

Zeitschrift: Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel
Herausgeber: Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel
Band: 11 (1876-1879)

Artikel: Sur la théorie du timbre et particulièrement des voyelles
Autor: Schneebeli
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-88124>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

recherche des solutions singulières dans tous les cas où l'équation différentielle est du second degré par rapport à la dérivée.

M. le Prof. *Schneebeli* fait la communication suivante :

SUR LA THÉORIE DU TIMBRE

ET PARTICULIÈREMENT DES VOYELLES.

Dans une communication précédente, j'ai mis sous les yeux de la Société une série de courbes, représentant les différentes voyelles. J'ai remarqué alors que la netteté des courbes et la perfection de leur dessin offrent en outre l'avantage de montrer plus exactement la qualité des harmoniques qui produisent le timbre, etc.

En effet, connaissant la courbe d'une sonorité, il est possible de trouver les sons simples qui la composent.

On peut toujours représenter une fonction par :

$$y = f(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{i=n-1} (A_i \sin \frac{2\pi}{n} i x) + \sum_{i=1}^{i=n-1} (B_i \cos \frac{2\pi}{n} i x) \quad I$$

ou

$$y = f(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{i=n-1} (A_i \sin \frac{2\pi}{n} i x + \alpha_i) \quad II$$

$$\left. \begin{aligned} \text{où } a_i &= \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \\ \tan \alpha_i &= \frac{B_i}{A_i} \end{aligned} \right\} \text{III}$$

En termes physiques : Une sonorité (Klang) est à envisager comme la superposition d'une série de sons simples dont les nombres de vibrations sont des multiples du son fondamental (Grundton, Obertöne ou Partialtöne). (Ohm, Helmholtz.)

Les coefficients a_1, a_2, a_3, \dots représentent les amplitudes des harmoniques ; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ leurs différences de phases.

Pour déterminer ces quantités caractéristiques d'une sonorité, nous aurons recours aux courbes qu'elles produisent. On divise la longueur de la période en n parties égales et l'on mesure l'ordonnée de chaque division respective.

On obtient de cette manière n valeurs de $f(x)$ pour des x équidistants.

La méthode des moindres carrés nous apprend ensuite à calculer les coefficients

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$$

$$B_1, B_2, B_3, \dots$$

par les formules :

$$n A_0 = \sum_{i=0}^{i=n-1} y_i$$

$$\frac{n}{2} A_1 = \sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i \cdot \sin \frac{2\pi}{n} x)$$

$$\frac{n}{2} B_1 = \sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i \cdot \cos \frac{2\pi}{n} x)$$

$$\frac{n}{2} A_2 = \sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot 2x) \quad \frac{n}{2} B_2 = \sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \cdot 2x)$$

$$\frac{n}{2} A_3 = \sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot 3x) \quad \frac{n}{2} B_3 = \sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \cdot 3x)$$

$$\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array} \quad \begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\frac{n}{2} A_{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot (n-1)x) \quad \frac{n}{2} B_{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (y_i \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \cdot (n-1)x)$$

Les formules (III) nous donnent enfin les

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$\text{et les } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

Pour connaître encore l'intensité des harmoniques qui se trouvent dans la sonorité, il faut se rappeler qu'elles sont proportionnelles aux carrés de leurs amplitudes respectives.

Dans notre cas particulier, nous avons choisi deux modes pour la discussion des courbes ; peut-être faudrait-il les étendre davantage ?

