Zeitschrift: Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel
Herausgeber: Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel
Band: 9 (1870-1873)

Artikel: Etude sur les engrenages d'horlogerie
Autor: Isely
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88076

ETUDE

SUR LES

ENGRENAGES D'HORLOGERIE

Par M. ISELY, professeur.

I.

Lorsqu'on trace un engrenage destiné à transmettre un travail mécanique de quelque importance, on suppose toujours qu'il y a deux paires de dents en contact, et que la normale commune aux profils des dents qui se touchent au commencement et à la fin de la menée, fait avec la ligne des centres un angle d'au moins 80°. Il en résulte qu'il est facile de déterminer la hauteur des dents, et par suite le rayon total de la roue. On trouve aussi que pour que les deux conditions ci-dessus soit remplies, une roue ne doit pas avoir moins de 36 dents.

Il n'en est pas de même en horlogerie. Dans le rouage qui s'étend du barillet à la roue d'échappement, les roues conduisent les pignons, et ceux-ci ont 6, 7, 8, 10, 12 ailes au plus. Pour que la menée puisse s'effectuer aussi loin que possible au-delà de la ligne des centres, on conserve toute l'ogive jusqu'à la pointe de la dent. Malgré cela, si ce n'est pour les pignons de 10 et de 12 ailes, la menée au-delà de la ligne des centres n'est pas suffisante, et elle doit commencer plus ou moins avant cette ligne, occasionnant ainsi un frottement à angle rentrant plus nuisible que celui qui a lieu au-delà.

Quand on veut tracer l'engrenage d'une roue et d'un pignon, on suppose ordinairement que la courbe théorique ou épicycloïde est employée pour former les profils des dents de la roue ou l'ogive qui dépasse le cercle primitif. Les centres du pignon et de la roue étant marqués, on divise leur distance en deux parties proportionnelles aux nombres des ailes et des dents, et avec ces parties on décrit les circonférences primitives du pignon et de la roue. Mais pour avoir le rayon total de la roue, il faut ajouter à son rayon primitif la hauteur de l'ogive, et pour obtenir le rayon total du pignon, on doit augmenter son rayon primitif de la hauteur de l'arrondi. Le rapport des deux rayons complets de la roue et du pignon n'est plus alors le même que celui de leurs rayons primitifs, il devient plus petit, et pour le déterminer un peu exactement, il faut chercher la hauteur de l'ogive de la dent.

Le présent travail a précisément pour but de trouver le rapport des rayons complets des roues et des pignons, après avoir calculé l'excédant produit par les ogives des dents et les arrondis des pignons. En même temps j'ai trouvé l'angle de menée au-delà de la ligne des centres pour chaque espèce de pignons et pour les principaux rapports ordinairement employés en horlogerie, 1 à $7^1/_2$, 1 à 8, 1 à 10. Il m'a semblé qu'il y avait de l'utilité à effectuer ces calculs, tant pour l'usage de l'horlogerie que pour faciliter le dessin d'un rouage.

En fait de calculs de ce genre, je ne connais rien qu'une brochure, publiée en 1867, à la Chaux-de-Fonds, par M. C.-E. Jacot, et intitulée: « *Etude pratique des engrenages.* » Un petit tableau y donne les rapports des diamètres totaux des pignons et ceux des roues pour les pignons de divers nombres engrenant avec une roue ayant six fois autant de dents. Mais la brochure ne dit pas comment ces résultats ont été obtenus — probablement par un moyen graphique — et les arrondis des pignons sont calculés avec la valeur de $\pi = 3$. On ne peut donc pas s'assurer de la vérité des résultats donnés, puisqu'il n'y a pas de méthode de calcul indiquée, et le rapport de 6 à 1, entre la roue et le pignon, n'est guère usité en horlogerie. L'auteur dit aussi qu'il a remplacé l'épicycloïde par son cercle générateur dont la courbure lui a paru être la plus convenable, dès le moment qu'on est obligé de remplacer la courbe théorique par un cercle. Cependant quelle que soit l'exactitude des résultats indiqués dans sa brochure, M. Jacot a ramené l'attention sur les questions relatives au rouage et rendu un véritable service à l'horlogerie en cherchant à améliorer cette partie de la montre, et en parvenant à exécuter une forme de denture plus convenable que précédemment.

Bien que les praticiens assurent qu'il est très difficile de tailler les dents en forme d'épicycloïde, c'est cependant en adoptant ce profil théorique que j'ai effectué tous mes calculs. De cette façon, mes résultats sont ceux d'après lesquels une pratique judicieuse et éclairée, travaillant autant que possible suivant la théorie, devra se guider. En adoptant, au contraire, des profils en arcs de cercle, je n'aurais pas eu de base sûre pour établir mes formules.

II.

La théorie nous apprend que pour conduire un pignon de manière que la menée ait lieu comme si les circonférences primitives se transmettaient le mouvement par simple contact, le profil des dents de la roue doit être formé par une épicycloïde engendrée par une circonférence dont le diamètre est égal au rayon du pignon.

La hauteur de l'ogive de la dent au-dessus du cercle primitif est ainsi déterminée par l'intersection de l'épicycloïde avec le rayon prolongé qui passe pas le milieu de l'épaisseur d'une dent.

Soit I le centre du cercle générateur dont le diamètre est AC, rayon du pignon. En faisant rouler sans glissement ce cercle sur la circonférence primitive de la roue, le point de contact A engendre l'épicycloïde AA'E, qui coupe en A' le rayon OBA' passant par le milieu B de la dent.

Le plein de la dent étant égal au vide, AB est le quart du pas. Lorsque le point A est arrivé en A', le cercle I est parvenu en I', et il a roulé sur le cercle primitif de la roue de l'angle AOM', de sorte que arc AM' = arc A'M'.

Si n désigne le rapport des rayons de la roue et du cercle générateur, on voit facilement que l'angle M'I'A' vaut n fois l'angle AOM'. Par exemple, avec le pignon de 6 et la roue de 60, le rayon de la roue vaut 20 fois celui du cercle générateur de l'épicycloïde, de sorte que celui-ci tourne de 20° autour de son centre en même temps qu'il roule de 1° sur la circonférence de la roue.

