Zeitschrift: Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel

Herausgeber: Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel

Band: 16 (1886-1888)

Artikel: Chemins de fer funiculaires : recherches sur la tension, le flottement et la compensation du poids des câbles

Autor: Ladame, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88247

CHEMINS DE FER FUNICULAIRES

Recherches sur la tension, le flottement et la compensation du poids des câbles

PAR H. LADAME, INGÉNIEUR

I

Considérations générales. Courbe des tensions.

La courbe théorique que forme une corde suspendue librement par ses extrémités est une chaînette qui a pour équation :

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right)$$

Mais les câbles ne possèdent pas une flexibilité parfaite, en sorte que cette équation ne représente pas rigoureusement la courbe qu'ils décrivent. Cette considération suffit à elle seule pour justifier l'emploi d'une formule plus simple, que l'on obtient en ne tenant compte que d'un certain nombre des termes de la série :

$$e^{\frac{x}{b}} = 1 + \frac{x}{b} + \frac{x^2}{2\,b^2} + \cdots\cdot\cdot$$

En développant cette série jusqu'au troisième terme, ce qui donne une approximation suffisante, ainsi que nous le verrons plus loin, on arrive à une expression de la forme :

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2c}$$

équation d'une parabole rapportée à son sommet, et dont le paramètre est $2c$.

Si l'on prend pour origine le point A dont les coordonnées sont a et h (fig. 1) :

$$x_1 = a - x \qquad y_1 = h - y \qquad c = \frac{a^2}{2h}$$

et l'on a pour équation générale de la courbe cherchée :

$$y = \frac{2h}{a} x - \frac{h}{a^2} x^2$$

Soit T l'effort de traction qu'un câble librement suspendu exerce sur ses points d'attache supposés de niveau;

H et V les composantes horizontale et verticale de cette force;

α l'angle qu'elle fait avec l'horizon;

p le poids du câble par mètre courant;

$2L$ la longueur de ce câble;

a et h les coordonnées du point S, sommet de la parabole qu'il décrit.

Le poids du câble étant $2pL$ et la longueur de l'arc AS,

$$L = a + \frac{2}{3}\frac{h^2}{a}$$

$$V = T \sin\alpha = pL = p\left(a + \frac{2}{3}\frac{h^2}{a}\right) \qquad (1)$$

et
$$H = T\cos\alpha = \frac{a}{2h} V \qquad (2)$$

d'où
$$\frac{T}{p} = \left(\frac{a}{2h} + \frac{h}{3a}\right)\sqrt{4h^2 + a^2}$$

pour un point C quelconque, H étant constant

$$V' = \frac{a}{h}\frac{h'}{a'} V \qquad \text{et} \qquad T' = V\frac{a}{h}\sqrt{\left(\frac{h'}{a'}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

mais
$$\frac{h'}{a'} = \frac{h}{a^2}(a - x')$$

d'où
$$T' = V\frac{a}{h}\sqrt{\frac{h^2}{a^4}(a - x')^2 + \frac{1}{4}}$$

pour $x' = a$

$$T_0 = H = p\left(\frac{a^2}{2h} + \frac{h}{3}\right) \qquad (3)$$

$T' - H$ varie donc de o à $T - H$. Cette force est la composante suivant la tangente à un point donné, du poids de la partie du câble comprise entre le sommet de la courbe (S) et le point considéré.

$q'\,q''\,q'''$ étant les composantes du poids des différents éléments ds d'une courbe quelconque, suivant leur inclinaison $\varepsilon'\,\varepsilon''\,\varepsilon'''$:

$$\begin{aligned} q' &= p\,ds \sin\varepsilon' \\ q'' &= p\,ds \sin\varepsilon'' \\ q''' &= p\,ds \sin\varepsilon''' \\ &\ddots \end{aligned}$$

—— ——

$$T - H = \Sigma(q) = p\int \sin\varepsilon\, ds$$

or $\quad tg\,\varepsilon = \dfrac{dy}{dx}$ d'où $\quad \sin\varepsilon = \dfrac{dy}{dx\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}$

ayant $\quad ds = \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$$T - H = p\int_0^h dy = ph$$

et $\quad H = T - ph$

on a également

$$T' - H = ph' \quad \text{ou} \quad T' = T - p(h - h')$$

mais $\quad h - h' = y'$

d'où $\quad T' = T - py' \qquad (4)$

L'effort de traction en un point quelconque est donc égal à l'effort maximum T, moins le poids du câble par mètre courant, multiplié par l'ordonnée du point considéré.

