Zeitschrift: Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel
Herausgeber: Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel
Band: 10 (1873-1876)

Artikel: Polyèdres semi-réguliers
Autor: Terrier
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88098

POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS

(POLYÈDRES CONVEXES)

(Communication faite à la Société des sciences naturelles dans ses séances du 7 janvier et du 18 mars 1875).

En tronquant les polyèdres réguliers par des plans convenablement choisis, on obtient de nouveaux polyèdres, dont les faces sont des polygones réguliers et dont les angles sont égaux ou symétriques; ces polyèdres satisfont donc partiellement aux conditions de régularité remplies par les premiers.

Inscrivons, par exemple, dans chaque face d'un cube, un carré ayant pour sommets les milieux des côtés du premier; les côtés des six carrés obtenus forment en outre huit triangles équilatéraux et ces quatorze faces limitent évidemment un polyèdre que l'on déduit du cube en le tronquant par huit plans respectivement perpendiculaires aux diagonales. Les faces de ce décatétraèdre sont des polygones réguliers, — carrés et triangles équilatéraux, — et ses angles sont égaux entre eux, mais non pas réguliers.

De même inscrivons dans chaque face d'un cube un octogone régulier; les côtés des six octogones forment en outre huit triangles équilatéraux et ces quatorze faces limitent un décatétraèdre semi-régulier.

En opérant d'une manière analogue sur chaque polyèdre régulier, on obtiendra un certain nombre de polyèdres ayant pour faces des polygones réguliers et dont les angles sont égaux ou symétriques.

Quelques-uns de ces polyèdres peuvent être considérés comme établissant une transition entre deux polyèdres réguliers; ainsi le premier décatétraèdre indiqué peut être obtenu en tronquant un octaèdre régulier; inversement, suivant que l'on prolonge les faces carrées ou les faces triangulaires de ce polyèdre, on obtient le cube ou l'octaèdre.

On trouve dans la nature quelques-uns de ces solides; ainsi, le second décatétraèdre cité est une des formes cristallines du sulfure de plomb ou galène; la plupart de ceux que l'on peut obtenir en tronquant d'une manière simple les polyèdres réguliers étaient connus des anciens et désignés par eux sous le nom de solides d'Archimède; Keppler les a reproduits dans son *Harmonice mundi.*

En dernier lieu, ces solides ont été l'objet d'un travail approfondi de M. Catalan, qui a été amené à considérer un second genre de polyèdres semi-réguliers, genre dans lequel toutes les faces sont égales, mais non régulières et les angles réguliers. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'exposer sommairement les propriétés des polyèdres semi-réguliers, en modifiant quelques-unes des démonstrations données.

POLIÈDRES SEMI-RÉGULIERS

DU PREMIER GENRE

Définition. — Dans tout polyèdre semi-régulier du premier genre, les faces sont des polygones réguliers et les angles sont égaux ou symétriques.

De cette définition résultent immédiatement les propriétés suivantes :

1° Dans tout polyèdre semi-régulier du premier genre, les arêtes sont égales;

2° Les faces de même espèce sont égales;

3° Les angles sont trièdres, tétraèdres ou pentaèdres.

On est conduit à cette dernière proposition en observant que dans les polyèdres semi-réguliers, les faces des angles solides sont égales ou supérieures à deux tiers d'angle droit, que par suite leur nombre ne peut surpasser cinq. On peut la considérer aussi comme un corollaire du théorème d'Euler; on déduit en effet de ce théorème qu'il n'existe pas de polyèdre convexe dans lequel ne se trouvent ni angles trièdres, ni angles tétraèdres ou pentaèdres.

Formules relatives aux polyèdres semi-réguliers du premier genre.