1^o Lorsque la courbe ne présente pas de complications trop accentuées, on s'est borné à diviser la période en douze parties égales. On calcule alors les coefficients caractéristiques d'après les formules IV :

Valeurs de A_0, A_1, A_2, \dots

B_1, B_2, B_3, \dots

en fonction de y_0, y_1, y_2, \dots

$$12 \quad A_0 = \sum_{i=0}^{i=n-1} y_i$$

$$6 \quad A_1 = (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \cdot \sin 30^\circ + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \cdot \sin 60^\circ + y_3 - y_9.$$

$$6 \quad B_1 = (y_1 - y_5 - y_7 + y_{11}) \cdot \cos 30^\circ + (y_2 - y_4 - y_8 + y_{10}) \cdot \cos 60^\circ + y_0 - y_6.$$

$$6 \quad A_2 = (y_1 + y_2 - y_4 - y_5 + y_7 + y_8 - y_{10} - y_{11}) \cdot \sin 60^\circ.$$

$$6 \quad B_2 = (y_1 - y_2 - y_4 + y_5 + y_7 - y_8 - y_{10} + y_{11}) \cdot \cos 60^\circ + y_0 - y_3 + y_6 - y_9.$$

$$6 \quad A_3 = y_1 - y_3 + y_5 - y_7 + y_9 - y_{11}.$$

$$6 \quad B_3 = y_0 - y_2 + y_4 - y_6 + y_8 - y_{10}.$$

$$6 \quad A_4 = (y_1 - y_2 + y_4 - y_5 + y_7 - y_8 + y_{10} - y_{11}) \cdot \sin 60^\circ.$$

$$6 \quad B_4 = -(y_1 + y_4 + y_7 + y_{10} + y_2 + y_5 + y_8 + y_{11}) \cdot \cos 60^\circ + y_0 + y_3 + y_6 + y_9.$$

2° Lorsque la courbe montre une complication plus grande, on divise la période en vingt-quatre parties égales et l'on calcule dans ce cas les coefficients caractéristiques d'après les formules V :

Valeurs de $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots \dots \dots, A_{23}$

en fonction de $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots \dots \dots, y_{23}$.

$$24 A_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \dots \dots + y_{23}.$$

$$12 A_1 = (y_1 + y_{11} - y_{13} - y_{23}) \cdot \sin 15^\circ + (y_2 + y_{10} - y_{14} - y_{22}) \cdot \sin 30^\circ + (y_3 + y_9 - y_{15} - y_{21}) \cdot \sin 45^\circ + (y_4 + y_8 - y_{16} - y_{20}) \cdot \sin 60^\circ + (y_5 + y_7 - y_{17} - y_{19}) \cdot \sin 75^\circ + y_6 - y_{18}.$$

$$12 B_1 = (y_1 - y_{11} - y_{13} + y_{23}) \cdot \cos 15^\circ + (y_2 - y_{10} - y_{14} + y_{22}) \cdot \cos 30^\circ + (y_3 - y_9 - y_{15} + y_{21}) \cdot \cos 45^\circ + (y_4 - y_8 - y_{16} + y_{20}) \cdot \cos 60^\circ + (y_5 - y_7 - y_{17} + y_{19}) \cdot \cos 75^\circ + y_6 - y_{18}.$$

$$12 A_2 = (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11} + y_{13} + y_{17} - y_{19} - y_{23}) \cdot \sin 30^\circ + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10} + y_{14} + y_{16} - y_{20} - y_{22}) \cdot \sin 60^\circ + y_6 - y_9 + y_{15} - y_{21}.$$

$$12 B_2 = (y_1 - y_5 - y_7 + y_{11} + y_{13} - y_{17} - y_{19} + y_{23}) \cdot \cos 30^\circ + (y_2 - y_4 - y_8 + y_{10} + y_{14} - y_{16} - y_{20} + y_{22}) \cdot \cos 60^\circ + y_6 - y_9 + y_{12} - y_{18}.$$

$$12 A_3 = (y_1 + y_3 - y_5 - y_7 + y_9 - y_{13} - y_{15} + y_{17} + y_{19} - y_{21} - y_{23}) \cdot \sin 45^\circ + y_2 - y_6 + y_{10} - y_{14} + y_{18} - y_{22}.$$

$$12 B_3 = (y_4 - y_3 - y_5 + y_7 + y_9 - y_{11} - y_{13} + y_{15} + y_{17} - y_{19} - y_{21} + y_{23}) \cdot \cos 45^\circ + y_0 - y_4 + y_8 - y_{12} + y_{16} - y_{20}.$$

