Zeitschrift: Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel

Herausgeber: Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel

Band: 17 (1888-1889)

Artikel: Courbes et équations de mortalité

Autor: Isely, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88270

COURBES ET ÉQUATIONS DE MORTALITÉ

PAR M. L. ISELY, PROFESSEUR.

Parmi les applications intéressantes de la méthode des coordonnées cartésiennes, il convient de mentionner d'une manière toute spéciale celle qui concerne la représentation graphique des lois de la mortalité. La question étant généralement peu connue, nous avons jugé à propos de réunir dans cette communication un certain nombre de résultats acquis aujourd'hui par les mathématiques.

Les Tables de mortalité, comme on le sait, font connaître le nombre de survivants à un âge déterminé, sur un nombre donné d'individus nés le même jour. Les plus usitées chez nous sont celles de Deparcieux, de Duvillard et des vingt Compagnies anglaises. Ces tables peuvent se représenter par des courbes qui en rendent les résultats plus sensibles à l'œil. Ce sont les *courbes de mortalité.*

Pour les construire, on prend pour abscisses les âges et pour ordonnées les nombres correspondants de vivants. Leur équation générale est :

$$y = f\,(x),$$

le nombre y des survivants étant une fonction de l'âge x. Ces courbes ont sensiblement la même forme et ressemblent plus ou moins au quart de la développée de l'ellipse. La sous-tangente, c'est-à-dire la portion de l'axe des abscisses comprise entre le pied de l'ordonnée et le point où la tangente coupe cet axe, représente l'inverse du taux de mortalité à l'âge correspondant.

Les courbes des taux de mortalité se tracent de la même manière; les abscisses sont alors les âges et les ordonnées les taux de mortalité. Ces courbes descendent rapidement jusqu'à dix ans, puis légèrement jusqu'à treize, et montent ensuite progressivement jusqu'à la fin de la vie; la progression devient rapide à partir de soixante ans.

Les courbes de mortalité une fois construites d'après les données de l'expérience, il était naturel de chercher à déterminer leur équation, comme on le fait pour les autres lignes en géométrie analytique. Cette équation, dite de mortalité, ne peut être qu'approximative, puisque la courbe dont elle représente les variations n'est pas rigoureusement mathématique.

Lambert, au siècle dernier, avait proposé la forme suivante :

$$y = \mathrm{A}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 + m\left(e^{-\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

A, a, m, h et k désignant des quantités constantes. Mais cette formule représente assez peu fidèlement les lois de la mortalité.

Voici la marche que l'on suit de nos jours pour résoudre le problème. Soit

$$y = f(x)$$

le nombre des vivants à l'âge x. La probabilité qu'une personne de cet âge a d'atteindre l'âge $x + dx$ est donnée par le rapport

$$\frac{f(x + dx)}{f(x)}$$

Donc la probabilité qu'elle ne l'atteindra pas est :

$$1 - \frac{f(x + dx)}{f(x)}$$

Cette expression peut aussi s'écrire :

$$\frac{f(x) - f(x + dx)}{f(x)} \text{ ou } - \frac{f(x + dx) - f(x)}{f(x)}$$

Il résulte de là que le taux de mortalité à l'âge x est :

$$- \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ ou } - \frac{dy}{y\,dx}$$

La sous-tangente en un point de la courbe $y = f(x)$ a la valeur inverse $-\frac{y\,dx}{dy}$, comme nous l'avons déjà dit précédemment.

La courbe, qui indique la marche du taux de la mortalité, possède donc une équation de la forme :

$$F(x) = - \frac{dy}{y\,dx}$$

On peut faire au sujet de $F(x)$ diverses hypothèses. Si cette quantité était constante, on aurait l'équation différentielle :

$$- \frac{dy}{y\,dx} = a$$

qui deviendrait, en séparant les variables :

$$\frac{dy}{y} = - a\,dx$$

d'où, en intégrant :

$$Ly = - ax + C$$

L'équation cherchée serait donc :

$$y = \frac{1}{e^{ax - C}}$$

ou plus simplement :

$$y = \frac{m}{n^x}$$

où m et n sont deux constantes à déterminer.

On pourrait, en second lieu, supposer le taux proportionnel à l'âge. Il viendrait alors :

$$-\frac{dy}{y\,dx} = bx$$

ou

$$\frac{dy}{y} = -bx dx$$

Une simple intégration conduit enfin à l'égalité :

$$y = \frac{1}{e^{\frac{bx^2}{2} - C}}$$

ou plus simplement :

$$y = \frac{h}{k^{x^2}}$$

h et k étant comme auparavant deux constantes à déterminer.

