Zeitschrift: Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel
Herausgeber: Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel
Band: 6 (1861-1864)

Artikel: Quelques remarques sur les séries
Autor: Isely, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87987

QUELQUES REMARQUES SUR LES SÉRIES

par M. ISELY.

(Voir Bulletin, page 283.)

Pour qu'une série puisse réellement être sommée, il faut qu'elle soit *convergente*, c'est-à-dire que, non-seulement ses termes doivent converger vers zéro, mais encore que l'erreur que l'on commet diminue à mesure qu'on en prend un nombre plus considérable. La somme de laquelle on approche autant qu'on veut en prenant un nombre de termes de plus en plus grand est une limite: c'est la *limite* de la série. Les séries convergentes sont les seules qu'on doive employer dans l'analyse pour calculer la valeur approximative ou la limite d'une quantité.

Cependant plusieurs mathématiciens se sont occupés de séries divergentes à termes alternativement positifs et négatifs et en ont donné les limites. Catalan *(Traité élémentaire des séries,)* cite entre autres les suivantes, et s'étonne que de savants géomètres aient énoncé de pareilles propositions, qui, à son avis, n'ont aucun sens:

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots\ldots\ldots = {}^{1}/_{2}$ (Lacroix)
$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots\ldots\ldots = {}^{2}/_{3}$ (Prehn)
$1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots\ldots\ldots = {}^{1}/_{4}$ (Lacroix)
$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 8^2 \ldots\ldots = 0$ (Simonoff et Lacroix)
$\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi \ldots = {}^{1}/_{2}$ (Poisson)
$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \ldots = 0{,}40362836$ (Euler)
etc.

On comprend difficilement, en effet, ce que peuvent signifier les limites de séries pareilles et d'autres analogues dont les termes vont constamment en croissant; l'erreur que l'on commet, alternativement positive et négative, croît elle-même au-delà de toute limite. Mais si l'on considère que ces résultats sont donnés par les plus grands géomètres, qui n'ont sans doute pas voulu chercher des choses de non sens, des absurdités, il faut nécessairement admettre qu'ils ont accordé au mot *limite* une signification plus étendue que celle de somme des termes d'une série convergente. Si on ouvre seulement Lacroix (*Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, tome III, chap. V, page 387), on y lit: « Depuis le n° 1145 nous n'avons donné que les sommes des séries proposées depuis f (x) à f (x^n); mais il est visible qu'en supprimant dans leurs expressions le dernier terme de la série, on aura sa limite. » Il ne parle pas de condition de convergence, et il nomme donc limite, ce que devient la somme d'un nombre indéterminé de termes, lorsqu'on en supprime le dernier.

Ainsi, d'après lui $s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}$.

qui exprime la somme de la série (progression géométrique)

$$s = x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + \ldots x^{a+(n-1)b}$$

en exprime aussi la limite lorsqu'on supprime x^{a+nb};

ce qui donne $s = \frac{x^a}{1 - x^b}$

C'est en introduisant cette hypothèse dans la formule intégrale qui donne la somme de la série

$$1\,x - 1.2\,x^2 + 1.2.3\,x^3 - \ldots + 1.2.3.\mathrm{n}\,x^n$$

c'est-à-dire en supprimant le dernier terme, et en faisant $x = 1$ qu'il trouve la limite de la suivante:

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - \text{etc.}$$

qui est divergente au possible.

Si l'on développe l'expression $s = \frac{x}{1 - x^b}$ on retrouve la série $x + x^{a+b} + x^{a+2b} + \ldots$ etc.

Ainsi $\frac{x^a}{1 - x^b}$ est la *fonction génératrice* de la série en question..

On voit par cet exemple qu'en supprimant le dernier terme dans la somme d'un nombre quelconque de termes d'une suite, on trouve sa *fonction génératrice*. Alors si l'on donne à la variable x une valeur particulière a, la fonction génératrice acquiert une valeur finie ou approchée, tandis que la série peut devenir convergente ou divergente. Dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsque la série est convergente, la valeur particulière de la fonction génératrice est en même temps la limite de la série, dans le sens rigoureux de ce mot. Ainsi le développement de $\frac{1}{1+x}$ donne la suite

