DÉTERMINATION GÉOMÉTRIQUE

DU VOLUME COMPRIS ENTRE DEUX PLANS PARALLÈLES

ET UNE SURFACE RÉGLÉE

Tout volume limité par deux plans parallèles et une surface quelconque est représentée par l'intégrale :

$$\int_0^H \varphi(z)\,dz$$

H désignant la distance des deux plans parallèles, $\varphi(z)$ l'aire de la section déterminée dans le volume considéré par un plan parallèle aux plans limites, mené à une distance z de l'un d'eux, choisi pour plan coordonné.

Lorsque $\varphi(z)$ est une fonction du 2e degré : $Az^2 + A'z + A''$, l'expression du volume se réduit à

$$\frac{H}{6}(B + b + 4B')$$

B et b désignant les deux sections extrêmes, B′ la section déterminée par un plan mené à égale distance des deux bases.

Cette formule s'applique lorsque la surface qui limite le volume considéré, entre les deux plans parallèles, est du second degré, et en général lorsque cette surface est réglée; nous nous proposons, dans cette étude, de donner une démonstration élémentaire de la formule pour ce dernier cas.

—

Désignons, pour abréger, par section moyenne du tétraèdre qui a pour sommet le point S et pour base le triangle A,B,C, la section déterminée par un sommet C de la base et par la ligne A_1B_1, qui partage les deux arètes SA, SB de la face opposée en parties égales.

Lemme. — Le volume d'un tétraèdre a pour mesure le produit de quatre fois une section moyenne par le tiers de la distance du sommet à cette section.

En effet, les deux pyramides SABC, SA_1B_1C (fig. 1) peuvent être considérées comme ayant pour sommet C et pour base les triangles SAB, SA_1B_1, situés dans un même plan; l'aire du second triangle étant le quart de celle du premier, le volume du tétraèdre SABC est le quadruple du volume du tétraèdre SA_1B_1C, d'où résulte la proposition énoncée.

—

Volume du tronc de pyramide.

Considérons un tronc de pyramide $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 2) et la section MNP déterminée par un plan mené à égale distance des bases; joignons le point P aux quatre points A, B, A_1, B_1. On peut considérer le tronc de pyramide comme formé par la réunion de trois pyramides ayant pour sommet le point P et pour bases :

La 1e la base inférieure $A_1B_1C_1$ ou plus simplement B ;

La 2e la base supérieure ABC ou *b;*

La 3e le trapèze ABA_1B_1.

Si donc H est la hauteur du tronc de pyramide, les volumes du 1er et du 2e tétraèdre seront

$$\frac{H}{6} B \qquad \text{et} \qquad \frac{H}{6} b$$

Pour évaluer le volume de la 3e pyramide, menons la diagonale A_1B, qui coupe en L la ligne MN; on peut considérer la pyramide $PABA_1B_1$ comme formée des deux tétraèdres PBA_1B_1, $PABA_1$.

D'après le lemme précédent, le volume du premier a pour expression

$$\frac{H}{6}(4.\overline{PLN})$$

le volume du 2e

$$\frac{H}{6}(4.\overline{PLM})$$

La section PMN, que nous désignerons par B′, étant la somme des triangles $\overline{PLM}$, $\overline{PLN}$, il en résulte que le volume du tronc de pyramide a pour expression

$$\frac{H}{6}(B + b + 4B')$$

Remarque. — La démonstration précédente s'étend évidemment au cas où la face ABA_1B_1 est remplacée par deux faces triangulaires non situées dans un même plan, les lignes AB, A_1B_1 n'étant plus parallèles.

—

Volume limité par deux polygones situés dans des plans parallèles et des faces latérales triangulaires.