Cette formule étant indépendante de la forme de la courbe s'applique également à une droite, ou à n'importe quel profil admis pour un plan incliné.

Soit de plus t la tension maximale par millimètre carré de section métallique;

q la section totale des fils qui composent le câble;

$\gamma = 0.0000078$ le poids du millimètre cube des fils de fer ou d'acier;

0,00000056 constante, tenant compte de l'écrouissage des fils par suite de leur torsion, et du poids du chanvre qui forme l'âme, pour câbles de 32 à 33^{mm} de diamètre.

La longueur des fils étant de $^9/_8$ environ de celle du câble

$$p = {}^9/_8\, 1000\,(\gamma + 0{,}00000056)\, q$$

ou
$$p = 0{,}0094\, q$$

mais
$$\mathrm{T} = t q$$

divisant ces équations l'une par l'autre

$$\frac{\mathrm{T}}{p} = \frac{t}{0{,}0094} \qquad (5)$$

d'où
$$\left.\begin{aligned} t &= 0{,}0094\,\frac{\mathrm{T}}{p} \\ p &= 0{,}0094\,\frac{\mathrm{T}}{t} \\ q &= \frac{\mathrm{T}}{t} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

on a de même

$$\frac{\mathrm{T}'}{p} = \frac{t'}{0{,}0094} \qquad \text{mais} \qquad \frac{\mathrm{T}'}{p} = \frac{\mathrm{T}}{p} - y'$$

d'où
$$t' = t - 0{,}0094\, y' \qquad (7)$$

La tension en un point quelconque d'un plan incliné est donc égale, quel que soit son profil, à la tension maximale admise pour la traction, moins 0,0094 fois l'ordonnée du point considéré

$$\begin{aligned} &\text{pour} \quad y' = o \quad t' = t \\ &\quad » \quad\;\; y' = h \quad t' = t - 0{,}0094\, h = t_0 \end{aligned}$$

En portant $t' - t_0$ comme ordonnée pour chaque x correspondant, on obtiendrait la courbe des tensions A′B′S′ (fig. 1). Cette courbe est également une parabole dont le paramètre

$$2\,c = \frac{a^2}{0{,}0094\,h}$$

Nous avons vu que $V' = \frac{a}{h}\frac{h'}{a'}V$ et $\frac{h'}{a'} = \frac{h}{a^2}(a - x')$

d'où $$V' = V - \frac{V}{a}x'$$

V et a étant constants, le lieu géométrique des composantes verticales est une ligne droite.

De l'équation 1 on peut déduire le poids, et par suite la longueur d'un arc quelconque de la parabole décrite par le câble à partir du point A.

Ayant $$a' = a - x$$

$$tg\,\alpha' = 2\,\frac{h - y}{a - x}$$

on a $$V - V' = (L - L')\,p$$

et $$L - L' = x + \frac{a\,tg^2\alpha - a'\,tg^2\alpha'}{6}$$

pour la demi-parabole

$$L' = o \qquad x = a \qquad a' = o$$

d'où $$L = \frac{6 + tg^2\alpha}{6}\,a$$

Dans l'étude des funiculaires on peut avoir à rechercher les coordonnées d'un point correspondant à un parcours donné.

Connaissant $D = L - L'$ longueur de l'arc de parabole à partir de l'origine des coordonnées, on a

$$y = h - \frac{a - x}{2}\,tg\,\alpha'$$

Équation dans laquelle

$$tg\,\alpha' = tg\,\alpha - \frac{2h}{a^2}x$$

mais
$$tg^2\alpha' = \frac{6x + a\,tg^2\alpha - 6D}{a - x}$$

d'où

$$x = a - 0{,}90856\left(\frac{a^2}{h}\right)^{\frac{2}{3}}\left\{\sqrt[3]{L - D + \sqrt{0{,}222\ldots\left(\frac{a^2}{h}\right)^2 + (L - D)^2}} + \sqrt[3]{L - D - \sqrt{0{,}222\ldots\left(\frac{a^2}{h}\right)^2 + (L - D)^2}}\right\}$$

pour
$$D = L \qquad x = a$$
$$D = o \qquad x = o$$

II

Flottement des câbles.

