

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel  
**Herausgeber:** Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel  
**Band:** 10 (1873-1876)

**Artikel:** Détermination géométrique du volume compris entre deux plans parallèles et une surface réglée  
**Autor:** Terrier, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-88094>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DETERMINATION GÉOMÉTRIQUE

## DU VOLUME COMPRIS ENTRE DEUX PLANS PARALLÈLES ET UNE SURFACE RÉGLÉE

Tout volume limité par deux plans parallèles et une surface quelconque est représentée par l'intégrale :

$$\int_0^H \varphi(z) dz$$

$H$  désignant la distance des deux plans parallèles,  $\varphi(z)$  l'aire de la section déterminée dans le volume considéré par un plan parallèle aux plans limites, mené à une distance  $z$  de l'un d'eux, choisi pour plan coordonné.

Lorsque  $\varphi(z)$  est une fonction du 2<sup>e</sup> degré :  $Az^2 + A'z + A''$ , l'expression du volume se réduit à

$$\frac{H}{6} (B + b + 4B')$$

$B$  et  $b$  désignant les deux sections extrêmes,  $B'$  la section déterminée par un plan mené à égale distance des deux bases.

Cette formule s'applique lorsque la surface qui limite le volume considéré, entre les deux plans parallèles, est du second degré, et en général lorsque cette surface est réglée ; nous nous proposons, dans cette étude, de donner une démonstration élémentaire de la formule pour ce dernier cas.

Désignons, pour abréger, par section moyenne du tétraèdre qui a pour sommet le point S et pour base le triangle A,B,C, la section déterminée par un sommet C de la base et par la ligne A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, qui partage les deux arêtes SA, SB de la face opposée en parties égales.

LEMME. — Le volume d'un tétraèdre a pour mesure le produit de quatre fois une section moyenne par le tiers de la distance du sommet à cette section.

En effet, les deux pyramides SABC, SA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C (fig. 1) peuvent être considérées comme ayant pour sommet C et pour base les triangles SAB, SA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, situés dans un même plan ; l'aire du second triangle étant le quart de celle du premier, le volume du tétraèdre SABC est le quadruple du volume du tétraèdre SA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C, d'où résulte la proposition énoncée.

#### *Volume du tronc de pyramide.*

Considérons un tronc de pyramide ABCA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> (fig. 2) et la section MNP déterminée par un plan mené à égale distance des bases ; joignons le point P aux quatre points A, B, A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>. On peut considérer le tronc de pyramide comme formé par la réunion de trois pyramides ayant pour sommet le point P et pour bases :

La 1<sup>e</sup> la base inférieure A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> ou plus simplement B ;

La 2<sup>e</sup> la base supérieure ABC ou b ;

La 3<sup>e</sup> le trapèze ABA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>.

Si donc H est la hauteur du tronc de pyramide, les volumes du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>er</sup> tétraèdre seront

$$\frac{H}{6} B \quad \text{et} \quad \frac{H}{6} b$$

Pour évaluer le volume de la 3<sup>e</sup> pyramide, menons la diagonale A<sub>1</sub>B, qui coupe en L la ligne MN ; on peut considérer la pyramide PABA<sub>1</sub>B<sub>1</sub> comme formée des deux tétraèdres PBA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, PABA<sub>1</sub>.

D'après le lemme précédent, le volume du premier a pour expression

$$\frac{H}{6} (4. \overline{PLN})$$

le volume du 2<sup>e</sup>

$$\frac{H}{6} (4 \cdot \text{PLM})$$

La section PMN, que nous désignerons par B', étant la somme des triangles  $\overline{\text{PLM}}$ ,  $\overline{\text{PLN}}$ , il en résulte que le volume du tronc de pyramide a pour expression

$$\frac{H}{6} (B + b + 4B')$$

REMARQUE. — La démonstration précédente s'étend évidemment au cas où la face  $\overline{\text{ABA}_1\text{B}_1}$  est remplacée par deux faces triangulaires non situées dans un même plan, les lignes  $\overline{\text{AB}}$ ,  $\overline{\text{A}_1\text{B}_1}$  n'étant plus parallèles.