Désignons par A le nombre des arêtes, F et S les nombres des faces et des sommets du polyèdre; soit d'autre part $f_3, f_4, f_5 \ldots$. les nombres des faces triangulaires, quadrangulaires, pentagonales...; d'après le théorème d'Euler, on a:

(1) $$A+2=F+S$$

d'autre part, on a évidemment:

(2) $$F=f_3+f_4+f_5+\ldots.$$

et comme chaque arête appartient à deux faces:

(3) $$2A=3f_3+4f_4+\ldots.$$

Chaque arête appartient aussi à deux angles solides, suivant donc que les angles seront trièdres, tétraèdres ou pentaèdres, on aura l'une des formules suivantes:

(4) $$2A=3S \quad 2A=4S \quad 2A=5S$$

Désignons maintenant par t le nombre des faces triangulaires aboutissant à chaque sommet, par q le nombre des faces carrées, p celui des faces pentagonales, etc....; en faisant la somme des nombres des faces de chaque espèce qui aboutissent en chaque sommet, on obtiendra les relations suivantes:

(5) $$3f_3=tS \quad 4f_4=qS \quad 5f_5=pS\ldots. \text{ etc.}$$

En ajoutant membre à membre ces équations et tenant compte de la relation (4), on retrouve la relation (3); si donc n est le nombre d'espèces de faces du polyèdre, les équations distinctes se réduisent à $n+3$, elles permettront donc de déterminer les $(n+3)$ nombres A, F, S, $f_3\, f_4\ldots$, pourvu que l'on connaisse $t, q, p\ldots$, nombres dont la somme doit être au moins égale à trois et au plus égale à cinq, puisque les angles du polyèdre doivent être trièdres, tétraèdres ou pentaèdres.

Il convient donc de chercher tout d'abord quelles sont les valeurs possibles de $t, q, p \ldots$, etc.; la détermination des polyèdres semi-réguliers possibles est donc ramenée à la résolution d'un problème d'analyse indéterminée.

Détermination des combinaisons de faces polygonales régulières qui peuvent correspondre à des polyèdres semi-réguliers.

Cette détermination peut être effectuée rapidement de la manière suivante: éliminons A, F et S entre les équations (1), (2), (3) et (4); on obtient de la sorte, suivant que les angles sont trièdres, tétraèdres ou pentaèdres, les relations:

$$
\begin{aligned}
3f_3 + 2f_4 + f_5 &= 12 + f_7 + 2f_8 + \ldots \\
(6) \qquad f_3 &= 8 + f_5 + 2f_6 + 3f_7 + \ldots \\
f_3 &= 20 + 2f_4 + 5f_5 + 8f_6 + \ldots
\end{aligned}
$$

On en conclut: 1° que dans tout polyèdre semi-régulier à angles trièdres se trouvent nécessairement des faces triangulaires ou carrées ou pentagonales; 2° que dans tout polyèdre semi-régulier à angles tétraèdres ou pentaèdres, se trouvent nécessairement des faces triangulaires.

Cas des angles trièdres.

Il est tout d'abord évident que lorsqu'un polyèdre semi-régulier admet des faces d'un nombre impair de côtés, les deux autres faces de l'angle trièdre doivent être de même espèce; cela posé en tenant compte de la limite (quatre droits) que ne peut atteindre la somme des faces d'un angle solide convexe, on reconnaît que les seules combinaisons de faces possibles sont:

1° Un triangle avec deux hexagones,
2° Un triangle avec deux octogones,
3° Un triangle avec deux décagones,
4° Un carré avec deux hexagones,
5° Un carré avec un hexagone et un octogone,
6° Un carré avec un hexagone et un décagone,
7° Un pentagone avec deux hexagones,
8° Deux carrés avec un polygone régulier quelconque.

Cas des angles tétraèdres.

Lorsqu'un polyèdre semi-régulier admet des faces d'un nombre impair de côtés, les deux faces qui leur sont adjacentes dans chaque angle tétraèdre sont nécessairement de même espèce.

Par suite, les seules combinaisons possibles sont les suivantes :

9° Un triangle avec trois carrés,
10° Un triangle avec deux carrés et un pentagone,
11° Deux triangles avec deux carrés,
12° Deux triangles avec deux pentagones,
13° Trois triangles avec un polygone régulier quelconque.