Soient $ABCD\ldots.$ ou B
$A_1B_1C_1D_1\ldots.$ ou b

les polygones de base (fig. 3), et

AA_1B_1, ABB_1, BB_1C_1, $BCC_1\ldots..$

les faces latérales triangulaires: considérons la section déterminée par un plan également distant des deux bases, LMNPQ.... ou B′; prenons un point O quelconque à l'intérieur de cette section; le volume considéré peut être décomposé en pyramides ayant pour sommet commun le point O et pour bases les faces du polyèdre

$\overline{ABCD}$, $\overline{A_1B_1C_1D_1}$, $\overline{AA_1B_1}$, $\overline{ABB_1}$ etc.

Si donc H est la distance des deux plans parallèles, l'expression du volume de la première pyramide sera

$$\frac{H}{6}B$$

celle de la 2e

$$\frac{H}{6}b$$

D'après le lemme précédemment établi, les volumes des tétraèdres qui ont pour sommet le point O et pour bases les faces latérales AA_1B_1 ABB_1.... etc., seront

$$\frac{H}{6}(4.\overline{OLM})\quad \frac{H}{6}(4.\overline{OMN})\ \ldots\ldots \text{etc.}$$

leur somme sera donc exprimée par

$$\frac{H}{6}.4B'$$

B′ étant égal à la somme des triangles OLM, OMN, etc., par suite, l'expression du volume considéré est

$$\frac{H}{6}(B + b + 4B')$$

—

Cas général.

Les bases sont limitées par des courbes situées dans des plans parallèles, la surface latérale est une surface réglée.

Considérons des génératrices très-voisines AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, etc., de la surface réglée; le volume limité par les polygones

$ABCD \ldots$

$A_1B_1C_1D_1 \ldots$

et les triangles AA_1B_1, $ABB_1 \ldots$

a pour mesure le produit du sixième de la hauteur par la somme de la base inférieure, de la base supérieure et de quatre fois la base moyenne. Lorsque le nombre des génératrices augmente indéfiniment, le volume tend évidemment vers le volume considéré, auquel s'applique par suite la formule

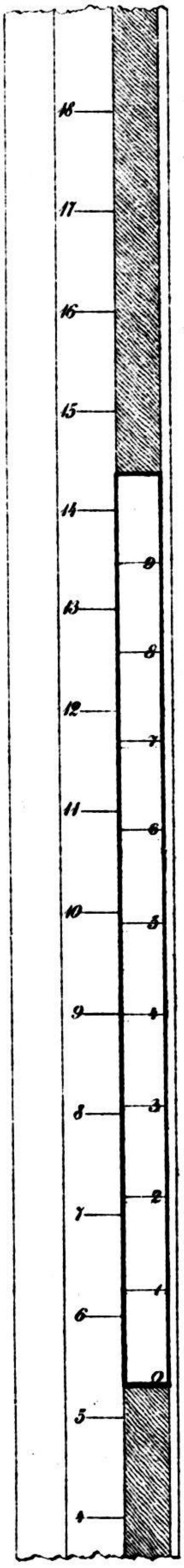
$$\frac{H}{6}(B + b + 4B')$$

H désignant la hauteur, B, b les bases, B′ la section par un plan mené à égale distance des bases.

Remarque. — Nous signalerons parmi les volumes que l'on peut déterminer à l'aide de cette formule, les volumes limités par deux polygones situés dans des plans parallèles et dont la surface latérale est engendrée par une ligne droite qui se meut en s'appuyant constamment sur les périmètres de ces polygones, volumes qui se rencontrent fréquemment dans les déblais et les remblais.

L. Terrier.

Vernier simple.



Vernier de vernier.

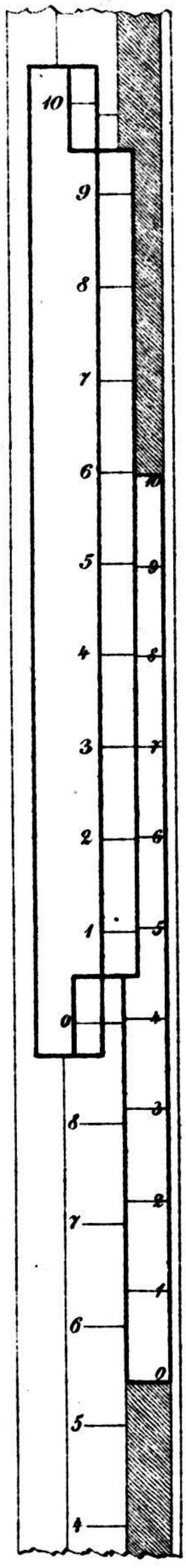


fig: 1.