Soit d la différence de niveau entre les points donnés;

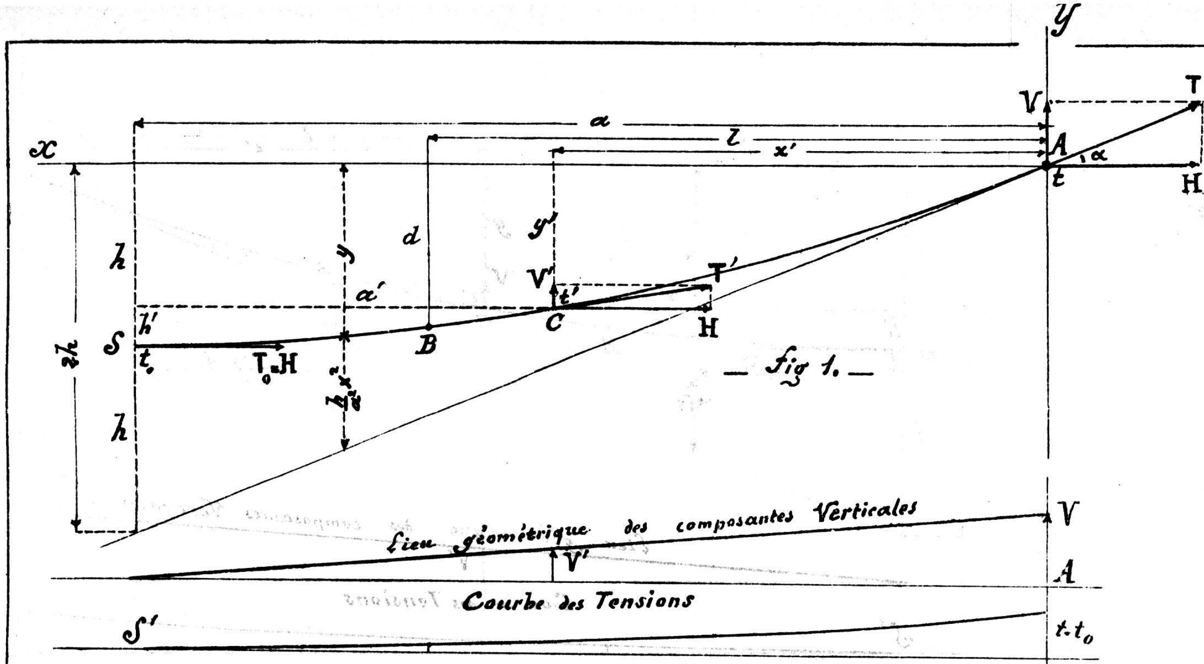
l la distance horizontale de ces points;

t la tension maximale admise par millimètre carré de section métallique du câble pour la traction.