$$12 A_4 = (y_1 + y_2 - y_4 - y_5 + y_7 + y_8 - y_{10} - y_{11} + y_{15} + y_{14} - y_{16} - y_{17} + y_{19} + y_{20} - y_{22} - y_{23}) \sin 60^\circ.$$

$$12 B_4 = y_3 - y_5 + y_6 - y_9 + y_{12} - y_{15} + y_{18} - y_{21} + (y_1 - y_2 \\ - y_4 + y_5 + y_7 - y_8 - y_{10} + y_{11} + y_{13} - y_{14} - y_{16} \\ + y_{17} + y_{19} - y_{20} - y_{22} + y_{25}) \cos 60^\circ.$$

$$12 A_5 = (y_5 + y_7 - y_{17} - y_{19}) \sin 45^\circ + (y_{10} + y_2 - y_{22} - y_{44}) \\ \sin 30^\circ + (y_{15} + y_{24} - y_5 - y_9) \cdot \sin 45^\circ + (y_{20} + \\ y_{16} - y_8 - y_4) + \sin 60^\circ (y_1 + y_{11} - y_{15} - y_{25}) \sin 75^\circ \\ + y_6 - y_{18}.$$

$$12 B_5 = y_0 - y_{12} + (y_5 - y_7 - y_{17} + y_{19}) \cos 45^\circ + (y_{10} - y_2 \\ - y_{22} + y_{44}) \cos 30^\circ + (y_{15} - y_{21} - y_5 + y_9) \cos 45^\circ \\ + (y_{20} - y_{16} - y_8 + y_4) \cos 60^\circ + (y_1 - y_{11} - y_{15} \\ + y_{25}) \cos 75^\circ.$$

$$12 A_6 = y_4 - y_5 + y_5 - y_7 + y_9 - y_{11} + y_{13} - y_{15} + y_{17} - y_{19} \\ + y_{21} - y_{25}.$$

$$12 B_6 = y_0 - y_2 + y_4 - y_6 + y_8 - y_{10} + y_{12} - y_{14} + y_{16} - y_{18} \\ + y_{20} - y_{22}.$$

Comme les courbes produites par mon phonautographe ont toujours des dimensions assez petites, il a fallu avoir recours à un appareil très exact pour les mesurer. J'ai employé pour cela deux vis micrométriques, l'une perpendiculaire à l'autre, comme le support d'un tour. (Fig. 2.)

Le pas de vis étant d'un millimètre, on peut encore lire sur le cercle divisé les millièmes de millimètre.

Pour arriver à mesurer très-exactement, mon appareil enregistreur, représenté dans une première communication, a été pourvu d'une pointe fixe pour indiquer l'axe des abscisses. (Fig. 4,)

L'inscription des courbes se fait sur des lames de verre, couvertes d'une légère couche de noir de fumée et fixées sur un chariot qui passe rapidement au-dessous des pointes. J'ai choisi le verre pour deux raisons :

Premièrement, parce que le frottement de la pointe sur le verre est beaucoup moins considérable que, par exemple, sur le papier noirci du cylindre phonautographique et, secondement, parce que la détermination des dimensions présenteraient sur le papier une garantie peu rassurante à cause des déformations auxquelles il est soumis, soit par des tensions différentes, soit par l'humidité, etc.

Lorsqu'il ne s'agit que de la reproduction des courbes dans un cours, le cylindre phonautographique peut parfaitement être employé.

Les abscisses ont été mesurées en partant pour chacune de l'origine, la longueur de la période étant déterminée préalablement et la distance de chaque ordonnée de l'origine étant calculée d'avance.