*Volume limité par deux polygones situés dans des plans parallèles et des faces latérales triangulaires.*

Soient  $\overline{\text{ABCD}} \dots$  ou  $B$   
 $\overline{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1} \dots$  ou  $b$

les polygones de base (fig. 3), et

$\overline{\text{AA}_1\text{B}_1}$ ,  $\overline{\text{AB}_1\text{B}}$ ,  $\overline{\text{BB}_1\text{C}_1}$ ,  $\overline{\text{BC}_1\text{C}}$  ....

les faces latérales triangulaires : considérons la section déterminée par un plan également distant des deux bases,  $\overline{\text{LMNPQ}} \dots$  ou  $B'$ ; prenons un point O quelconque à l'intérieur de cette section; le volume considéré peut être décomposé en pyramides ayant pour sommet commun le point O et pour bases les faces du polyèdre

$\overline{\text{ABCD}}$ ,  $\overline{\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1}$ ,  $\overline{\text{AA}_1\text{B}_1}$ ,  $\overline{\text{AB}_1\text{B}}$  etc.

Si donc H est la distance des deux plans parallèles, l'expression du volume de la première pyramide sera

$$\frac{H}{6} B$$

celle de la 2<sup>e</sup>

$$\frac{H}{6} b$$

D'après le lemme précédemment établi, les volumes des tétraèdres qui ont pour sommet le point O et pour bases les faces latérales  $\overline{\text{AA}_1\text{B}_1}$ ,  $\overline{\text{AB}_1\text{B}}$  ..., etc., seront

$$\frac{H}{6}(4.OLM) - \frac{H}{6}(4.OMN) \dots \dots \text{etc.}$$

leur somme sera donc exprimée par

$$\frac{H}{6} \cdot 4B'$$

$B'$  étant égal à la somme des triangles OLM, OMN, etc., par suite, l'expression du volume considéré est

$$\frac{H}{6}(B + b + 4B')$$

*Cas général.*

Les bases sont limitées par des courbes situées dans des plans parallèles, la surface latérale est une surface réglée.

Considérons des génératrices très-voisines  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ , etc., de la surface réglée; le volume limité par les polygones

$ABCD \dots$

$A_1B_1C_1D_1 \dots$

et les triangles

$AA_1B_1, ABB_1 \dots$

a pour mesure le produit du sixième de la hauteur par la somme de la base inférieure, de la base supérieure et de quatre fois la base moyenne. Lorsque le nombre des génératrices augmente indéfiniment, le volume tend évidemment vers le volume considéré, auquel s'applique par suite la formule

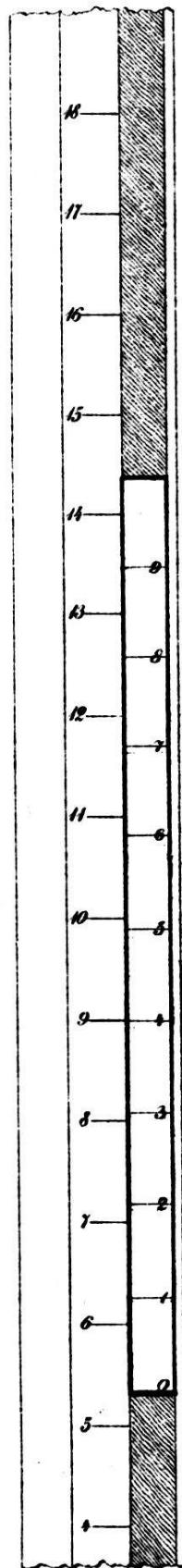
$$\frac{H}{6}(B + b + 4B')$$

$H$  désignant la hauteur,  $B, b$  les bases,  $B'$  la section par un plan mené à égale distance des bases.

REMARQUE. — Nous signalerons parmi les volumes que l'on peut déterminer à l'aide de cette formule, les volumes limités par deux polygones situés dans des plans parallèles et dont la surface latérale est engendrée par une ligne droite qui se meut en s'appuyant constamment sur les périmètres de ces polygones, volumes qui se rencontrent fréquemment dans les déblais et les remblais.

L. TERRIER.

# Vernier simple.



# Vernier de vernier.

