions les deux membres et remplaçons les différentielles de $x, n, n' \dots$ par les erreurs $E_x, E, E' \dots$
On obtient :

$$\begin{aligned} DE_x &= (a\Delta_1 - b\Delta_2 + c\Delta_3 - d\Delta_4 \dots) E + (a'\Delta_1 - b'\Delta_2 + c'\Delta_3 \\ &- d'\Delta_4 \dots) E' + (a''\Delta_1 - b''\Delta_2 + c''\Delta_3 - d''\Delta_4 \dots) E'' + \dots \end{aligned}$$

Elevons les deux membres au carré, et remarquons que, les erreurs accidentnelles étant indifféremment positives ou négatives, à chaque double produit tel que $E E'$ en correspondra un autre égal et de signe contraire. On peut donc négliger les termes qui renferment ces doubles produits, qui se détruisent sensiblement 2 à 2, et on obtient :

$$\begin{aligned} D^2 E_x^2 &= (a\Delta_1 - b\Delta_2 + c\Delta_3 - d\Delta_4 \dots)^2 E^2 + (a'\Delta_1 - b'\Delta_2 \\ &+ c'\Delta_3 - d'\Delta_4 \dots)^2 E'^2 + (a''\Delta_1 - b''\Delta_2 + c''\Delta_3 - d''\Delta_4 \dots)^2 E''^2 + \dots \end{aligned}$$

Remplaçons chacune des erreurs $E, E', E'' \dots$ par l'erreur moyenne E_1 . On a alors :

$$\begin{aligned} D^2 E_x^2 &= E_1^2 [(a\Delta_1 - b\Delta_2 + c\Delta_3 \dots)^2 + (a'\Delta_1 - b'\Delta_2 + c'\Delta_3 \dots)^2 \\ &+ (a''\Delta_1 - b''\Delta_2 + c''\Delta_3 \dots)^2 + \dots] \end{aligned}$$

ou, en développant :

$$\begin{aligned} D^2 E_x^2 &= E_1^2 [(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots) \Delta_1^2 - 2(ab + a'b' + a''b'' + \dots) \Delta_1 \Delta_2 \\ &+ b^2 + b'^2 + b''^2 \dots) \Delta_2^2 + 2(ac + a'c' + a''c'' \dots) \Delta_1 \Delta_3 - 2(bc \\ &+ b'c' + b''c'' \dots) \Delta_2 \Delta_3 + (c^2 + c'^2 + c''^2 + \dots) \Delta_3^2 - 2(ad + \\ &a'd' + a''d'' \dots) \Delta_1 \Delta_4 + 2(bd + b'd' + b''d'' \dots) \Delta_2 \Delta_4 - 2(cd + c'd' \\ &+ c''d'' \dots) \Delta_3 \Delta_4 + (d^2 + d'^2 + d''^2 \dots) \Delta_4^2 \dots] \end{aligned}$$