Pour la détermination de la longueur de la période, on part d'une partie saillante et caractéristique de la courbe et on mesure jusqu'à la prochaine répétition de la même forme. Cet arrangement m'a paru nécessaire, parce que le chariot passe au-dessous de la pointe, tiré par la main et en conséquence avec une vitesse inégale. Pendant l'intervalle très court d'une période ($\frac{1}{320}$, $\frac{1}{384}$, $\frac{1}{512}$, $\frac{1}{640}$ de seconde), on peut considérer la vitesse comme étant constante, ce qui ne serait pas le cas si l'on voulait mesurer plusieurs périodes et en prendre la moyenne. Du reste, il résulte de l'exemple cité ci-dessous, que l'on arrive quand même à une exactitude suffisante.

Chaque ordonnée est mesurée deux fois, et quatre fois lorsque c'est nécessaire.

On peut facilement se persuader que, par la disposition de la pointe qui écrit, celle-ci décrit des arcs de cercle au lieu de tangentes au cercle.

De la figure (3) résulte que nous mesurons plutôt $a\ b$ que $c\ d$. Pour voir quelle erreur en provient, je choisis la courbe qui a une des amplitudes les plus grandes $O\ ut_4$.

Double amplitude maximale : $1^{mm},537$.

Distance de la pointe du centre : $25^{mm},2$.

L'erreur maximale qui résulte du mouvement circulaire se monte à $\pm 0^{mm},00035$, donc une quantité plus petite que les erreurs probables de la méthode.

II.

Dans ce paragraphe, je donne une série complète d'observations pour une courbe et les résultats sur quelques autres courbes, afin de montrer la possibilité d'arriver par cette voie à la discussion de la composition d'une sonorité quelconque et particulièrement de celle de la voix.

On peut, me semble-t-il, par cette méthode, trancher définitivement plusieurs questions dans ce domaine, qui, dans ces derniers temps, ont donné lieu à des discussions assez vives (').

Ci-dessous se trouve une série d'observations sur la courbe de $O\ ut_4$.

(') Einige Bemerkungen zur Helmholtz'schen Vocallehre, von Emil von Quanten. Pogg. Anal. Band 154, p. 272.

Untersuchungen über die Natur des Vocalklanges, von Félix Auerbach. Pogg. Anal. Ergänz., Band VIII, 177.

O ut 4.

Longueur de la période mesurée : 4,801^{mm}.

4,784.

4,803.

4,790.

4,797.

4,790.

Moyenne = 4,7942.

Distance de 2 ordonnées consécutives : 0,19976^{mm}.

$X_0 = 0,00000.$	$Y_0 = 2,501.$	$X_{12} = 2,39712.$	$Y_{12} = 2,556.$
$X_4 = 0,19976.$	$Y_4 = 2,678.$	$X_{13} = 2,59688.$	$Y_{13} = 2,874.$
$X_2 = 0,39952.$	$Y_2 = 3,086.$	$X_{14} = 2,79664.$	$Y_{14} = 3,500.$
$X_5 = 0,59928.$	$Y_5 = 3,375.$	$X_{15} = 2,99640.$	$Y_{15} = 3,801.$
$X_6 = 0,79904.$	$Y_6 = 3,499.$	$X_{16} = 3,19616.$	$Y_{16} = 3,899.$
$X_3 = 0,99880.$	$Y_3 = 3,615.$	$X_{17} = 3,39592.$	$Y_{17} = 4,018.$
$X_7 = 1,19856.$	$Y_7 = 3,672.$	$X_{18} = 3,59568.$	$Y_{18} = 4,065.$
$X_8 = 1,39832.$	$Y_8 = 3,553.$	$X_{19} = 3,79544.$	$Y_{19} = 3,967.$
$X_9 = 1,59808.$	$Y_9 = 3,294.$	$X_{20} = 3,99520.$	$Y_{20} = 3,730.$
$X_{10} = 1,79784.$	$Y_{10} = 2,997.$	$X_{21} = 4,19496.$	$Y_{21} = 3,401.$
$X_{11} = 1,99760.$	$Y_{11} = 2,675.$	$X_{22} = 4,39472.$	$Y_{22} = 3,000.$
$X_{14} = 2,19736.$	$Y_{14} = 2,509.$	$X_{23} = 4,59448.$	$Y_{23} = 2,650.$

Le résultat du calcul des harmoniques d'après les formules précédentes, est indiqué sous n° 3 du tableau général.