L'analyse géométrique nous fait connaître l'équation de l'épicycloïde en coordonnées rectangulaires.

$$\text{Soit angle } AOM' = \theta,$$

$$\text{angle } A'I'M' = n\theta,$$

$$A'P = y,\ OP = x,\ OA' = \rho \text{ et } IA = 1,$$

$$\text{on a: } x = (n+1)\cos.\theta - \cos.(n+1)\theta,$$

$$y = (n+1)\sin.\theta - \sin.(n+1)\theta,$$

$$\text{et } \rho^2 = (n+1)^2 + 1 - 2(n+1)\cos.n\theta.$$

L'angle θ, dont le cercle I doit rouler sur la circonférence primitive de la roue pour que le point A atteigne le rayon OBA', est inconnu; mais on connaît l'angle AOB $= \alpha$, qui est le quart du pas. Il faudrait donc éliminer θ de ces équations, pour trouver une équation entre ρ et α, c'est-à-dire l'équation polaire de la courbe. Cette élimination conduit à une équation si compliquée que j'y ai renoncé pour adopter le mode de calcul suivant :

Le triangle POA' donne : $y = \rho \sin.\alpha$,

$$\frac{y}{\rho} = \rho \sin.\alpha,$$

$$\text{et } \frac{(n+1)\sin.\theta - \sin.(n+1)\theta}{\sqrt{(n+1)^2 + 1 - 2(n+1)\cos.n\theta}} = \sin.\alpha.$$

Sin. α est donné, de même que n, de sorte qu'il reste à chercher θ par la méthode d'approximation. En même temps, la valeur de θ qui convient à l'équation, fournit celle du dénominateur ou de $\rho = OA'$, qui y correspond.

Pour éclaircir mon explication, je vais l'appliquer à un exemple.

Supposons un pignon de 6 et une roue de 48. Le rayon primitif de la roue vaut donc huit fois celui du pignon ou 16 fois celui du cercle générateur. Ainsi $n = 16$.

La roue ayant 48 dents, le pas embrasse sur sa circonférence un arc de $\frac{360°}{48} = 7°30'$, et la demi-épaisseur de la dent un angle $AOB = \frac{7°30'}{4} = 1°\,52'\,30''$.

Formule à résoudre :

$$\frac{17 \sin. \theta - \sin. 17\,\theta}{\sqrt{290 - 34 \cos. 16\,\theta}} = \sin. 1°\,52'\,30'' = 0{,}03272.$$

Les calculs d'approximation donnent : $\theta = 5°\,14'\,36''$.

Il faut donc que le cercle générateur roule d'un angle $AOM' = 5°\,14'36''$ sur le cercle primitif de la roue, pour que le point A' de l'épicycloïde rencontre le rayon OBA', sur lequel doit être la pointe de la dent.

En même temps le calcul donne :

$$\rho = OA' = \sqrt{290 - 34 \cos. 16\,\theta} = 16{,}922,$$

c'est-à-dire que le rayon total de la roue jusqu'à la pointe de l'ogive, comparé au rayon du cercle générateur pris comme unité, est : 16,922,

ou, comparé au rayon du pignon, 8,461.

On a donc :

Rayon primitif du pignon	= 1,
Rayon total de la roue	= 8,461,
Rayon du cercle primitif	= 8,
Hauteur de l'ogive	= 0,461.

Si on compare le diamètre total de la roue à son diamètre primitif pris pour unité, on obtient : $\frac{8{,}461}{8} = 1{,}058$.

En examinant la figure et le jeu de l'engrenage, on voit de plus que la dent de la roue peut conduire effectivement l'aile du pignon jusqu'à ce que la pointe de la dent soit parvenue en A″ sur le cercle générateur. Il en résulte que l'angle ACA″ est l'angle de conduite de la roue depuis la ligne des centres; or $ACA'' = \frac{1}{2}\ AIA'' = \frac{n\theta}{2}$.

Dans notre exemple, $\theta = 5°14'36''$; $n = 16$; donc $ACA'' = 8 \times 5°14'36'' = 41°56'48''$.

On voit donc que le pignon de 6 peut être conduit par la roue de 48 pendant 42° environ après la ligne des centres. Mais le pas du pignon = 60°, c'est-à-dire qu'il faudrait que la conduite de la roue fût de 60°, pour qu'il n'y eût pas de frottement rentrant, et comme elle n'est que de 42°, il manque 18°, qui doivent être pris avant la ligne des centres. L'aile du pignon étant le $^1/_3$ du pas = 20°, il en résulterait que la dent entrant en prise 18° avant la ligne des centres, la menée commencerait aux $^{18}/_{20}$ ou aux $^9/_{10}$ de l'aile.

Calcul de l'arrondi du pignon.

Le pignon ayant 6 ailes, son pas est la sixième partie de la circonférence, et comme il a $^1/_3$ de plein et $^2/_3$ de vide, l'aile occupe la dix-huitième partie de la circonférence.

L'arrondi du pignon est une demi-circonférence, qui se décrit depuis le milieu de l'arc compris par l'aile, avec un rayon égal à la corde de la demi-aile ou la corde de $^1/_{36}$; elle est très peu différente de l'arc par lequel on peut la remplacer.

Le rayon du pignon étant 1, la hauteur de l'arrondi $\frac{2\pi}{36} = 0{,}174$, le rayon total du pignon = 1,174.

Rapport entre le rayon total de la roue et celui du pignon $= \frac{8{,}461}{1{,}174} = 7{,}20$.

