Zeitschrift: Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel

Herausgeber: Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel

Band: 8 (1867-1870)

Artikel: Note sur le calcul de la surface des voûtes d'arête

Autor: Ladame

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88054

NOTE

sur le calcul de la surface des voûtes d'arête,

PAR M. LADAME, PROFESSEUR.

(Voir la séance du 11 février, page 242.)

Les réparations et les travaux qui ont été faits pendant cette année 1869, à la cathédrale de notre ville, ont présenté aux architectes et aux maîtres d'état des difficultés au point de vue du toisage des voûtes d'arête et en arc de cloître.

Pour résoudre ces problèmes, ils se sont adressés à M. Isely et à moi; c'est le résultat de ce petit travail que je présente aujourd'hui à la société. Je n'aurais pas eu la pensée de l'imprimer dans les comptes-rendus de la Société, si cela ne m'avait pas été demandé par des industriels et si cela ne m'avait pas fourni l'occasion d'obtenir des données intéressantes sur la manière dont ces mesurages se font dans la pratique par les personnes qui s'occupent de ces travaux.

La quadrature des voûtes d'arête et en arc de cloître, n'est pas autre chose que le calcul de la surface d'un onglet cylindrique droit à base circulaire terminé par un arc d'ellipse.

Ce problème exige la connaissance des principes du calcul différentiel et intégral et n'offre pas de difficultés lorsque, comme dans l'espèce, l'onglet dont on demande la surface a pour base des arcs de cercles dont les centres se trouvent dans le plan de tête des voûtes.

La figure qui accompagne ce texte me paraît assez explicite pour faire comprendre ce que c'est qu'une voûte d'arête et pour l'intelligence des calculs qui suivent.

Légende : *o* et *o'* sont les centres des arcs de cercle ad et a'd', on les suppose placés sur la ligne aa' de naissance des voûtes, soit: $ad = a'd = l.$

$$a'm = dk = d'k' = mp = l'$$

$$dd' = kk' = h.$$

$$a'b' = \text{arc d'une longueur quelconque} = x$$

$$b'b'' = \Delta x,\ b'c' = bc = y,\ oa' = ob' = R$$

$$\text{L'angle } b'oa'' = \frac{x}{R}$$

$$\text{L'angle } b'ob'' = \frac{\Delta x}{R}$$

$$\text{L'angle } d'oa' = a$$

$$\text{L'arc } a'd' = a\,R.$$

On décompose la surface d'a'k' à calculer en une infinité de trapèzes b'c'c''b'', dont il faut faire la somme par l'intégration. On a: a'b : bc, ou b'c' = a'd : dk

d'où on tire: $b'\,c' = \dfrac{a'b\ .\ dk}{a'd}$

remplaçant a'b par $oa' - ob = R - R\cos\dfrac{x}{R}$

puis dk et a'd par l' et l, on obtient

$$b'c' = \frac{l'\,R\,(1 - \cos\frac{x}{R})}{l}$$

Le petit trapèze b'b''c''c' a pour surface

$$b'c'\ .\ b'b'' = \frac{l'\,R\,(1 - \cos\frac{x}{R})}{l}\,\Delta x$$

Intégrant dans les limites de x = o, à = x = a'd' ou aR, on obtient pour la surface cherchée:

$$(1)\quad \text{Surface } a'd'k' = \frac{l'}{l}\,R^2\,(a - \sin a)$$

formule fondamentale que nous allons discuter.

1° Si nous remarquons que R^2 a n'est pas autre chose que le double de la surface du secteur a'od'x' et que R^2 sin a $= R . R$ sin a est le double de la surface du triangle a'od', on trouve que la formule ci-dessus peut encore s'écrire comme suit: Surface a'd'k $= 2 \frac{l'}{l}$. Surf. du segment a'n'd', *propriété remarquable.*

2° Cas particuliers.