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots .$$

Celle-ci est convergente quand $x < 1$. Pour $x = {}^1/_3$, elle devient $1 - {}^1/_3 + {}^1/_9 - {}^1/_{27} + \ldots .$

qui a pour limite la valeur ${}^3/_4$ que prend aussi $\frac{1}{1+x}$

Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque la série est divergente, la valeur particulière que prend la fonction génératrice ne peut plus être égalée à la série, puisque celle-ci acquiert des valeurs de plus en plus grandes, suivant qu'on en réunit plus de termes. Pour qu'il y ait égalité réelle, il faut ajouter à la somme d'un nombre limite de termes, le reste de la division. Si l'on fait $x = 2$ dans la suite ci-dessus, la fonction génératrice donne ${}^1/_3$, et la suite devient:

$$1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \text{etc.}$$

et on ne peut poser

$${}^1/_3 = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots$$

Mais si on tient compte du reste de la division de $\frac{1}{1+x}$ qui est $+ \frac{x}{1+x}$ lorsqu'on s'arrête au 4^me^ terme, on a rigoureusement: ${}^1/_3 = 1 - 2 + 2^2 + 2^3 + \frac{2^4}{3} + \text{etc.}$

Cela posé, je dis que c'est en supprimant le dernier terme de la série et en donnant à la variable une valeur particulière, que les auteurs cités au commencement de cet article ont trouvé les limites des séries indiquées; de sorte que ces limites ne sont pas autre chose, en général, qu'une valeur particulière de la fonction génératrice générale, et elles ne peuvent pas être égalées aux séries elles-mêmes qui sont divergentes, à moins qu'on ne tienne compte du reste.

En effet, la plus importante des méthodes qu'on emploie pour sommer les séries, consiste à effectuer des opérations telles (differentiations ou intégrations), que les résultats successifs conduisent en dernier lieu à une série que l'on sache sommer, ou qui soit semblable à la proposée. On obtient ainsi entre y qui représente la série et la variable x une relation qui représente dans tous les cas la *fonction génératrice*, abstraction faite des valeurs de x, mais qui n'en représente la limite véritable qu'autant que la série reste convergente.

Prenons pour exemple la suite

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

En la nommant y, ont voit que $\frac{dy}{dx}$ ou la dérivée première reproduit la série proposée, de sorte qu'on peut poser

$\frac{dy}{dx} = y$ (en la supposant indéfinie). Que signifie cette égalité? Rien autre chose qu'une propriété de la suite: à savoir qu'elle est de même forme que sa dérivée. L'intégration fera donc connaître la fonction qui est égale à sa dérivée première. On trouve en effet e^x dont le développement donne la série proposée.

Et on voit que pour trouver ce résultat, il n'est pas nécessaire de supposer la série convergente; il suffit de la considérer comme indéfinie ou de faire abstraction de son dernier terme.

Si nous revenons aux séries indiquées au commencement de l'article, nous trouvons

1° Que la suite $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. peut dériver de plusieurs fonctions génératrices, savoir:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - \text{etc.}$$

$$\frac{1 + x + x^2 \quad + x^{m-1}}{1 + x + x^2 + \ldots x^{n-1}} = 1 - x^m + x^n - x^{m+n} + x^{2n}$$

qui donnent toutes la même suite $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. quand on y fait $x = 1$, mais qui prennent des valeurs diverses, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} \ldots \frac{m}{n}$

Cette série est de la nature de celles qu'on nomme *indéterminées*, puisqu'elle donne des valeurs alternantes 1 ou 0 suivant qu'on s'arrête à un terme impair ou pair.

Il en est de même de la série suivante, donnée par M. Berger dans une petite brochure sur les séries:

$$1 - (1 - \frac{1}{4}) + (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}) - (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3}) + \text{etc.}$$

Cet auteur la considère comme divergente, mais elle devient *convergente*, dit-il, quand on réduit ses termes deux à deux et elle semble alors avoir $\frac{4}{15}$ pour limite. Son analyse est inexacte; c'est parce qu'il s'est arrêté dans sa réduction à un terme de rang pair qu'il a trouvé $\frac{4}{15}$; s'il s'était arrêté à un terme de rang impair, il aurait trouvé $\frac{14}{15}$. On voit du reste facilement qu'en réduisant chaque terme entre parenthèses, on a une suite de nombres alternativement + et — qui vont toujours en diminuant, en tendant vers $\frac{2}{3}$. Cette série n'est donc ni divergente, ni convergente, elle est *indéterminée.* L'erreur est alternativement positive et négative, mais elle n'a pas zéro pour limite.

2° En appliquant l'intégration à la série

$$y = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \text{etc.}$$

on obtient

$$\int y^{dx} = x - x^2 + x^3 - \text{etc. ou } \int y^{\,dx} = \frac{x}{1+x}$$

La différentiation donne ensuite $y = \frac{1}{(1+x)^2}$

fonction génératrice de la série, et qui devient $\frac{1}{4}$ quand $x = 1$.

3° On trouverait de même que la série

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc.}$$

dérive de la fonction $\frac{x - x^2}{(1+x)^3}$ qui devient 0 lorsque $x = 1$.