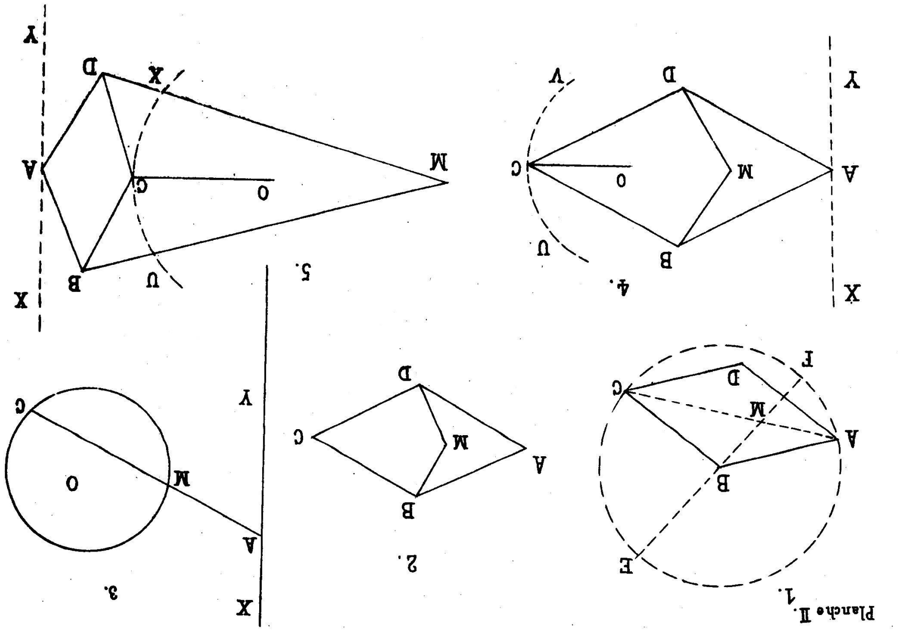
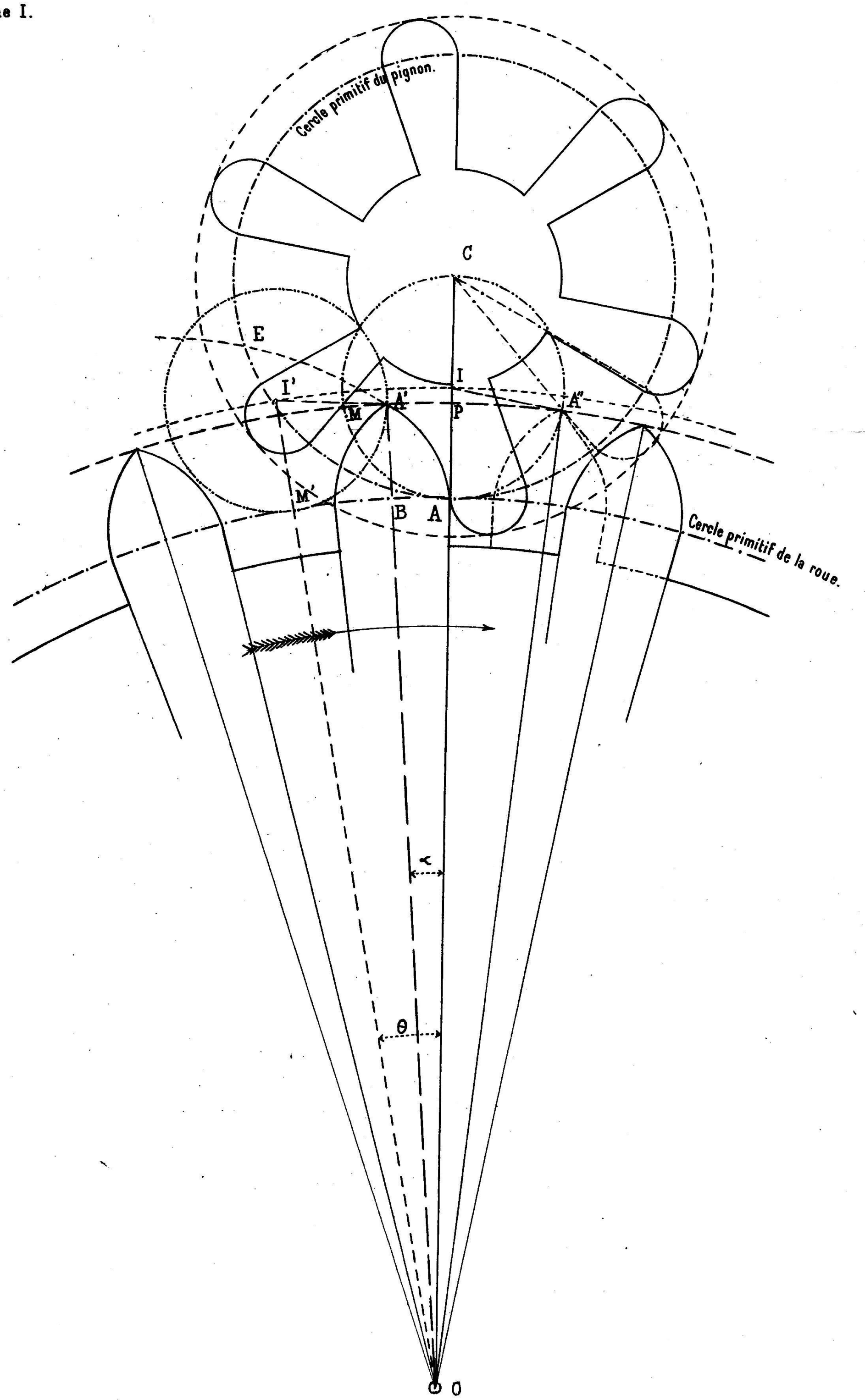


Planche II.
1.
2.
3.
4.
5.

Planche I.


Cercle primitif du pignon.
Cercle primitif de la roue.

C'est d'après cette méthode que j'ai répété les mêmes calculs pour chaque espèce de pignons engrenant avec une roue, suivant les principaux rapports employés dans l'horlogerie, lesquels sont : 1 à 7 $^1/_2$, 1 à 8 et 1 à 10, par exemple :

Pignon de	10,	Roue de	75,
»	10,	»	80,
»	10,	»	100.

Les résultats sont consignés dans le tableau n° 1, sur lequel nous devons donner encore quelques éclaircissements.

Pour les roues, le plein des dents est supposé égal au vide. Dans les pignons de 6, 7, 8 et 10 ailes, j'ai admis $^1/_3$ de plein et $^2/_3$ de vide, c'est-à-dire que l'épaisseur de l'aile occupe le $^1/_3$ du pas ou de l'intervalle de deux ailes. Dans le pignon de 12, il y a $^2/_5$ de plein et $^3/_5$ de vide.

Le rayon primitif du pignon est pris pour unité.

Les deux premières colonnes indiquent les nombres d'ailes et de dents du pignon et de la roue. La troisième donne le rayon total de la roue jusqu'à la pointe des dents. La quatrième contient la hauteur de l'ogive. La cinquième donne le diamètre total de la roue, comparé à celui de son cercle primitif pris pour unité. La sixième contient le rayon total du pignon, rapporté à celui de son cercle primitif. La septième exprime les rapports entre les diamètres complets des roues et des pignons. La huitième indique l'arc de conduite de la roue depuis la ligne des centres, et la neuvième la menée nécessaire et suffisante que la roue devrait avoir pour que l'engrenage n'ait lieu qu'à frottement sortant.

L'examen de ces deux dernières colonnes montre que le pignon de 12 est le seul qui puisse être conduit suffisamment loin. Sa menée est de 32° $^1/_2$ environ, et comme elle exige seulement 30°, il y a 2° $^1/_2$ de surplus. Au pignon de 10, il manque à peu près 1° pour que la menée soit suffisante après la ligne des centres. Pour les autres pignons, les déficits, marqués dans la dixième colonne, sont de 7°, 12°, 18°. Ces différences indiquent en même temps combien la menée doit commencer avant la ligne des centres, pour les pignons de 6, 7, 8 et 10. Quant à celui de 12, où la menée au-delà du centre est plus que suffisante, nous avons laissé la colonne en blanc.

La colonne 7 donne les rapports entre les diamètres complets des roues et des pignons, munis de leurs ogives et de leurs arrondis. Si on compare ces résultats avec ceux que l'on obtient par le calibre à pignon, on trouve que celui-ci conduit à des rapports trop faibles, c'est-à-dire qu'il fait construire des roues trop petites ou des pignons trop gros.