Cas des angles pentaèdres.

Combinaisons possibles :

14° Quatre triangles avec un carré,
15° Quatre triangles avec un pentagone.

Remarque.

Les formules (5) que l'on peut écrire :

$$S = \frac{3f_3}{t} = \frac{4f_4}{q} = \frac{5f_5}{p} = \ldots$$

et la formule (6) correspondante donnent les valeurs de $f_3, f_4 \ldots$, etc., et de S pour chaque combinaison de ces valeurs, on déduit ensuite celles de F et A.

Les nombres trouvés étant entiers et d'autre part les polyèdres correspondants pouvant être obtenus en tronquant les polyèdres réguliers convexes, on en déduit l'existence des seuls polyèdres semi-réguliers du premier genre mentionnés ci-dessous.

POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS DU PREMIER GENRE

A **Polyèdres à angles trièdres.**

1. *Octaèdre* à faces triangulaires et hexagonales,
$A = 18 \quad S = 12 \quad F = 8 \quad f_3 = 4 \quad f_6 = 4$

Ce polyèdre peut être obtenu en tronquant un tétraèdre régulier.

2. *Décatétraèdre* à faces triangulaires et octogonales,

$$A = 36 \quad S = 24 \quad F = 14 \quad f_3 = 8 \quad f_8 = 6$$

Ce polyèdre peut être obtenu en tronquant un hexaèdre régulier.

3. *Triacontadoèdre* à faces triangulaires et décagonales,

$$A = 90 \quad S = 60 \quad F = 32 \quad f_3 = 20 \quad f_{10} = 12$$

Ce polyèdre peut être déduit du dodécaèdre régulier.

4° *Décatétraèdre* à faces carrées et hexagonales,

$$A = 36 \quad S = 24 \quad F = 14 \quad f_4 = 6 \quad f_6 = 8$$

Ce polyèdre peut être déduit de l'octaèdre régulier.

5° *Icohexaèdre* à faces carrées, hexagonales et octogonales,

$$A = 72 \quad S = 48 \quad F = 26 \quad f_4 = 12 \quad f_6 = 8 \quad f_8 = 6$$

Ce polyèdre peut être déduit de l'hexaèdre et de l'octaèdre réguliers.

6° *Hexécontadoèdre* à faces carrées hexagonales et décagonales,

$$A = 180 \quad S = 120 \quad F = 62 \quad f_4 = 30 \quad f_6 = 20 \quad f_{10} = 12$$

Ce polyèdre peut être déduit du dodécaèdre et de l'icosaèdre réguliers.

7° *Triacontadoèdre* à faces pentagonales et hexagonales,

$$A = 90 \quad S = 60 \quad F = 32 \quad f_5 = 12 \quad f_6 = 20$$

Ce polyèdre peut être déduit de l'icosaèdre régulier.

8° *Prisme régulier* à faces latérales carrées.

Il existe une infinité de polyèdres semi-réguliers de cette espèce.

Pour des bases polygonales régulières de n côtés, on trouve :

$$A = 3n \quad S = 2n \quad F = n+2 \quad f_4 = n \quad f_n n = 2$$

B. **Polyèdres à angles tétraèdres.**

9° *Icohexaèdre* à faces triangulaires et carrées,

$$A = 48 \quad S = 24 \quad F = 26 \quad f_3 = 8 \quad f_4 = 18$$

Ce polyèdre peut être déduit de l'hexaèdre régulier.

10° *Hexécontadoèdre* à faces triangulaires, carrées et pentagonales,

$A = 120 \quad S = 60 \quad F = 62 \quad f_3 = 20 \quad f_4 = 30 \quad f_5 = 12$

Ce polyèdre peut être déduit du dodécaèdre et de l'icosaèdre réguliers.

11° *Décatétraèdre* à faces triangulaires et carrées,

$A = 24 \quad S = 12 \quad F = 14 \quad f_8 = 8 \quad f_4 = 6$

Ce polyèdre peut être déduit de l'hexaèdre et de l'octaèdre réguliers.