4° La série $\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi$ s'obtient facilement au moyen de la suivante:

$x \sin\varphi + \frac{1}{2} x^2 \sin {}^2 \varphi + \frac{1}{3} x^3 \sin 3\varphi + \ldots = \text{arc} \left(\text{tang.} = \frac{x \sin\varphi}{1 - x\cos\varphi}\right)$ (voyez Catalan, page 104). Après l'avoir différentiée par rapport à x, on fait $x = 1$. Ce calcul donne :

$$\cos \varphi - \cos 2 \varphi + \cos 3 \varphi - \ldots = \frac{1 + \cos \varphi}{2 + 2 \cos \varphi} = \frac{1}{2}$$

5° Enfin la série

$$y = 1 \,.\, x - 1 \,.\, 2 \,.\, x^2 + 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, x^5 - \text{etc.}$$

multipliée par $\frac{dx}{x}$, puis intégrée et de nouveau différentiée, conduit à une équation différentielle du premier degré et du premier ordre, d'où l'on tire, pour le cas de $x = 1$

$$y - e \int_0^1 e^{-\frac{1}{x}} dx$$

qui est la valeur particulière de la fonction génératrice sous forme d'intégrale et qu'*Euler* a calculée d'une manière approchée, en divisant l'intervale de 0 à 1 en dix parties égales. C'est ainsi qu'il a obtenu 0,40362836.

On voit donc que ce que divers auteurs ont appelé limite d'une série, lorsqu'elle n'est pas convergente, c'est la valeur particulière de sa *fonction génératrice* par extension, sans doute, du fait que c'est aussi la valeur de la série lorsqu'elle est convergente. Il y a là malheureusement une confusion à laquelle il serait bon de remédier par l'emploi de termes plus précis; mais il me semble que Catalan, dans le traité passablement étendu qu'il a publié sur cette matière, aurait dû éclairer son lecteur sur ce sujet, plutôt que de s'en débarrasser très-simplement en disant que c'est un non-sens.

C'est en ne tenant pas compte de cette acception étendue du mot limite que, traitant la question de la transformation des séries, il ne l'a admise que pour les séries convergentes et qu'il a dit : « plusieurs géomètres ont prétendu transformer certaines séries divergentes en séries convergentes. Nous croyons que cet énoncé est un non-sens. »

Mais si on se propose de trouver au moyen d'une série divergente, dont la loi est connue, la valeur de sa fonction génératrice, on comprend que, comme le dit Lacroix « toute suite n'étant autre chose qu'un développement de cette fonction prise depuis $x = 0$ à $x =$ infini, les diverses manières d'exprimer ce développement fourniront des suites équivalentes ou des transformées de la même suite. »

De sorte que si l'on peut dériver une série convergente d'une première série divergente donnée, celle-là sera propre à calculer la fonction génératrice.

Ainsi on voit que la formule $\frac{1}{x+1}$ donne les deux suites ci-dessous:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \dots$$

Tandis que la première est convergente pour $x < 1$, la seconde est divergente; elles sont pourtant le développement de la même fonction.

Pour $x = \frac{1}{3}$ la première donne des valeurs qui approchent de plus en plus de $\frac{3}{4}$, valeur de la fonction génératrice; elle est donc propre à en trouver la valeur, et non pas la seconde qui est alors:

$$3 - 3^2 + 3^3 - \text{etc.}$$

Or si l'on se propose de calculer la fonction primitive, il il n'est pas absurde de chercher à transformer la seconde série en la première plus appropriée à ce but.

Ce qui a rapport à ces transformations rentre dans la théorie des fonctions génératrices, traitées par Laplace et par Euler. Celui-ci a employé un procédé algébrique fort simple (voyez Lacroix, tome III, page 344), qui consiste à faire dans la suite $\int = a\,x - b\,x^2 + c\,x^3 - d\,x^4 + \dots$

$$x = \frac{y}{1+y} \text{ puis } y = \frac{x}{1-x}$$

On obtient ainsi la transformée:

$$\int = a \,.\, \frac{x}{1+x} - \Delta\, a \,.\, \frac{x^2}{(1+x)^2} + \Delta^2 a \,.\, \frac{x^3}{(1+x)^3} - \text{etc.}$$

ou $\Delta\, a$, $\Delta^2\, a$ etc. sont les différences premières, secondes des coëfficients de la suite.

Quand la série des coëfficients a des différences constantes, on obtient exactement la somme $\int$, et dans beaucoup d'autres cas on transforme une série divergente en une série convergente propre à calculer la valeur de la fonction génératrice.

Ce procédé conduit tout de suite aux limites des séries

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5$$
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2$$
$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 \text{ etc.}$$

dont les différences sont constantes.

« On arrive de cette manière, dit Lacroix (page 345), *à la limite de la série proposée, ou à sa fonction génératrice.* »