Pour obtenir des résultats plus rapprochés des vrais rapports, il faudrait que le calibre fût gradué, de sorte que le n° 1, au lieu de correspondre à la deuxième division, c'est-à-dire de valoir deux divisions, embrassât seulement $1\,{}^{3}/_{4}$ division.

Par exemple, pour faire un pignon de 8, engrenant avec une roue de 64, on ouvre le compas de manière que la roue arrive au n° 64 ou à la 65^{me} division (en tenant compte de la manière de numéroter), tandis que le pignon doit se placer au n° 8 ou à la 9^{me} division. Le rapport des diamètres est donc $\frac{65}{9} = 7{,}22$, au lieu de 7,42, qui est donné dans le tableau.

J'ai constaté que cette différence existait pour tous les pignons et pour tous les rapports, mais qu'elle était d'autant plus faible que le pignon était plus nombré.

Si le n° 1 du calibre était éloigné du sommet de $1\,{}^{3}/_{4}$ division, le rapport donné par le calibre pour l'exemple ci-dessus serait $\frac{64\,{}^{3}/_{4}}{8\,{}^{3}/_{4}} = \frac{2{,}59}{35} = 7{,}4$, et se rapprocherait beaucoup plus du véritable. Il en serait de même pour les autres pignons et pour les autres rapports.

Dans un tableau n° 2, j'ai indiqué les grandeurs des roues et des pignons de la minuterie. Ici, ce sont les pignons qui conduisent les roues, et leurs ailes portent des ogives, de sorte qu'elles prennent la forme dite *en grain d'orge*, tandis que les dents de la roue sont terminées par des arrondis.

J'ai fait le calcul pour deux cas différents : celui où le plein de l'aile est égal au vide, et celui où il est seulement les $^2/_5$ du pas. Mais je n'ai pu indiquer la grandeur totale de la roue munie de ses arrondis, ni son rapport avec le pignon, parce que je n'avais pas de données pour savoir si le plein de la dent est égal au vide, ou quelle fraction il en est. Le tableau indique donc seulement la grandeur totale du pignon pourvu de son ogive, et la menée effective qu'il peut produire depuis la ligne des centres.

TABLEAU I

Indiquant les rayons complets des roues dentées et des pignons, avec la denture.

	Ailes du pignon. — Pignon de	Dents de la roue. — Roue de	Rayon total de la roue.	Hauteur de l'ogive.	Diamètre total de la roue ; celui de son cercle primitif = 1.	Diamètre total du pignon ; celui de son cercle primitif = 1.	Rapport des diamètres complets de la roue et du pignon.	Arc de conduite de la roue depuis la ligne des centres.	Pas du pignon et son épaisseur.	Différence.
1. Rapport de 1 à 6 2/3	12	80	6,967	0,300	1,045	1,105	6,30	32°—13′	pas 30° épaisseur — 12°	
2. Rapport de 1 à 7 1/2 c'est celui des cercles primitifs.	6	45	7,961	0,461	1,062	1,174	6,78	41°52′	pas 60° épaisseur 1/3 = 20°	18°8′
	8	60	7,887	0,387	1,052	1,131	6,97	37°37′	pas 45° épaisseur 1/3 = 15°	7°23′
	10	75	7,837	0,337	1,045	1,105	7,09	34°37 1/2′	pas 36° épaisseur 1/3 = 12°	1°23′
	12	90	7,802	0,302	1,040	1,105	7,06	32°23′	pas 30° épaisseur 2/5 = 12°	
3. Rapport de 1 à 8.	6	48	8,461	0,461	1,058	1,174	7,20	41°57′	pas 60° épaisseur = 20°	18°3′
	7	56	8,421	0,421	1,053	1,150	7,32	39°36′	pas 51°-25′ épaisseur = 17°-8′	11°49′
	8	64	8,389	0,389	1,049	1,131	7,42	37°44′	pas 45° épaisseur = 15°	7°16′
	10	80	8,339	0,339	1,042	1,105	7,55	34°48′	pas 36° épaisseur = 12°	1°12′
	12	96	8,302	8,302	1,038	1,105	7,51	32°32′	pas 30° épaisseur = 12°	
4. Rapport de 1 à 10.	6	60	10,462	0,462	1,046	1,174	8,91	42°10′	pas 60° épaisseur = 20°	17°50′
	7	70	10,422	0,422	1,042	1,150	9,06	39°55′	pas 51°-25′ épaisseur = 17°-8′	11°30′
	8	80	10,391	0,391	1,039	1,131	9,19	38°	pas 45° épaisseur = 15°	7°
	10	100	10,340	0,340	1,034	1,105	9,36	35°	pas 36° épaisseur = 12°	1°
	12	120	10,304	0,304	1,031	1,105	9,32	32°—50′	pas 30° épaisseur = 12°	

TABLEAU II

Pignons et roues de la minuterie.

Les pleins des pignons et des roues sont égaux aux vides.

	Pignons — Ailes.	Roues. — Dents.	Rayon total du pignon. — Le rayon primitif est l'unité.	Hauteur de l'ogive.	Menée du pignon ou degrés dont il peut faire tourner la roue.	Pas de la roue ou menée nécessaire.
Le rayon de la circonférence primitive du pignon est l'unité. Rapport de 1 à 3.	6	18				
	7	21				
	8	24	1,374	0,374	14° 5′	15°
	10	30	1,318	0.318	12° 50′	12°
	12	36	1,280	0,280	11° 54′	10°
Rapport de 1 à 4.	6	24				
	7	28				
	8	32	1,380	0,380	11° 10′	11° 15′
	10	40	1,323	0,323	10° 11′	9°
	12	48	1,284	0,284	9° 27′	7° 30′
Les pleins des pignons étant les 2/5 du pas. 1° Rapport de 1 à 3,	6	18				
	7	21				
	8	24	1,318	0,318	12° 50′	15°
	10	30	1,272	0,272	11° 43′	12°
	12	36	1,238	0,238	10° 54′	10°
2° Rapport de 1 à 4.	6	24	1,396	0,396	11 1/2	15°
	7	28				
	8	32	1,324	0,324	10° 11′	11° 15′
	10	40	1,274	0,274	9° 17′	9°
	12	48	1,242	0,242	8° 40′	7° 30′

Séance du 6 mars 1873.

Présidence de M. Louis Coulon.

M. *Isely* fait quelques remarques sur la brochure de M. C.-E. Jacot relative aux engrenages. Depuis la dernière séance, il a examiné le travail de cet intelligent horloger, dont la préoccupation a été de chercher une forme pratique de denture aussi rapprochée que possible de la forme théorique. Il regrette seulement que l'auteur n'ait pas indiqué comment il a trouvé les résultats de son tableau, et, d'après quelques renseignements qui lui ont été donnés, il pense que c'est par un procédé graphique.