12° *Triacontadoèdre* à faces triangulaires et pentagonales,

$A = 60 \quad S = 30 \quad F = 32 \quad f_3 = 20 \quad f_5 = 12$

Ce polyèdre peut être déduit du dodécaèdre et de l'icosaèdre réguliers.

13° *Polyèdre* à bases égales et parallèles, et à faces latérales triangulaires.

Il existe une infinité de polyèdres semi-réguliers de cette espèce; pour des bases polygonales régulières de n côtés, on trouve :

$A = 4n \quad S = 2n \quad F = 2n+2 \quad f_3 = 2n \quad f_n = 2$

C. Polyèdres à angles pentaèdres.

14° *Triacontaoctaèdre* à faces triangulaires et carrées,

$A = 60 \quad S = 24 \quad F = 38 \quad f_3 = 32 \quad f_4 = 6$

Ce polyèdre peut être déduit de l'hexaèdre régulier.

15° *Ennécontadoèdre* à faces triangulaires et pentagonales,

$A = 150 \quad S = 60 \quad F = 92 \quad f_3 = 80 \quad f_5 = 12$

Ce polyèdre peut être déduit du dodécaèdre régulier.

Décomposition de la surface de la sphère en polygones réguliers et tels qu'en chaque sommet les angles soient égaux.

Il est évident qu'à chaque mode de décomposition de la surface de la sphère en polygones sphériques réguliers, correspond un polyèdre semi-régulier ayant pour sommets les sommets des polygones sphériques; d'autre part, les équations qui lient les éléments de la figure sphérique obtenue par une telle décomposition, sont les mêmes que celles obtenues précédemment; le nouveau problème admet le même nombre de solutions que le premier; il en résulte qu'à chaque polyèdre semi-régulier correspond un mode de décomposition de la sphère en polygones réguliers.

Propriétés générales des polyèdres semi-réguliers du premier genre.

I. — Tout polyèdre semi-régulier du premier genre est inscriptible.

Considérons en effet un polyèdre semi-régulier quelconque du premier genre et le polyèdre semi-régulier de même espèce obtenu par décomposition d'une sphère de rayon tel que les arêtes des deux polyèdres soient égales; ces deux polyèdres auront par suite leurs faces égales deux à deux et semblablement disposées, ils seront donc égaux d'après le théorème de Cauchy.

De la proposition précédente, on déduit les propriétés suivantes :

II. — Dans tout polyèdre semi-régulier du premier genre, les sommets adjacents à un sommet donné appartiennent à une circonférence dont ce sommet est le pôle.

III. — Les angles dièdres formés par des faces respectivement égales sont égaux.

La détermination de ces angles dièdres s'effectuera, d'ailleurs, par les formules de trigonométrie sphérique.

SECONDE PARTIE

POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS

DU SECOND GENRE

Définition. — Dans tout polyèdre semi-régulier du second genre, les faces sont des polygones égaux et les angles sont réguliers.

De cette définition résultent immédiatement les propriétés suivantes :

1° Dans tout polyèdre semi-régulier du second genre les angles dièdres sont égaux ;

2° Les angles polyèdres de même espèce sont égaux ;

3° Les faces sont triangulaires, quadrangulaires ou pentagonales.

Cette dernière proposition est une conséquence du théorème d'Euler ; on déduit en effet de ce théorème qu'il n'existe pas de polyèdre convexe dans lequel ne se trouvent ni faces triangulaires, ni faces quadrangulaires ou pentagonales.

Formules relatives aux polyèdres semi-réguliers du 2me genre.

En donnant à A, F, S la même signification que précédemment et désignant en outre par s_3, s_4, s_5 .... les nombres des angles trièdres, tétraèdres, pentaèdres .... du polyèdre et par T, Q, P .... les nombres des angles trièdres, tétraèdres, pentaèdres .... dont les sommets coïncident avec ceux d'une face du polyèdre, on voit facilement que les formules relatives aux polyèdres du 2e genre se déduisent des premières en permutant les lettres F et S, f et s, t et T, q et Q ...