Ayant
$$\frac{T_0}{p} = \frac{t_0}{0{,}0094}$$

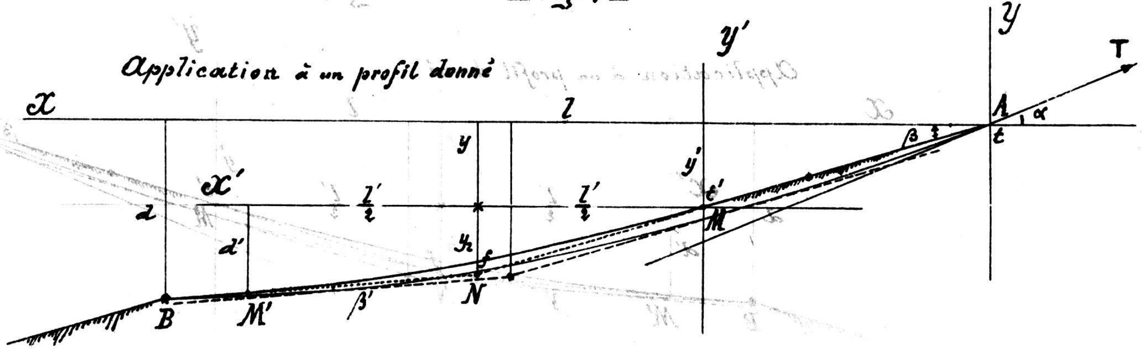
on a de l'équation 3

$$t_0 = \left(0{,}0047 + 0{,}0031325\left(\frac{h}{a}\right)^2\right)\frac{a^2}{h}$$

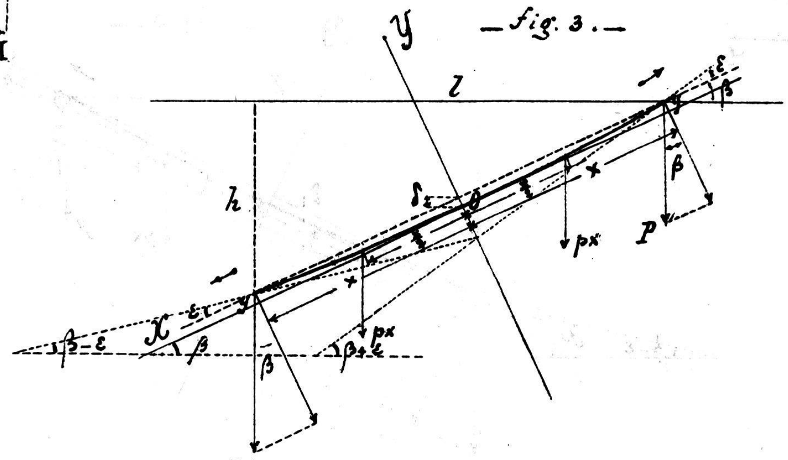


— fig 1. —

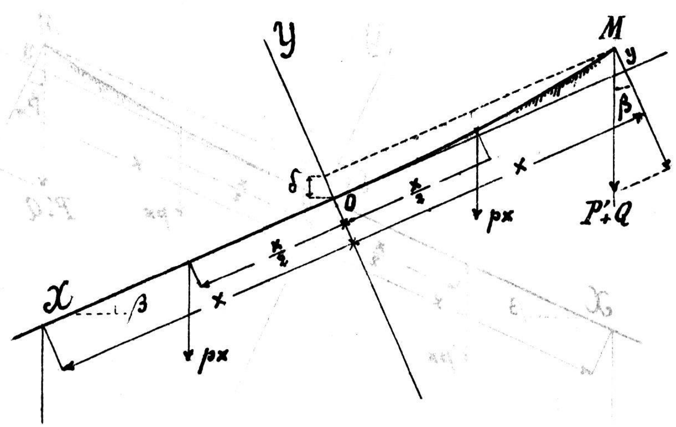
— fig. 2 —



— fig. 3. —



— fig 4 —



LADAME Ing.
Nov: 1887.

Lith: Soirel Neuchâtel.

on a également

$$t_0 = t - 0,0094\left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{a^2}{h}$$

de ces deux équations

$$t = \left(0,0047 + 0,00313\left(\frac{2h}{a}\right)^2\right)\frac{a^2}{h}$$

mais
$$\frac{2h}{a} = tg\,\alpha$$

d'où
$$\frac{h}{a^2} = \frac{0,0047 + 0,00313\,tg^2\,\alpha}{t} \qquad (8)$$

Or, la courbe décrite par un câble suspendu librement par ses deux extrémités supposées de niveau ayant pour équation

$$y = \frac{2h}{a}\,x - \frac{h}{a^2}\,x^2$$

Si cette courbe doit passer par le point B, dont les coordonnées sont $x = l$, $y = d$, on a

$$d = tg\,\alpha\,l - \frac{2h}{a^2}\,l^2$$

d'où
$$\frac{h}{a^2} = \frac{l\,tg\,\alpha - d}{l^2}$$

Remplaçant $\frac{h}{a^2}$ par cette valeur dans l'équation 8, on a

$$tg\,\alpha = \frac{159,617}{l}\left\{t - \sqrt{t^2 - 0,0125\,dt - 0,000059\,l^2}\right\} \quad (9)$$

pour $\qquad d = o \quad l = o \quad tg\,\alpha = \frac{o}{o}$

Les équations 8 et 9 permettent de résoudre le problème qui nous occupe d'une façon rigoureuse et complète.