ou, en introduisant les notations abrégées des formules (2),

$$D^2 E_x^2 = E_1^2 [(aa)\Delta_1^2 - 2(ab)\Delta_1\Delta_2 + (bb)\Delta_2^2 + 2(ac)\Delta_1\Delta_3 - 2(bc)\Delta_2\Delta_3 + (cc)\Delta_3^2 - 2(ad)\Delta_1\Delta_4 + 2(bd)\Delta_2\Delta_4 - 2(cd)\Delta_3\Delta_4 + (dd)\Delta_4^2 + \dots]$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$\begin{aligned} D^2 E_x^2 = E_1^2 & [(aa)\Delta_1^2 - (ab)\Delta_1\Delta_2 - (ab)\Delta_1\Delta_2 + (bb)\Delta_2^2 + (ac)\Delta_1\Delta_3 \\ & + (ac)\Delta_1\Delta_3 - (bc)\Delta_2\Delta_3 - (bc)\Delta_2\Delta_3 + (cc)\Delta_3^2 - (ad)\Delta_1\Delta_4 \\ & - (ad)\Delta_1\Delta_4 + (bd)\Delta_2\Delta_4 + (bd)\Delta_2\Delta_4 - (cd)\Delta_3\Delta_4 - (cd)\Delta_3\Delta_4 \\ & + (dd)\Delta_4^2 \dots] \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} D^2 E_x^2 = E_1^2 & \left\{ [(aa)\Delta_1 - (ab)\Delta_2 + (ac)\Delta_3 - (ad)\Delta_4 + \dots] \Delta_1 - \right. \\ & [(ab)\Delta_1 - (bb)\Delta_2 + (bc)\Delta_3 - (bd)\Delta_4 + \dots] \Delta_2 + [(ac)\Delta_1 - \right. \\ & (bc)\Delta_2 + (cc)\Delta_3 - (cd)\Delta_4 \dots] \Delta_3 - [(ad)\Delta_1 - (bd)\Delta_2 + (cd)\Delta_3 \right. \\ & \left. - (dd)\Delta_4 \dots] \Delta_4 + \dots \right\} \end{aligned}$$

En se reportant à la formule (8), on voit que

$$D = \begin{vmatrix} (aa)(ab)(ac)(ad) \\ (ba)(bb)(bc)(bd) \\ (ca)(cb)(cc)(cd) \\ (da)(db)(dc)(dd) \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{vmatrix} = (aa)\Delta_1 - (ba)\Delta_2 + (ca)\Delta_3 - (da)\Delta_4 \dots$$

Dans le second membre de l'équation précédente, le coefficient de Δ_1 est donc égal à D. Ceux des quantités $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 \dots$ sont les sommes algébriques des produits des termes d'une des colonnes de D par les déterminants mineurs relatifs aux termes d'une autre

colonne, et la théorie des déterminants montre que ces sommes sont nulles.

Cette équation se réduit donc à

$$D^2 E_x^2 = E_1^2 \cdot D \Delta_4$$

d'où

$$E_x = \pm E_1 \sqrt{\frac{\Delta_4}{D}} \quad (9)$$

Reprendons maintenant la formule (8), et développons le numérateur suivant les termes de la première colonne.

On obtient :

$$x = \frac{(an)\Delta_4 - (bn)\Delta_2 + (cn)\Delta_3 - (dn)\Delta_4 + \dots}{D}$$

(an) , (bn) , (cn) ... étant les 2^{ds} membres des équations (3 bis). Mais, d'après les formules (7), on doit avoir :

$$E_x = \pm E_1 \sqrt{x'}$$

x' étant tiré du système

$$(10) \quad \begin{cases} (aa)x' + (ab)y' + (ac)z' + (ad)w' \dots = 1 \\ (ba)x' + (bb)y' + (bc)z' + (bd)u' \dots = 0 \\ (ca)x' + (cb)y' + (cc)z' + (cd)w' \dots = 0 \\ (da)x' + (db)y' + (dc)z' + (dd)u' \dots = 0 \end{cases}$$

Il faut donc, si la règle est juste, que $x' = \frac{\Delta_4}{D}$.

Pour le vérifier, remarquons que ces équations ne diffèrent des équations (3 bis) que par leurs 2^{ds} membres.

Si donc nous reprenons la formule

$$x = \frac{(an)\Delta_1 - (bn)\Delta_2 + (cn)\Delta_3 - (dn)\Delta_4 + \dots}{D}$$

il suffit, pour qu'elle donne la valeur de x' , d'y remplacer (an) , (bn) , $(cn) \dots$, qui sont les 2^{ds} membres des équations (3 bis), par $1, 0, 0 \dots$ qui sont les 2^{ds} membres des équations (10), et on obtient alors

$$x' = \frac{\Delta_1}{D}$$

On peut donc, dans la formule (9), remplacer $\frac{\Delta_1}{D}$ par x' , ce qui donne $E_x = \pm E_1 \sqrt{x'}$, c'est-à-dire précisément la 1^{re} des formules (7). Les autres se justifieraient de la même manière.