Pour ce qui concerne le remplacement satisfaisant de l'épicycloïde par un arc de cercle, cela lui semble assez difficile, car, en calculant quelques rayons de courbure de la première depuis sa naissance jusqu'à la pointe de l'ogive, on trouve que ce rayon varie de 0 à 2,52, celui du cercle générateur étant 1; de plus, le profil de l'ogive devant se raccorder avec le flanc de la dent, le centre du cercle ogive doit être placé sur la tangente au point de raccordement.

M. *Lindemann* prend la parole sur le même sujet:

L'emploi de pignons peu nombrés dans les derniers mobiles de la montre fait commencer la menée bien avant la ligne des centres et rend la transmission de la force très inégale en raison de l'imperfection des dentures de la roue.

Pour produire une menée plus uniforme et commençant plus près de la ligne des centres, Lépine imagina la forme en dent de loup ; cette innovation combinée avec son nouvel échappement à cylindre et l'emploi des ponts pour remplacer la petite platine, produisit une montre de forme tout à fait neuve.

Cependant à mesure que les outils se perfectionnèrent, on put exécuter des pignons plus nombrés. M. Othenin Girard fit des pignons très nombrés à flancs creux qui ne furent pas accueillis favorablement par le commerce, attendu qu'il était difficile de les remplacer.

Pour enseigner la théorie de l'engrenage, il faut sans doute raisonner avec la courbe théorique ; dans la pratique, on est obligé de l'abandonner à cause des difficultés de la réaliser, les outils à tailler les fraises ne pouvant produire que la forme circulaire, mais à condition de s'en rapprocher le plus possible. C'est ce qu'a cherché M. C.-E. Jacot et ce qu'il a cru trouver dans la courbure du cercle générateur. M. Lindemann expose le tableau colorié de cet auteur, publié avec sa brochure en 1866, pour démontrer le jeu de l'engrenage d'une roue avec les diverses espèces de pignons de 6, 7, 8, 10 et 12 ailes, dans la supposition que la roue a 6 fois plus de dents. Pour rendre sa démonstration plus complète, M. Jacot a construit des modèles en métal avec lesquels on peut se rendre compte du fonctionnement d'un engrenage exécuté d'après ses principes. Outre ces modèles, M. Lindemann montre encore et explique le compas de proportion ainsi que plusieurs règles importantes dans la pratique de l'horlogerie, d'après Preud'homme. La description de ces appareils se trouve dans un petit volume publié par ce dernier auteur en 1780, et intitulé *Considérations pratiques sur les engrenages d'horlogerie*, Genève.

M. *Desor* annonce qu'une commission scientifique du club alpin s'occupe de faire un catalogue des glaciers. Un chapitre spécial sera ouvert à chacun d'eux, dans lequel seront relatées toutes les observations qui le concernent. M. Siegfried, caissier de la Société helvétique des sciences naturelles, est chargé de la tenue de ce registre qui est déposé à Zurich à la disposition de ceux qui voudront le consulter ou l'augmenter par de nouvelles informations. Il s'agit maintenant de publier un canevas de ce grand travail, et à cette occasion s'est posée la question de la classification des glaciers. Des vues très divergentes se sont produites à cet égard. Faut-il tenir compte dans cette classification de l'orographie ou de l'hydrographie, c'est-à-dire diviser les glaciers d'après les massifs auxquels ils appartiennent ou d'après les bassins où ils déversent leurs eaux. Au premier abord, et pour autant qu'on ne considère que les rapports des glaciers avec la météorologie, la classification hydrographique paraît la plus simple. Mais d'un autre côté elle a le grand inconvénient de séparer ce qui dans la nature est intimément lié. Un massif de glaciers est un tout, comme le serait un amas de lave ou un lambeau de terrain quelconque. M. Desor pencherait pour la division d'après les massifs, mais il aimerait entendre quelques avis.

M. *Hirsch*, se plaçant au point de vue de la physique du globe, pense que le caractère important des glaciers est déterminé par le rôle qu'ils jouent dans l'alimentation hydrographique et qu'il faut les diviser d'après les bassins du Rhône, du Pô, du Rhin ou du Danube. On pourrait ensuite les subdiviser en tenant compte des circonstances orographiques.

M. *Coulon* pense que la division par massifs serait plus facile et plus naturelle.

M. *Hirsch* fait la communication suivante sur les

RÉSULTATS RÉCENTS

DU

NIVELLEMENT DE PRÉCISION EN SUISSE

Dans une séance de l'année dernière, j'ai eu l'honneur d'entretenir la Société des résultats du nivellement de précision dans les Alpes, et de constater que le grand polygone que nous y avons fait mesurer, en passant par le Gotthard et le Simplon, montrait l'erreur de clôture considérable de $1^{m},2$. L'étude de la question m'avait amené à la conclusion que cette erreur de clôture ne devait pas être nécessairement attribuée à une faute d'opération, mais qu'elle pouvait être la conséquence des perturbations que les déviations de la verticale dans les montagnes doivent exercer sur les nivellements. Bien qu'en attribuant à l'intensité de ces déviations des valeurs parfaitement admissibles, je parvins à démontrer que les erreurs qui en doivent résulter pour le nivellement dans les Alpes, sont de l'ordre de celle que nous avions trouvée dans notre polygone, nos connaissances actuelles de ces déviations ne suffisent pas pour montrer que l'attraction des chaînes du Gotthard et du Simplon doivent en réalité produire exactement cette erreur de $1^{m},2$; et il restait toujours la possibilité qu'une partie plus ou moins considérable de cette erreur fût due à des fautes commises par les ingénieurs dans leurs opérations.

D'un autre côté, du moment qu'on reconnaissait dans l'attraction des montagnes une cause de perturbations sensibles sur les nivellements, on ne pouvait plus trouver dans l'arrangement polygonal des lignes de nivellement dans les Alpes un contrôle suffisant pour leur exactitude, et il fallait nécessairement avoir recours, dans ce but, au double nivellement des mêmes lignes.

Aussi la commission géodésique, adoptant mes conclusions, a-t-elle décidé de refaire d'abord toute la ligne du Gotthard entre Lucerne et Locarno. Cette opération a été exécutée par M. l'ingénieur Spahn dans le courant de l'été dernier ; et la réduction de ces observations ayant été faite pendant l'hiver à Genève et ici, nous avons pu, M. Plantamour et moi, établir dernièrement les tableaux comparatifs des deux opérations.

Les résultats de cette confrontation sont instructifs à plusieurs égards; car ils indiquent la précision que comporte la méthode du nivellement géométrique, lorsqu'elle est employée, comme nous l'avons fait ici pour la première fois, à mesurer des différences de niveau de 2000 mètres.