Pour savoir avec quelle exactitude la formule représente la courbe, on a calculé d'après l'équation 3, vingt-quatre de ses points. Dans le tableau suivant, sont renfermées les ordonnées observées et calculées.

O ut 4.

<i>Observé.</i>	<i>Calculé.</i>	<i>Differences.</i>
$Y_0 = 2,501.$	$Y_0 = 2,507.$	— 0,006.
$Y_1 = 2,678.$	$Y_1 = 2,704.$	— 0,026.
$Y_2 = 3,086.$	$Y_2 = 3,090.$	— 0,004.
$Y_3 = 3,375.$	$Y_3 = 3,373.$	+ 0,002.
$Y_4 = 3,499.$	$Y_4 = 3,498.$	+ 0,001.
$Y_5 = 3,615.$	$Y_5 = 3,594.$	+ 0,021.
$Y_6 = 3,672.$	$Y_6 = 3,654.$	+ 0,018.
$Y_7 = 3,553.$	$Y_7 = 3,548.$	+ 0,005.
$Y_8 = 3,294.$	$Y_8 = 3,281.$	+ 0,013.
$Y_9 = 2,997.$	$Y_9 = 2,983.$	+ 0,014.
$Y_{10} = 2,675.$	$Y_{10} = 2,711.$	— 0,036.
$Y_{11} = 2,509.$	$Y_{11} = 2,509.$	0,000.
$Y_{12} = 2,556.$	$Y_{12} = 2,549.$	+ 0,007.
$Y_{13} = 2,874.$	$Y_{13} = 2,940.$	— 0,066.
$Y_{14} = 3,500.$	$Y_{14} = 3,467.$	+ 0,033.
$Y_{15} = 3,801.$	$Y_{15} = 3,804.$	— 0,003.
$Y_{16} = 3,899.$	$Y_{16} = 3,916.$	— 0,017.
$Y_{17} = 4,018.$	$Y_{17} = 3,984.$	+ 0,034.
$Y_{18} = 4,065.$	$Y_{18} = 4,044.$	+ 0,021.
$Y_{19} = 3,963.$	$Y_{19} = 3,964.$	— 0,001.

$Y_{20} = 3,730.$	$Y_{20} = 3,717.$	+ 0,013.
$Y_{21} = 3,401.$	$Y_{21} = 3,389.$	+ 0,011.
$Y_{22} = 3,000.$	$Y_{22} = 3,022.$	- 0,022.
$Y_{23} = 2,650.$	$Y_{23} = 2,663.$	- 0,013.

La coïncidence est suffisante, sauf pour y_{13} , différence que je ne puis m'expliquer que par une inégalité du verre (les observations répétées des ordonnées ne s'éloignent jamais de 0^{mm},010 de la moyenne).

Pour s'assurer que le calcul donne encore une approximation suffisante, en ne choisissant que douze observations, lorsque la courbe n'est pas trop compliquée, on a calculé la même courbe en ne se servant que des ordonnées paires.

Le résultat est enregistré dans l'équation 4.

Les différences entre les résultats tirés des formules IV et V ne sont pas tellement considérables pour ne pas permettre d'employer la formule IV à des courbes plus simples telles que le *ou*, etc. . . .

Aussitôt que la courbe montre un caractère simple, on peut donc se permettre de la discuter à l'aide de la formule IV.