A) Supposons le cas des voûtes en plein-cintre et d'égale ouverture, on aura: $R = l = l'$

$$a = \frac{\pi}{2}$$

la surface de cette portion de voûte sera:

$$(2) \quad R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1.\right) = 0{,}57\ R^2$$

et pour la voûte entière 8 fois plus, soit $4{,}56\ R^2$.

Comparons ce résultat exact avec ceux qu'emploient les constructeurs, auxquels je me suis adressé, et qui sont au nombre de trois; *le premier* m'a dit qu'il prenait la moitié de la longueur d'm' ou d m, qu'il multipliait par la moitié de la hauteur de la montée, ce qui, traduit en formule algébrique, donne $\frac{1}{2} R^2 \sqrt{2} = 0{,}70 . R^2$
et pour la voûte entière $5{,}60\ R^2$
résultat trop fort de presque 23 °/₀.

Le *second* m'a dit qu'il mesurait la longueur d'k' ou dk et la multipliait par la demi-montée. Cette méthode traduite en formule algébrique, donne: Surface $0{,}5\ R^2$
et pour la voûte entière $= 4\ R^2$.
résultat trop faible d'environ 12 °/₀.

Enfin, le *troisième* m'a dit qu'il multipliait la longueur de l'arc a'n'd' par la moitié de d'k', ce qui traduit en formule algébrique donne $\frac{\pi R . d'k'}{4} = \frac{\pi}{4} R^2 = 0{,}785\ R^2$
résultat trop fort d'environ 38 °/₀.

C'est la méthode qui s'éloigne le plus de la vérité.

La formule rigoureuse est des plus faciles à appliquer. Il suffit, en effet: *pour trouver la surface d'une voûte d'arête en plein-cintre, de multiplier la surface du carré qui forme le plan de naissance par 1,14.*

Exemple. Supposons 2 voûtes en plein-cintre se pénétrant mutuellement et ayant chacune $4^{m},54$ de diamètre, on multiplie 4,54 par 4,54, ce qui donne 20,6116, puis par 1,14; ce qui donne pour la surface entière $23^{m},497$.

B) Second cas particulier: *Ogives.*

Nous admettons que les arcs de cercle qui forment les ogives, ont leur centre à la naissance de la voûte opposée;

Ainsi a'd' a pour centre le point a,
et ad' id. id. a';

nous supposons enfin que les voûtes qui se pénètrent ont même diamètre, nous aurons:

$$l' = l \qquad a = 60^{\circ} = \frac{1}{3}\pi$$

$$\sin a = 60^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

substituant ces valeurs dans la formule (1), on obtient pour la surface du pan de voûte:

$$(3) \quad R^2\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 0{,}18 \,.\, R^2$$

ce qui donne pour la voûte entière 1,44 R^2.

N'oublions pas que R est ici le diamètre de la voûte à sa naissance.

Il résulte de la formule précédente, que pour obtenir la surface totale d'une pareille voûte, *il faut multiplier par 1,44 la surface du carré qui forme le plan de naissance des voûtes.*

Dans l'exemple choisi plus haut nous trouverons pour la surface totale de la voûte: $20{,}6116 \times 1{,}44 = 29^{m2},68$

Les méthodes pratiques indiquées précédemment donneraient, *la première* : 0,15 R^2.

Résultat trop faible de 17 °/o.

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que dans le cas du plein-cintre cette méthode donnait des résultats trop forts.

La seconde: 0,216 R^2.

Résultat trop fort de près de 19 °/₀.

Dans le cas du plein-cintre cette méthode donnait des résultats trop faibles.

La troisième donne: 0,28 R^2.

Résultat beaucoup trop fort, d'environ 55 °/₀.

Les personnes qui désirent avoir des renseignements plus complets sur le toisage et le cubage des travaux d'art de toute sorte, peuvent consulter l'ouvrage de M. *Sergent*, que la Municipalité de Neuchâtel et la Direction du collége municipal ont acheté pendant l'hiver dernier.