Connaissant $tg\,\alpha$ et $\frac{h}{a^2}$ on connaît la courbe cherchée:

pour $tg\,\alpha = 0{,}60 \quad \frac{h}{a^2} = \frac{0{,}00583}{t}$

$\text{»} \quad = 0{,}40 \quad \text{»} = \frac{0{,}00520}{t}$

$\text{»} \quad = 0{,}10 \quad \text{»} = \frac{0{,}00473}{t}$

Application. — Soit $l = 300^m$ et $d = 75^m$, on aura

$$tg\,\alpha = 0{,}532\,(t - \sqrt{t^2 - 0{,}9375\,t - 5{,}31})$$

pour $t = 10^k \quad tg\,\alpha = 0{,}4061$
$t = 12 \quad tg\,\alpha = 0{,}379$
$t = 15 \quad tg\,\alpha = 0{,}351$

La tangente diminuant à mesure que t augmente, il suffira dans certains cas de diminuer la tension, c'est-à-dire d'augmenter la section du câble, et par suite son poids, pour prévenir tout flottement.

Soit $t = 10^k$, on aura $\frac{h}{a^2} = 0{,}00052$

et
$$y = 0{,}406\,x - 0{,}00052\,x^2$$

On obtiendra les coordonnées du sommet de la courbe en déterminant le second point où elle rencontre l'axe des x

pour $y = o \quad x = 2a = \frac{0{,}406}{0{,}00052}$ d'où $a = 390^m{,}50$

On pourrait aussi déduire ces coordonnées des relations

$$a = \frac{a^2}{h}\frac{tg\,\alpha}{2} \quad \text{et} \quad h = \frac{a^2}{h}\frac{tg^2\,\alpha}{4} = a\,\frac{tg\,\alpha}{2}$$

d'où $$\frac{a}{h} = \frac{2}{tg\,\alpha} = 4{,}93$$

L'équation de la chaînette donnant $\frac{a'}{h'} = 4{,}98$; pour même distance des appuis, soit $a = a'$, on a donc

$$h - h' = 0{,}01\,h$$

Cette différence, comme on le voit, est très minime, et peut être négligée, d'autant plus que la chaînette, comme nous l'avons fait remarquer, ne représente pas rigoureusement la courbe décrite par le câble.

En admettant que la tension due au ploiement sur la poulie de renvoi soit égale à celle due à la traction, la tension totale

$$\theta = 2\,t = 0{,}0188\,\frac{T}{p}$$

Le câble travaille donc au $^1/_5$ si l'effort de traction maximum est le $^1/_{10}$ de la charge de rupture.

Pour câble ordinaire en acier, et le $^1/_{10}$ de la charge de rupture

$$\frac{T}{p} = 1200, \quad \text{d'où} \quad \theta = 22^{k},56 \quad \text{et} \quad t = 11^{k},28$$

Si maintenant nous supposons un profil donné, comprenant deux pentes consécutives passant par les points A et B (fig. 2), le câble restera sur ses poulies sur tout le parcours qui se trouvera au-dessus de la courbe que nous venons de déterminer; il flottera par contre sur toute la longueur qui serait située en dessous. Il se relèvera de même au passage d'une pente à l'autre, et cela d'une quantité que nous allons calculer.

Soit β l'inclinaison de la rampe supérieure;
β' l'inclinaison de la rampe inférieure;
f la flèche, ou la hauteur à laquelle la courbe passe au-dessus du point d'intersection des pentes;
l' la longueur du relèvement;
d' l'ordonnée du point de tangence inférieure M', par rapport aux axes coordonnés Y' X' de la courbe de raccordement;
d et l les coordonnées du point B, comme précédemment.