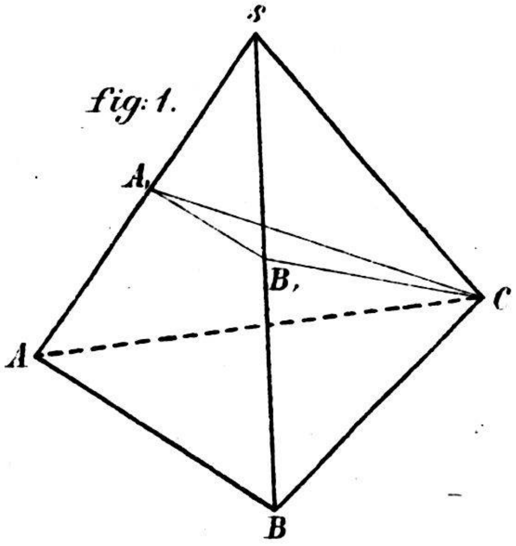


fig: 2.

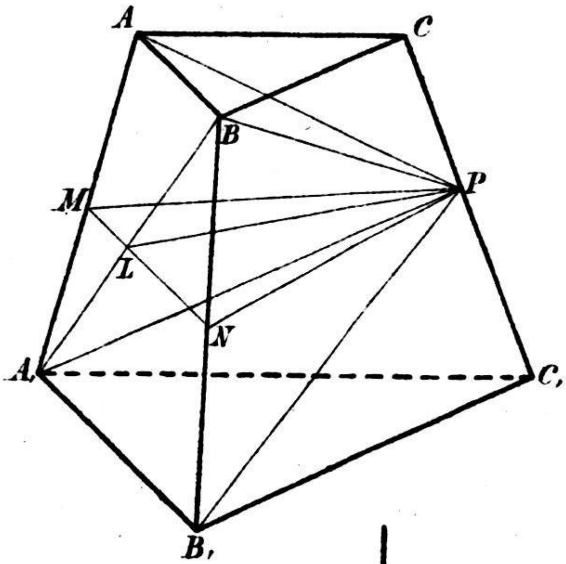
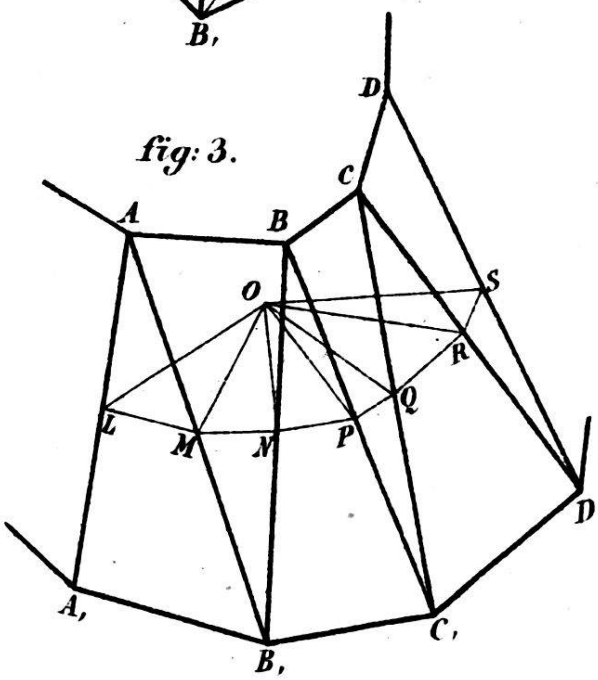


fig: 3.



Lith. H. Furrer, Neuchâtel.