Les deux expressions précédentes fournissent des résultats qui ne concordent que grossièrement avec les données de l'expérience. Aussi leur préfère-t-on dans la pratique une formule due à Gompertz, et qui, même dans des limites assez écartées, paraît s'approcher de la vérité. On en trouve la démonstration dans les *Philosophical Transactions* de 1825, et dans le tome IX du *Journal des Actuaires anglais* (année 1861).

Gompertz suppose que le taux de mortalité augmente d'un âge à un autre en progression géométrique ; ce qui revient à dire que s'il est égal à t pour un certain âge, il vaudra tr une année plus tard, r étant la raison de la progression. Il sera donc égal à tr^x après x années écoulées.

L'équation différentielle est dans ce cas :

$$-\frac{dy}{y\,dx}=tr^x$$

ou, si l'on sépare les variables :

$$\frac{dy}{y}=-tr^x\,dx$$

Il vient, en intégrant :

$$y=e^{C}\,.\,e^{-\frac{tr^x}{\mathrm{L}r}}$$

ou plus simplement

$$y=p\,.\,q^{r^x}$$

où p, q et r sont trois constantes à déterminer.

Telle est la *formule de Gompertz*. Elle reproduit assez fidèlement le phénomène de la mortalité et fournit parfois des résultats remarquables par leur concordance avec les données de l'observation.

M. E. Dormoy, dans son excellente *Théorie mathématique des Assurances sur la vie* [1], en cite l'exemple suivant :

En prenant pour âges déterminants : 15 ans, 30 ans et 45 ans, âges qui embrassent une grande partie de l'existence adulte, on trouve :

[1] 2 vol. grand in-8, Paris 1878, chez Gauthier-Villars.

$$\log r^{15} = 0{,}2051363,$$

en utilisant la Table ajustée des vingt Compagnies anglaises.

En prenant pour déterminants trois autres âges, 22, 37 et 52 ans, on trouve :

$$\log r^{15} = 0{,}2125132$$

D'où la moyenne, $\log r^{15} = 0{,}2088247$

On en déduit : $\log r = 0{,}0139216$

et $r = 1{,}03257$

Les deux autres constantes deviennent alors :

$$p = 113444$$
$$q = 0{,}91479$$

La formule de Gompertz, adaptée à cette table, prend donc la forme suivante :

$$y = 113444 \times 0{,}91479^{1{,}03257^{x}}$$

En y faisant $x = 40$, par exemple, on trouve :

$$y = 82291$$

Le nombre inscrit dans la table des vingt Compagnies anglaises, après l'ajustement, est 82284. La différence (7 vivants) est donc insignifiante.

M. J. Bertrand, membre de l'Académie française et secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, ayant donné à l'équation de Gompertz la forme :

$$\varphi(x) = g e^{he^{kx}}$$

a aussi déterminé les constantes g, h, k par la condition d'accorder autant que possible ces quantités avec les meilleures Tables connues[1].

Il est arrivé aux résultats suivants :

$$\varphi(30) = 890, \quad \varphi(60) = 584, \quad \varphi(90) = 16$$
$$\log k = 8{,}8542146,$$
$$\log h = 7{,}8159811,$$
$$\log g = 2{,}9736634.$$

D'après cela, M. Bertrand a pu dresser un tableau comparatif, que nous reproduisons ci-dessous :

Ages	NOMBRE DES VIVANTS			
	Calcul	Cies anglaises	Duvillard	Deparcieux
30 ans	890	890	890	890
35 »	869	854	821	842
40 »	840	813	750	797
45 »	799	769	679	754
50 »	745	718	603	704
55 »	674	657	522	638
60 »	584	584	434	561
65 »	476	491	338	479
70 »	355	382	239	376
75 »	233	259	146	256
80 »	125	142	70	143
85 »	54	59	19	58
90 »	16	16	8	12

Comme on le voit, les écarts entre les résultats fournis par le calcul, par les tables des vingt Compa-

[1] *Calcul des Probabilités,* chez Gauthier-Villars, Paris 1889.

gnies anglaises et celles de Deparcieux sont peu considérables.