L'ordonnée de l'intersection des pentes étant :

$$y = \frac{d - l\, tg\, \beta'}{tg\, \beta - tg\, \beta'}\, tg\, \beta \tag{10}$$

on a comme première approximation pour l'ordonnée du point de tangence le plus élevé M, c'est-à-dire du point à partir duquel le câble commence à s'infléchir

$$y' = \left(\frac{d - l\, tg\, \beta'}{tg\, \beta - tg\, \beta'} - \frac{tg\, \beta - tg\, \beta'}{4\, \frac{h}{a^2}}\right) tg\, \beta \tag{11}$$

En ce point, la tension du câble $t' = t - 0{,}0094\, y'$, d'où le paramètre de la courbe de raccordement

$$\frac{a'^2}{h'} = \frac{t'}{0{,}0047 + 0{,}00313\, tg^2\, \beta} \tag{12}$$

et
$$l' = \frac{tg\, \beta - tg\, \beta'}{2}\, \frac{a'^2}{h'} \tag{13}$$

si l'on remplace cette valeur dans l'équation

$$y' = y - \frac{l'}{2}\, tg\, \beta$$

on obtiendra de nouvelles valeurs pour t', $\frac{a'^2}{h'}$ et l'.
Connaissant l' on a

$$y = tg\,\beta\, x - \frac{tg\,\beta - tg\,\beta'}{2\,l'}\, x^2 \qquad (14)$$

Équation de la courbe cherchée

pour $\quad x = l' \qquad y_1 = d' = l'\,\frac{tg\,\beta + tg\,\beta'}{2} \qquad (15)$

» $\quad x = \frac{l'}{2} \qquad y_2 = \frac{l'}{2}(0{,}75\, tg\,\beta + 0{,}25\, tg\,\beta')$

mais $\quad f = \frac{l'}{2}\, tg\,\beta - y_2 \quad$ d'où $\quad f = l'\,\frac{tg\,\beta - tg\,\beta'}{8} \qquad (16)$

La longueur des tangentes est donnée par les relations

$$\mathrm{MN} = \frac{l'}{2\cos\beta} \quad (17) \quad \text{et} \quad \mathrm{M'N} = \frac{l'}{2\cos\beta'} \quad (18)$$

Remarque. — En $\varphi\left(\frac{\mathrm{T}}{p}\right)$ on a

$$f = \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{T}}{p} - y'\right)\frac{(tg\,\beta - tg\,\beta')^2}{1 + 0{,}666\, tg^2\,\beta}$$

On obtiendrait une formule beaucoup plus simple en négligeant y' par rapport à $\frac{\mathrm{T}}{p}$ et en prenant $1 + 0{,}666\, tg^2\,\beta = 1$, on aurait

$$f = \frac{\mathrm{T}}{p}\,\frac{(tg\,\beta - tg\,\beta')^2}{8} \quad \text{d'où} \quad l' = \frac{\mathrm{T}}{p}(tg\,\beta - tg\,\beta')$$

pour $\quad tg\,\beta = 0{,}10 \qquad 1 + 0{,}666\, tg^2\,\beta = 1{,}007$
$\qquad$ » $= 0{,}60 \qquad$ » $\qquad = 1{,}24$

Cette formule donne une approximation suffisante dans la plupart des cas.

APPLICATION. — Reprenons l'exemple ci-dessus, pour lequel on avait

$$d = 75^{m} \qquad l = 300^{m} \qquad t = 10^{k} \qquad \frac{h}{a^2} = 0{,}00052$$

et supposons qu'entre les points A et B le tracé comprenne deux pentes, l'une de 30 %, et l'autre de 20 %, ainsi $tg\,\beta = 0{,}30$ $tg\,\beta' = 0{,}20$.