En effet, dans les nivellements de la plaine ou de pays peu accidentés, l'incertitude provient essentiellement de l'imperfection de l'instrument, des erreurs d'observation proprement dites et peut-être des irrégularités de réfraction; tandis que, lorsqu'il s'agit d'opérations dans les hautes montagnes, l'élément d'erreur qui, dans l'autre cas, est peu important, devient prédominant, savoir l'incertitude sur la véritable longueur des mires et leur variabilité avec les circonstances atmosphériques. Car évidemment cette incertitude, si petite qu'elle soit pour un mètre de la mire, se multiplie par le nombre de mètres contenus dans les différences de niveau qu'elle a servi à mesurer. Il importe donc de constater par l'expérience jusqu'à quel point cette inévitable source d'erreurs compromet la précision des nivellements géométriques dans les montagnes, si on la réduit, autant que possible, comme nous l'avons fait, par une étude scrupuleuse des mires et de leur variabilité. Or la comparaison des résultats de deux nivellements du Gotthard exécutés *avec deux mires différentes*, à trois ans de distance, par des ingénieurs différents, doit certainement donner des renseignements précieux à cet égard.

Avant d'entrer dans quelques détails, je dirai tout d'abord qu'en transmettant dernièrement nos résultats à l'ingénieur en chef du chemin de fer du Gotthard, j'ai eu la satisfaction de constater qu'il nous a été possible de déterminer la différence de niveau entre Lucerne et Locarno, c'est-à-dire de deux points distants de 200 kil. et séparés par un col de 1900^{m}, *avec une incertitude de* 3 *centimètres*, et la différence de niveau entre Gœschenen et Airolo, extrémités du grand tunnel, avec *une incertitude de* 12 *millimètres seulement*.

Sans entrer dans des détails qu'on trouvera dans la 4^{me} livraison de notre « Nivellement de précision de la Suisse, » qui sera publié prochainement, je dirai seulement que sur toute la ligne du Gotthard se trouvent 29 repères principaux qui la divisent en 28 sections ; pour la différence de niveau de chacune de ces sections les deux opérations ont fourni deux valeurs dont nous avons pris la moyenne et dont la demi différence représente l'erreur moyenne de l'incertitude de cette moyenne. Ces erreurs restent ordinairement dans les limites de quelques millimètres ; pour 7, parmi les 28 sections, elles dépassent un centimètre et pour deux sections seulement deux centimètres. L'une de celles-ci est la section entre Hospenthal et le sommet du Gotthard, qui offre une différence de niveau de 649^m. Or sur une pareille différence de niveau, l'erreur qu'on commet sur la largeur de la mire doit avoir une grande influence. En effet, les nombreuses comparaisons que nous avons faites de nos mires depuis 6 ans, soit avec l'étalon de Berne soit sur les repères de Neuchâtel, nous ont montré que la variabilité moyenne de nos mires est de $\pm 0^{mm},069$, tandis que les valeurs extrêmes de leur longueur s'écartent de 5 fois ce chiffre. Malheureusement on ne peut pas se faire une idée précise et générale des grandeurs des intervalles qui s'écoulent entre les changements des mires; ces intervalles dépendent eux-mêmes des changements plus ou moins rapides des circonstances atmosphériques qui produisent les variations des mires. Si l'on suppose que les mires n'ont pas changé pendant le temps employé à opérer entre Hospenthal et le sommet, et que pendant ce temps leur longueur différait de $\pm 0^{mm},069$ de la valeur moyenne employée dans la réduction, il s'ensuivrait de ce chef pour les deux opérations une erreur de $64^{mm},9$. Mais une aussi longue constance des mires n'est pas probable. Supposons donc qu'elles n'aient gardé leur longueur que pendant le jour, ou même le demi jour qu'on a employé chaque fois au nivellement entre deux des 10 repères secondaires placés entre Hospenthal et le sommet, alors il se produirait une certaine compensation dans les différentes longueurs des mires, tantôt trop longues, tantôt trop courtes, et l'erreur, due à cette cause, se réduirait à $20^{mm},9$. Il est probable que la réalité est comprise entre ces deux suppositions qu'on peut envisager comme cas extrêmes. En tout cas l'on voit que cette seule cause suffit pour rendre compte de la différence de $58^{mm},6$ qui existe entre les deux opérations, surtout si l'on songe que les changements de longueur des mires peuvent avoir été jusqu'à 5 fois plus fortes que la variabilité moyenne avec laquelle nous avons calculé. Enfin, il ne faut pas oublier que d'autres sources d'erreurs agissent également et comportent pour une distance de presque 10 kil. entre Hospenthal et le sommet, une incertitude de 9^{mm} environ, en admettant pour ces erreurs 2^{mm} par kilomètre, ce qui, d'après notre expérience antérieure, n'est pas exagéré dans les montagnes.

En général, il n'y en a que 4 parmi les 28 sections, pour lesquelles l'incertitude de la moyenne dépasse légèrement l'erreur qu'on peut ainsi expliquer par la variabilité moyenne de $\pm 0^{mm},069$ des mires et par les erreurs d'observation de 2^{mm} par kilomètre.

Enfin si l'on envisage chaque double opération entre deux repères principaux comme une espèce de polygone, dont on calcule l'erreur de clôture d'après la manière ordinaire, ces erreurs sont en moyenne $\pm 3^{mm},57$ par kilomètre; donc encore très tolérables dans les conditions défavorables où l'on a opéré dans les montagnes.

Je me borne à résumer dans le tableau suivant les résultats des grandes sections entre les pieds de la montagne, les entrées du tunnel et le sommet; j'indique pour chaque section sa longueur, le résultat de la 1re et de la 2e opération, ainsi que la moyenne et l'erreur de la moyenne. Pour montrer jusqu'à quel point les erreurs commises sur chacune des 28 sous-sections se sont compensées, j'indiquerai, dans la colonne suivante, l'erreur totale provenant des erreurs des sous-sections. Ensuite, pour montrer que l'incertitude de la moyenne s'explique largement par la variabilité, j'ai mis dans les deux colonnes suivantes les erreurs auxquelles la variabilité moyenne des mires donne lieu, suivant qu'on suppose qu'elles sont restées constantes entre deux repères principaux, ou seulement entre deux repères secondaires.

Enfin la dernière colonne contient ce que j'appelle l'erreur de clôture par kilomètre et qui est simplement la différence des deux opérations, divisée par la racine carrée de la double longueur de la section.