M. Makeham a proposé une formule plus générale que celle de Gompertz. Pour l'établir, il ajoute une constante à la quantité tr^x, par laquelle ce dernier représentait la marche du taux de mortalité. Soit a cette constante. L'équation différentielle devient :

$$-\frac{dy}{y\,dx} = a + tr^x$$

ou, après la séparation des variables :

$$\frac{dy}{y} = -a\,dx - tr^x\,dx$$

On trouve alors par intégration :

$$\mathrm{L}y = -ax - \frac{tr^x}{\mathrm{L}r} + \mathrm{C}$$

d'où,

$$y = e^{\mathrm{C} - ax - \frac{tr^x}{\mathrm{L}r}}$$

ou plus simplement,

$$y = \frac{m}{n^x}\,p^{r^x}$$

m, n, p et r étant quatre constantes à déterminer.

M. Bertrand écrit :

$$\varphi(x) = e^{he^{kx}} + \mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2$$

h, k, C_1 et C_2 sont des constantes. En supposant C_1 et C_2 égaux à zéro, on retrouve la formule de Gompertz.

L'équation de mortalité de Makeham représente assez fidèlement la loi de la mortalité humaine jusqu'à 70 ans environ.

M. Woolhouse, dans le tome XV du *Journal des Actuaires anglais*, a trouvé pour les quatre constantes m, n, p et r les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} m &= 109949 \\ n &= 1{,}006615 \\ p &= 0{,}999052 \\ r &= 1{,}09648 \end{aligned}$$

La formule de Makeham, adaptée à la Table ajustée des vingt Compagnies anglaises, serait donc :

$$y = \frac{109949}{1{,}006615^x}\, 0{,}999052^{\,1{,}09348^x}$$

Dans les problèmes relatifs aux assurances sur la vie, on fait un usage fréquent des formules de Gompertz et de Makeham. On s'en sert en particulier pour calculer approximativement les annuités sur deux têtes.

On est, en effet, ramené à la formule de Gompertz quand on cherche la loi de mortalité d'après laquelle les annuités viagères sur deux têtes d'âges quelconques peuvent se remplacer par des annuités sur une seule tête, d'un âge convenablement déterminé. C'est ce qu'ont démontré, par des procédés différents, MM. Morgan et Laurent, le premier dans le *Journal des Actuaires anglais*, le second dans son intéressant *Traité du Calcul des probabilités* (pages 196-199).

On parvient, de même, à la formule de Makeham, en cherchant à substituer aux annuités sur deux têtes d'âges quelconques d'autres annuités sur deux têtes ayant le même âge, cet âge étant convenablement choisi.

Une inspection attentive de la courbe des taux de mortalité montre toutefois que l'hypothèse de Gompertz est trop absolue. Nous avons déjà constaté, en commençant, que cette ligne se compose de trois parties distinctes. La première appartient à l'enfance, la deuxième à l'âge mûr et la troisième, qui a sensiblement la forme d'un arc de parabole, à la vieillesse. A ces trois périodes de l'existence humaine doivent naturellement correspondre trois valeurs différentes de la raison de la progression géométrique. En prenant pour base la Table de Deparcieux (1000 vivants à 3 ans), nous avons trouvé que ces valeurs sont respectivement de 0,8 entre 3 et 10 ans, de 1,025 entre 10 et 50 ans et enfin de 1,081 entre 50 et 90 ans. D'après M. Edmonds, ces valeurs, adaptées à la mortalité générale de la population anglaise, seraient égales à 0,676; 1,0297; 1,07969, pour les périodes qui s'étendent de 0 à 9 ans, de 9 à 55 ans et de 55 ans à la fin de la vie (*Journal des Actuaires anglais*, t. IX).

Tel est, en résumé, ce que l'on sait des courbes et des équations de mortalité. Comme on le voit, les mathématiques, en cherchant à exprimer par des formules et à représenter par des constructions graphiques les données de l'expérience, sont arrivées à des résultats remarquables dont l'utilité dans les questions d'assurances et de statistique n'échappera à personne. Nous regrettons, en terminant, de n'avoir pu rendre compte de deux travaux très intéressants et très consciencieusement rédigés de M. le D[r] G. Schærtlin, et publiés sous le titre de : *Die Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung für die Jahre 1876/77-1880/81*. Ces travaux nous sont parvenus trop tard. Nous espérons, du reste, y revenir dans une prochaine communication.