Le tableau suivant renferme douze courbes représentant les voyelles les plus importantes.

mi_5	$Y = 3,4197 + 0,1805 \sin(x. 15 + 278^\circ 52') \\ + 0,2973 \sin(x. 30 + 80^\circ 4',5) \\ + 0,0623 \sin(x. 45 + 78^\circ 48',3) \\ + 0,0217 \sin(x. 60 + 165^\circ 45,'3) \\ + 0,0127 \sin(x. 75 + 69^\circ 54',7) \\ + 0,0070 \sin(x. 90 + 154^\circ 2',5)$	$\varphi_1 = 161^\circ 19',5$	$a_1^2 = 1,0000$
(1)		$\varphi_2 = 159^\circ 56',3$	$a_2^2 = 2,7130$
		$\varphi_3 = 246^\circ 53',3$	$a_3^2 = 0,1195$
		$\varphi_4 = 145^\circ 5,6$	$a_4^2 = 0,0144$
		$\varphi_5 = 235^\circ 10,4$	$a_5^2 = 0,00494$
			$a_6^2 = 0,00014$
sol_5	$Y = 3,4942 + 0,1389 \sin(x. 30 + 230^\circ 10') \\ + 0,3590 \sin(x. 60 + 286^\circ 15') \\ + 0,0397 \sin(x. 90 + 248^\circ 49') \\ + 0,0130 \sin(x. 120 + 205^\circ 4')$	$\varphi_1 = 56^\circ 5'$	$a_1^2 = 1,000$
(2)		$\varphi_2 = 18^\circ 39'$	$a_2^2 = 6,681$
		$\varphi_3 = 334^\circ 54'$	$a_3^2 = 0,0816$
			$a_4^2 = 0,0095$
ut_4	$Y = 3,2879 + 0,24594 \sin(x. 15 + 183^\circ 30,'8) \\ + 0,64235 \sin(x. 30 + 286^\circ 9,7) \\ + 0,05067 \sin(x. 45 + 191^\circ 18,7) \\ + 0,11533 \sin(x. 60 + 300^\circ 34,'7) \\ + 0,00414 \sin(x. 75 + 76^\circ 1,2) \\ + 0,04868 \sin(x. 90 + 242^\circ 41',2)$	$\varphi_1 = 102^\circ 38',9$	$a_1^2 = 1,0000$
(3)		$\varphi_2 = 7^\circ 47,9$	$a_2^2 = 6,8212$
		$\varphi_3 = 117^\circ 3,9$	$a_3^2 = 0,0424$
		$\varphi_4 = 252^\circ 30,4$	$a_4^2 = 0,2198$
		$\varphi_5 = 59^\circ 10,4$	$a_5^2 = 0,0003$
			$a_6^2 = 0,0392$