SECTIONS	LONGUEUR des Sections.	DIFFÉRENCES DE NIVEAU			ERREUR de la Moyenne.	Produit des erreurs des sous-sections $\sqrt{\Sigma \varepsilon^2}$	ERREUR provenant de la variabilité des mires.		ERREUR de clôture par kilomètre.
		1re Opération en 1869.	2e Opération en 1872.	Moyenne.			1re hypothèse.	2e hypothèse.	
				1. Lucerne (NF_{51}) — Gœschenen (NF_{64}).					
	kilom.	m.	m.	m.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.
$NF_{64}-NF_{51}$	85,595	+ 650,499.₂	,575.₅	,537.₃	±38.1	±18,7	± 57,1	±27,4	±5,8
				2. Lucerne (NF_{51}) — Sommet (NF_{55}).					
$NF_{55}-NF_{51}$	103,793	+1662,263.₅	,287.₅	,275.₄	±12,1	±34,8	± 93,0	±38,1	±1,7
				3. Gœschenen (NF_{64}) — Airolo (NF_{57}). Tunnel.					
$NF_{57}-NF_{64}$	31,601	+ 64,657.₆	,632,₇	,645,₁	±12,4	±32,3	±118,5	±36,5	±3,1
				4. Airolo (NF_{57}) — Locarno (NF_{92}).					
$NF_{92}-NF_{57}$	77,427	— 963,730.₈	,846.₀	,788.₄	±57,6	±33,3	± 37,3	±24,1	±9,3
				5. Sommet (NF_{55}) — Locarno (NF_{92}).					
$NF_{92}-NF_{55}$	90,830	—1910,837.₂	,925.₂	,881.₂	±44,0	±35,9	±100,2	±34,7	±6,5
				6. Lucerne (NF_{51}) — Locarno (NF_{92}).					
$NF_{92}-NF_{51}$	194,623	— 248,573.₉	,637.₇	,605.₈	±31,9	±50,0	±136,7	±51,5	±3,2

Pour revenir au point de départ, on voit ainsi par les détails que je viens de donner que l'erreur du polygone des Alpes ne s'est pas trouvée sur la ligne du Gotthard. Une seule fois sur toute la ligne, entre Goldau et Steinen, on a découvert que M. Benz s'était trompé d'un décimètre; mais cette rectification augmente l'erreur de clôture du grand polygone, qui est maintenant de $1^m,311$. La question reste donc toujours à résoudre: si cette erreur est le résultat de fautes d'opération, ou si elle résulte, en partie du moins, des déviations de la verticale dans les montagnes. Pour la décider, il n'y a qu'un moyen, c'est de répéter aussi la ligne du Simplon. A cet effet l'ingénieur partira, aussitôt que la saison le permettra, pour Locarno, afin de reprendre le nivellement du Simplon en sens inverse de la première fois.

Sans vouloir préjuger en rien le résultat de cette opération de contrôle, je dois cependant dire que les idées que j'ai émises dans la notice de l'année dernière sur l'influence de l'attraction des montagnes, sont partagées par des savants de mérite, qui ayant examiné la question par des méthodes différentes, arrivent non-seulement au même résultat que moi, comme M. Zachariae de Copenhague, mais en tirent même des conséquences très vastes, comme M. Bauernfeind qui voit dans les nivellements de précision le moyen de déterminer non-seulement les déviations de la verticale, mais la courbure de la terre elle-même.

Je me permettrai d'analyser brièvement ces travaux de mes savants collègues. Dans un remarquable mémoire « Détermination géodésique de la courbure de la Terre et de la déviation de la verticale, » qui a été lu à l'Académie de Munich dans sa séance du 2 mars 1872 et publié dans le courant de l'été, M. le professeur Bauernfeind part de la remarque que les polygones hypsométriques peuvent, mais ne doivent pas toujours se clôre rigoureusement, et il reproche aux nivellements de précision, qu'on a toujours confondu jusqu'à présent les surfaces de niveau avec les surfaces normales de l'ellipsoïde terrestre, en d'autres mots qu'on a négligé l'action des déviations de la verticale. M. Bauernfeind expose ensuite une méthode d'après laquelle on peut, par le nivellement même, en faisant se croiser les lignes de niveau de deux instruments et en lisant leurs indications sur trois mires disposées convenablement, trouver l'angle entre ces deux lignes de niveau et par conséquent l'angle entre les deux verticales passant par les deux instruments. En combinant cet angle avec la distance des instruments fournie par la même opération, on obtiendrait ainsi la courbure des surfaces de niveau, de station en station. Comme on peut calculer aussi d'après les dimensions de l'ellipsoïde terrestre, l'angle que font entre elles les normales dans les deux stations, par le moyen de leur distance, M. Bauernfeind montre qu'en partant d'un point, où la normale et la verticale coïncident, c'est-à-dire où la déviation est nulle, ou bien d'un point pour lequel on connaît déjà la déviation, on peut, par un nivellement convenablement disposé, déterminer la déviation de l'autre point.

Cette méthode ingénieuse, juste en théorie, me semble sujette à des objections pratiques assez graves, en ce sens que les erreurs d'observation et surtout l'incertitude inévitable de la réfraction auront une influence trop grande sur les petites quantités qu'il s'agit de déterminer; mais je m'abstiens ici de toute critique, d'autant plus que le savant directeur de l'école polytechnique promet de faire suivre prochainement son mémoire d'une application pratique de sa méthode. Je passe également les chapitres dans lesquels l'auteur traite de l'influence de la réfraction sur les opérations du nivellement et de l'emploi du nivellement trigonométrique à la détermination des déviations de la verticale, je me borne à constater que M. Bauernfeind expose d'une manière semblable à celle que j'ai suivie, l'influence des déviations de la verticale sur la clôture des polygones hypsométriques. Cependant M. Bauernfeind, tout en admettant et en démontrant même, que les déviations doivent produire des erreurs de clôture, croit devoir limiter ces dernières à de très petites quantités, parce que sans cela il faudrait admettre une discontinuité des surfaces de niveau, ce qui ne s'accorderait point avec nos connaissances actuelles de la surface terrestre. Cette restriction ne me semble pas justifiée; car, comme le dit M. Bauernfeind lui-même, il est aujourd'hui impossible de déterminer *à priori* la surface de niveau réelle du globe, et il faudra un très grand nombre de déterminations des déviations de la verticale pour pouvoir établir une formule empirique de la surface de niveau ou pour pouvoir en donner une représentation graphique. Or, qui nous dit que ces recherches qui ne font que commencer, ne nous montreront pas en effet l'existence de pareilles discontinuités des surfaces de niveau, surtout dans les montagnes bouleversées et à grandes déchirures? — C'est là précisément l'esprit actuel de la géodésie moderne, qu'elle renonce à envisager la surface géométrique du globe comme une surface régulière d'ellipsoïde de révolution, et qu'elle admet, comme s'exprime Humboldt dans le «Cosmos», que la surface géométrique réelle est à celle d'un ellipsoïde comme la surface de l'eau agitée est à celle de l'eau tranquille ; enfin elle cherche à étudier autant que possible ces déviations causées par les attractions locales.