Nous aurons comme première approximation :

de la formule	(10)	$y = 45^{m}$
»	(11)	$y' = 30^{m},6$
	d'où	$t' = 9^{k},712$
»	(12)	$\frac{a'^2}{h'} = 1949{,}6$
»	(13)	$l' = 97^{m}48$

Remplaçant l' par cette valeur dans l'équation

$$y' = y - \frac{l'}{2}\,tg\,\beta$$

on a :

$$y' = 30,^{m}38$$
$$t' = 9^{k},714$$
$$\frac{a'^2}{h'} = 1950$$
$$l' = 97^{m},50$$

d'où (14) $y = 0{,}30\,x - 0{,}0005128\,x^2$

et (16) $f = 1^{m},22$

Si l'on augmentait la tension admise, cela aurait pour effet de relever le profil de la ligne sur toute la longueur du raccordement.

Pour $t = 15^{k}$ on aurait $f = 1^{m},85$

et $\quad \frac{T}{p} = \frac{15}{0,0094} = 1596 \quad$ d'où $\quad p = 0,000626\,T$

pour $\qquad T = 4000^k \quad p = 2^k,50$

$\qquad\qquad = 5000^k \quad\ = 3^k,13$

Dans la détermination de l'effort de traction maximum T, pour lequel le câble doit être calculé, il y a lieu de tenir compte des à coups qui peuvent se produire au moment de l'arrêt des trains; mais nous pensons qu'il serait préférable d'en prévenir l'effet et surtout le danger, si l'arrêt devenait brusquement nécessaire en pleine voie, en reliant les trains par un fil électrique enroulé dans l'âme même du câble.

III

Compensation du poids du câble.

Le poids du câble peut être compensé par un câble continu, ainsi qu'on l'a fait dernièrement au funiculaire Bienne-Macolin, mais cette compensation peut être obtenue dans de meilleures conditions en modifiant le profil en long de la ligne et en le traçant suivant la courbe que nous allons déterminer.

Soit P le poids du wagon montant, y compris le poids des voyageurs et des bagages qu'il transporte;
P′ le poids du wagon descendant, ou wagon moteur;
Q le poids du cube d'eau nécessaire pour donner au train la vitesse réglementaire;
p le poids du câble par mètre courant;
β l'inclinaison de la voie.

Nous prendrons pour axe des x la voie même, et pour axe des y la perpendiculaire en son milieu, en sorte que l'origine des coordonnées coïncide avec le point de croisement des trains.

Au moment où les trains se croisent, la longueur du câble montant est égale à celle du câble descendant, il y a donc équilibre. A partir de cet instant, la longueur du câble montant diminue et celle du second augmente d'autant, à mesure que les trains s'éloignent du point de croisement.

Pour qu'il y ait compensation, il suffit de relever la voie de manière que le poids des wagons effectue un travail égal à celui du câble sur le parcours considéré.

Le chemin parcouru par le centre de gravité du câble étant $\frac{x}{2}$, si le chemin parcouru par chaque wagon est x, et la quantité dont il faut relever la voie y (fig. 3), on a

$$2p\,x \sin\beta \frac{x}{2} = (P' + Q) \cos\beta . y + P \cos\beta . y$$

d'où

$$y = \frac{p\,tg\,\beta}{P + P' + Q} x^2 \qquad (19)$$

Équation de la courbe cherchée. Cette courbe est une parabole, dont le paramètre est

$$\frac{P + P' + Q}{p\,tg\,\beta}$$

Nous avons négligé le travail correspondant au relèvement du câble, le poids de la longueur du câble comprise entre wagons étant insignifiant par rapport au poids de ceux-ci.

Il peut arriver qu'il y ait convenance à ne modifier le profil en long que d'un seul côté de l'axe des y (fig. 4). Dans ce cas, supposant le wagon moteur en M :

$$y = \frac{p\, tg\, \beta}{P' + Q} x^2 \qquad (20)$$

Dans le premier cas, le point de croisement se trouve abaissé de

$$\delta = \frac{l\, p\, h}{4\,(P + P' + Q) \cos \beta} \qquad (21)$$

Dans le second, le point supérieur du tracé est relevé de

$$\delta' = \frac{l\, p\, h}{4\,(P' + Q) \cos \beta} \qquad (22)$$

soit environ 2δ, le poids du wagon moteur intervenant seul dans le calcul.