O

368

$$\begin{aligned}
ut_4 \cdot & \quad Y = 3,2896 + 0,24855 \sin(x. \quad 30 + 184^\circ \quad 34') \\
& \quad + 0,65001 \sin(x. \quad 60 + 284^\circ \quad 28') \quad \varphi_1 = 99^\circ 54' \\
& \quad + 0,05963 \sin(x. \quad 90 + 194^\circ \quad 44') \quad \varphi_2 = 10^\circ 10' \\
(4) & \quad + 0,11978 \sin(x. 120 + 310^\circ \quad 19') \quad \varphi_3 = 125^\circ 45' \\
& \quad + a_4^2 = 0,217
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ut_4 \cdot & \quad Y = 3,9262 + 0,1661 \sin(x. \quad 30 + 267^\circ \quad 56') \quad a_1^2 = 1,000 \\
& \quad + 0,3725 \sin(x. \quad 60 + 273^\circ \quad 7') \quad \varphi_1 = 5^\circ 11' \\
& \quad + 0,0137 \sin(x. \quad 90 + 253^\circ \quad 46') \quad \varphi_2 = 345^\circ 50' \\
(5) & \quad + 0,0247 \sin(x. 120 + 115^\circ \quad 34') \quad \varphi_3 = 207^\circ 38' \\
& \quad + a_4^2 = 0,0225
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
mi_4 \cdot & \quad Y = 2,369 + 0,1385 \sin(x. \quad 30 + 176^\circ \quad 33') \quad a_1^2 = 1,000 \\
& \quad + 0,3790 \sin(x. \quad 60 + 292^\circ \quad 54') \quad \varphi_1 = 116^\circ 21' \\
& \quad + 0,0169 \sin(x. \quad 90 + 319^\circ \quad 24') \quad \varphi_2 = 142^\circ 51' \\
(6) & \quad + 0,0573 \sin(x. 120 + 204^\circ \quad 37') \quad \varphi_3 = 28^\circ 3' \\
& \quad + a_4^2 = 0,1709
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 OU \quad ut_4 \quad Y = & 2,6608 + 0,8612 \sin(x. 30 + 291^\circ 16') \\
 (7) \quad & + 0,0271 \sin(x. 60 + 241^\circ 3') \quad \varphi_1 = 309^\circ 47' \\
 & + 0,0853 \sin(x. 90 + 179^\circ 6') \quad \varphi_2 = 247^\circ 50' \\
 & + 0,0076 \sin(x. 120 + 82^\circ 17') \quad \varphi_3 = 151^\circ 1' \\
 & \qquad \qquad \qquad \varphi_4 = 0,0001
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 OU \quad ut_4 \quad Y = & 4,0997 + 1,0463 \sin(x. 30 + 64^\circ 25') \\
 (8) \quad Guillame. \quad & + 0,2740 \sin(x. 60 + 103^\circ 17') \quad \varphi_1 = 38^\circ 52' \\
 & + 0,0730 \sin(x. 90 + 156^\circ 18') \quad \varphi_2 = 91^\circ 53' \\
 & + 0,0206 \sin(x. 120 + 142^\circ 46') \quad \varphi_3 = 78^\circ 21' \\
 & \qquad \qquad \qquad \varphi_4 = 0,0004
 \end{aligned}$$

A ut_4

$$\begin{aligned}
 Y = & 2,8840 + 0,3275 \sin(x. 15 + 195^\circ 10') \\
 & + 0,2763 \sin(x. 30 + 181^\circ 34') \\
 & + 0,1220 \sin(x. 45 + 204^\circ 48') \\
 (9) \quad & + 0,0743 \sin(x. 60 + 175^\circ 34') \\
 & + 0,0235 \sin(x. 75 + 273^\circ 55') \\
 & + 0,0130 \sin(x. 90 + 63^\circ 16') \\
 \hline
 \end{aligned}$$

371 —

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 346^\circ 24' \\
 \varphi_2 &= 9^\circ 38' \\
 \varphi_3 &= 340^\circ 24' \\
 \varphi_4 &= 78^\circ 45' \\
 \varphi_5 &= 218^\circ 6' \\
 \varphi_6 &= 265^\circ 42' \\
 \hline
 a_1^2 &= 1,0000 \\
 a_2^2 &= 0,7121 \\
 a_3^2 &= 0,1392 \\
 a_4^2 &= 0,0512 \\
 a_5^2 &= 0,0051 \\
 a_6^2 &= 0,0015
 \end{aligned}$$