Je crois avec M. Bauernfeind et je l'ai déjà dit dans ma précédente notice, que les nivellements de précision sont appelés à nous aider puissamment dans cette étude.

L'autre mémoire, de M. Zachariae de Copenhague, a été publié en octobre dernier dans les «Astronomische Nachrichten.»

Le savant géomètre de Copenhague prend pour point de départ ma notice et la discussion qui a eu lieu à ce sujet dans la commission géodésique suisse ; il traite la question théoriquement par une analyse claire et habile.

M. Zachariae pose en principe que les polygones hypsométriques ne doivent se clôre rigoureusement que lorsque les surfaces de niveau successives sont parallèles entre elles, parce qu'alors on obtient partout la même distance entre deux surfaces de niveau, dans quelque point qu'on la mesure. Si au contraire cette condition n'est pas remplie, et qu'on opère un nivellement d'un point à un autre, la différence de niveau des deux points dépendra du chemin qu'on aura suivi et par conséquent les polygones ne se fermeront pas.

Or en supposant même des surfaces de niveau concentriques de forme sphéroïdale régulière, elles ne seront pas rigoureusement parallèles dans le sens des méridiens. M. Zachariae développe dans la première partie de son mémoire les formules qui expriment l'influence de l'aplatissement sur les polygones. En appliquant ces formules à notre cas du polygone des Alpes, M. Zachariae montre que l'erreur de clôture provenant de ce chef est négligeable, comme nous l'avons toujours soutenu.

Dans une autre partie, M. Zachariae calcule d'après des formules données dans l'« Ordnance survey » l'attraction d'une chaîne de montagnes à section prismatique et la variation des déviations qui en résultent sur les deux versants d'une telle montagne; en supposant la base du profil de la chaîne de 15 kilom., sa hauteur de 2500^m, et les projections des deux pentes respectivement de 12500^m et 2500^m, il trouve pour les plus fortes déviations sur les deux versants les valeurs de $+ 26'',6$ et $- 45'',5$, et ces valeurs se trouveront à peu près à la hauteur du centre de gravité du massif.

Enfin dans la quatrième partie de son mémoire, M. Zachariae montre que les déviations de la verticale peuvent produire des erreurs de clôture très sensibles, surtout dans le cas où une partie du polygone passe par une chaîne de montagnes, tandis que l'autre reste dans la plaine. Dans ce cas, l'auteur trouve des erreurs de clôture allant jusqu'à $0^m,83$. Si le polygone passe plusieurs chaînes, chacune contribuera à l'erreur finale, qui dans certains cas peut devenir assez faible par la compensation des différentes parties; dans d'autres, au contraire, elle peut devenir plus forte que chacun des éléments dont elle se compose; ce qui arriverait par exemple si le profil de la montagne changeait entre les deux passages, de telle façon que la pente la plus rapide se trouvât sur un passage au Sud, et sur l'autre du côté Nord.

Je ne prétends pas que ce soit précisément le cas pour le Gotthard et le Simplon; cependant l'on sait que la différence de pente entre les deux versants est beaucoup plus prononcée sur le Gotthard que sur le Simplon. Du reste les chaînes que nous avons traversées, n'ont pas exactement le profil ni les dimensions que M. Zachariae suppose dans son exemple.

Quoi qu'il en soit, M. Zachariae est certainement fondé en déclarant que d'après ses études on ne peut pas nier la possibilité d'une erreur de clôture d'un mètre dans un polygone des Alpes. Je partage également l'avis de l'auteur, qu'il sera probablement toujours impossible de calculer théoriquement une pareille erreur par l'attraction des montagnes; et je suis heureux de pouvoir répondre dès à-présent à l'attente exprimée par notre savant collègue, que la commission géodésique suisse portera l'évidence dans cette importante question, en répétant les nivellements dans les Alpes. D'après ce que j'ai dit dans la première partie de cette communication, nous pouvons espérer qu'à la fin de cette année la question sera résolue.

Séance du 20 mars 1873.

Présidence de M. Louis Coulon.

M. *Hipp* montre la fraise Ingold employée pour arrondir les dents des roues d'horlogerie.

Il explique aussi le jeu d'une nouvelle espèce de fraise dite *de Paris*, et il aimerait savoir si elle réalise sa prétention de donner aux dents la forme épicycloïdale.

M. *le Président* dépose les comptes de la Société pour l'année 1872-73.

Ils sont renvoyés au bureau pour les examiner.

M. *Jaccard* (Auguste), du Locle, professeur de géologie à l'Académie, présente deux dents canines ou défenses d'une espèce de *Sus* (cochon), trouvées au Locle en creusant les fondation du nouveau collége.

M. *Desor* fait observer, quant à la taille des canines du genre *Sus*, qu'on a trouvé dans des palafittes des dents de sanglier tellement énormes que quelques personnes les ont prises d'abord pour des défenses d'hippopotames, ce qui est excusable, si l'on considère qu'il n'existe ni dans nos forêts ni dans nos musées des individus armés de pareilles canines. Il fallait pour cela que ces animaux arrivassent à un âge qu'ils ne parviennent plus à atteindre de nos jours.

Le même M. *Jaccard* fait une analyse des études de M. Maurice de *Tribolet* sur le Châtelu et le cirque de St-Sulpice.

M. *Desor* a des idées analogues à celles de M. Jaccard. On doit rendre justice à l'activité de M. Maurice de Tribolet, mais il va trop vite en besogne et met un peu de précipitation dans la détermination de ses espèces et dans ses conclusions. Il lui arrive ainsi d'appliquer des noms déjà employés à des espèces nouvelles ou de transformer en conclusions trop sûres des hypothèses plus ou moins probables.

M. *Kopp* présente son rapport sur les lacs jurassiques. (*Voir Appendice.*)

Le lac de Neuchâtel n'a pas encore varié de niveau par suite des travaux faits en vue de l'abaissement des lacs. Cela provient du barrage qui existe à la sortie de la Thielle, — de sorte que l'abaissement du lac de Bienne n'a pu se faire sentir sur celui de Neuchâtel.

Une discussion a lieu entre M. *Kopp* et M. *Hirsch* au sujet de la graduation des limnimètres de Neuveville et de Nidau. Le dernier désire que l'on ne publie pas les niveaux du lac de Bienne d'après deux échelles différentes — Neuveville et Nidau — dont l'équation n'est pas déterminée exactement.

En se servant des stations établies lors du nivellement de précision, ou en s'informant auprès du gouvernement de Berne, il croit que l'on peut arriver à connaître exactement les positions relatives des zéros des deux limnimètres.