Ces formules sont donc :

(1) $\quad A + 2 = F + S$

(2) $\quad S = s_3 + s_4 + s_5 + \ldots.$

(3) $\quad 2\,A = 3\,s_3 + 4\,s_4 + 5\,s_5 + \ldots.$

(4) $\quad 2\,A = 3\,F \quad 2\,A = 4\,F \quad 2\,A = 5\,F$

suivant que les faces sont triangulaires, quadrangulaires ou pentagonales; puis:

(5) $3\,s_3 = \text{T F} \quad 4\,s_4 = \text{Q F} \quad 5\,s_5 = \text{P F} \ldots.$

Ces formules donnent lieu à des remarques analogues à celles faites précédemment.

Détermination des combinaisons d'angles polyèdres réguliers qui peuvent correspondre à des polyèdres semi-réguliers.

En éliminant A, F et S, entre les équations (1) (2) (3) et (4), on obtient suivant que les faces sont triangulaires, quadrangulaires ou pentagonales, les relations suivantes:

$$3\,s_3 + 2\,s_4 + s_5 = 12 + s_7 + 2\,s_8 + \ldots.$$
$$s_3 = 8 + s_5 + 2\,s_6 + 3\,s_7 + \ldots.$$
$$s_3 = 20 + 2\,s_4 + 5\,s_5 + 8\,s_6 + \ldots.$$

On en conclut que dans tout polyèdre semi-régulier du second genre, à faces triangulaires, se trouvent nécessairement des angles trièdres, tétraèdres on pentaèdres, et 2° que dans tout polyèdre à faces quadrangulaires ou pentagonales se trouvent nécessairement des angles trièdres.

En remarquant que lorsqu'un polyèdre semi-régulier du second genre admet des angles polyèdres d'un nombre impair de faces, les deux angles polyèdres qui lui sont contigus dans une même face doivent être de même espèce, que les faces soient triangulaires ou quadrangulaires; d'autre part, en tenant compte de la limite supérieure de la valeur des faces d'un angle polyèdre régulier convexe de n faces $\left(\frac{4^d}{n}\right)$ et remarquant que la somme des faces des angles polyèdres combinés doit être deux, quatre ou six droits, suivant que les faces du polyèdre sont triangulaires, quadrangulaires ou pentagonales, on reconnaît que les seules combinaisons d'angles polyèdres possibles sont celles qui correspondent aux combinaisons de faces indiquées pour les polyèdres du premier genre.

Il ne peut donc exister d'autres polyèdres semi-réguliers du second genre que ceux dont les éléments se déduisent par permutation des lettres F. et S, f et s des éléments trouvés pour les polyèdres du premier genre.

Corrélation entre les polyèdres semi-réguliers du premier et du second genre.

Considérons un polyèdre semi-régulier quelconque du premier genre et la sphère circonscrite ; prenons par rapport à la sphère les pôles des faces du polyèdre; ces pôles sont les sommets d'un second polyèdre dont les faces sont tangentes à la sphère et qui est dit conjugué du premier ; les angles du second polyèdre sont évidemment réguliers, de même espèce que les faces correspondantes du premier et en même nombre ; quant à ses faces, elles sont toutes égales, de même espèce que les angles du premier polyèdre et en même nombre.

Le second polyèdre est donc un polyèdre semi-régulier du second genre.

Il existe par suite autant de polyèdres du second genre que de polyèdres du premier, et ils correspondent aux combinaisons d'angles indiqués antérieurement.

POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS DU SECOND GENRE

A. Polyèdres à faces triangulaires

1. *Dodécaèdre* à angles trièdres et hexaèdres,
$A = 18 \quad F = 12 \quad S = 8 \quad s_3 = 4 \quad s_6 = 4$
2. *Icotétraèdre* à angles trièdres et octaèdres,
$A = 36 \quad F = 24 \quad S = 14 \quad s_3 = 8 \quad s_8 = 6$
3. *Héxécontaèdre* à angles trièdres et decaèdres,
$A = 90 \quad F = 60 \quad S = 32 \quad s_3 = 20 \quad s_{10} = 12$
4. *Icotétraèdre* à angles tétraèdres et hexaèdres,
$A = 36 \quad F = 24 \quad S = 14 \quad s_4 = 6 \quad s_6 = 8$
5. *Tessaracontaoctaèdre* à angles tétraèdres, hexaèdres et octaèdres,
$A = 72 \quad F = 48 \quad S = 26 \quad s_4 = 12 \quad s_6 = 8 \quad s_8 = 6$
6. *Hécatonicoèdre* à angles tétraèdres, hexaèdres et décaèdres,

$A = 180 \quad F = 120 \quad S = 62 \quad s_4 = 30 \quad s_6 = 20 \quad s_{10} = 12$

7. *Héxécontaèdre* à angles pentaèdres et hexaèdres,

$A = 90 \quad F = 60 \quad S = 32 \quad s_5 = 12 \quad s_6 = 20$

8. *Double pyramide.*

Il existe une infinité de polyèdres semi-réguliers de cette espèce ; pour des angles polyèdres réguliers de n faces, on trouve :

$A = 3n \quad F = 2n \quad S = n + 2 \quad s_4 = n \quad s_n = 2$

B. **Polyèdres à faces quadrangulaires.**

9. *Icotétraèdre* à angles trièdres et tétraèdres,

$A = 48 \quad F = 24 \quad S = 26 \quad s_3 = 8 \quad s_4 = 18$

10. *Hexécontaèdre* à angles trièdres, tétraèdres et pentaèdres,

$A = 120 \quad F = 60 \quad S = 62 \quad s_3 = 20 \quad s_4 = 30 \quad s_5 = 12$

11. *Dodécaèdre* à angles trièdres et tétraèdres,

$A = 24 \quad F = 12 \quad S = 14 \quad s_3 = 8 \quad s_4 = 6$

12. *Triacontaèdre* à angles trièdres et pentaèdres,

$A = 60 \quad F = 30 \quad S = 32 \quad s_3 = 20 \quad s_5 = 12$

13. *Polyèdre* résultant de la pénétration de deux angles polyèdres réguliers égaux.

Il existe une infinité de polyèdres semi-réguliers de cette espèce ; pour des angles polyèdres réguliers de n faces, on a

$A = 4n \quad F = 2n \quad S = 2n + 2 \quad s_3 = 2n \quad s^n = 2$

C. **Polyèdres à faces pentagonales.**

14. *Icotétraèdre* à angles trièdres et tétraèdres,

$A = 60 \quad F = 24 \quad S = 38 \quad s_3 = 32 \quad s_4 = 6$

15. *Hexécontaèdre* à angles trièdres et pentaèdres,

$A = 150 \quad F = 60 \quad S = 92 \quad s_3 = 80 \quad s_5 = 12$

Propriétés générales des polyèdres semi-réguliers du second genre.

I. — Les polyèdres semi-réguliers du second genre sont circonscriptibles.

II. Les faces adjacentes à une face donnée sont tangentes à un cône de révolution dont le sommet est sur le diamètre perpendiculaire à la face donnée.

III. — Les arêtes communes à des angles polyèdres, respectivement égaux, sont égales.

Décomposition de la surface de la sphère en polygones égaux et tels qu'en chaque sommet les angles soient réguliers.

A tout polyèdre du second genre correspond un pareil mode de décomposition et réciproquement.

De même à chaque mode de décomposition en polygones réguliers, comme il a été dit précédemment, correspond un mode de division en polygones égaux qui sont circonscriptibles ; il suffit, pour obtenir cette seconde division, de joindre par des arcs de grands cercles, les centres des polygones qui ont un côté commun, et réciproquement.

TERRIER.