A ut_4

$$\begin{aligned}
 Y = & 1,8944 + 0,2708 \sin(x. 15 + 300^\circ 40') \\
 & + 0,3448 \sin(x. 30 + 291^\circ 19') \\
 & + 0,0371 \sin(x. 45 + 328^\circ 19') \\
 (10) \quad & + 0,1195 \sin(x. 60 + 246^\circ 13') \\
 & + 0,0065 \sin(x. 75 + 339^\circ 19') \\
 & + 0,0318 \sin(x. 90 + 206^\circ 22')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AI(e) \cdot ut_4 & \quad Y = 2,009 \quad + 0,5977 \sin(x. \quad 30 + \quad 44^\circ 15') \\
 & \quad + 0,5063 \sin(x. \quad 60 + \quad 92^\circ 30') \\
 (41) \quad & \quad + 0,0437 \sin(x. \quad 90 + \quad 61^\circ 59') \\
 & \quad + 0,0281 \sin(x. 120 + 134^\circ 46') \\
 & \quad \hline
 & \quad \varphi_1 = \quad 48^\circ 15' \\
 & \quad \varphi_2 = \quad 17^\circ 44' \\
 & \quad \varphi_3 = \quad 90^\circ 31' \\
 & \quad a_4^2 = 0,0024
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E \cdot ut_4 \cdot Y & = 1,2645 \quad + 0,1288 \sin(x. \quad 15 + \quad 246^\circ 21') \\
 & \quad + 0,1455 \sin(x. \quad 30 + \quad 299^\circ 59') \\
 & \quad + 0,0074 \sin(x. \quad 45 + \quad 267^\circ 47') \\
 (42) \quad & \quad + 0,0113 \sin(x. \quad 60 + \quad 191^\circ 43') \\
 & \quad + 0,0091 \sin(x. \quad 75 + \quad 264^\circ 28') \\
 & \quad + 0,0117 \sin(x. \quad 90 + \quad 312^\circ \quad 8') \\
 & \quad \hline
 & \quad \varphi_1 = \quad 53^\circ 38' \\
 & \quad \varphi_2 = \quad 20^\circ 26' \\
 & \quad \varphi_3 = \quad 305^\circ 22' \\
 & \quad a_4^2 = 1,000 \\
 & \quad a_2^2 = 1,2760 \\
 & \quad a_5^2 = 0,00033 \\
 & \quad a_4^2 = 0,000769 \\
 & \quad a_3 = 0,000499 \\
 & \quad a_6^2 = 0,000825
 \end{aligned}$$

(A suivre.)

D'après nature.

Fig. 1.

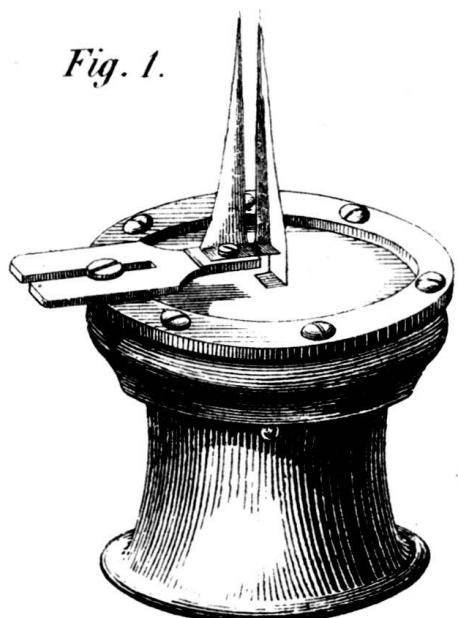


Fig. 2.

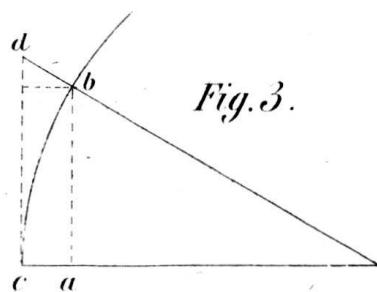
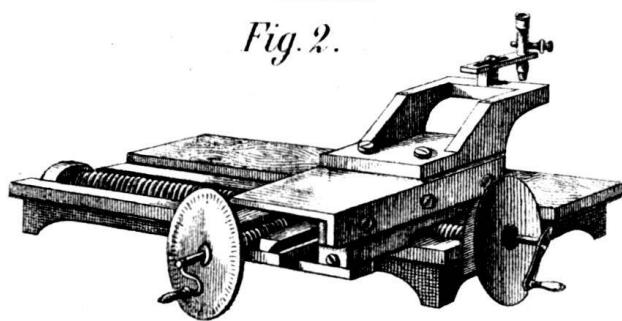


Fig. 3.

D'après nature.

0 mi 3

0 sol 3

0 ut 4

0 mi 4

0 ut 4

A ut 4

A ut 4

É ut 4

É ut 4