montrer le côté faible et en signalant par des objections raisonnées le fond quelquefois plus théologique que rationnel de quelques-unes de ses théories.

Séance du 8 *Février* 1861.

Présidence de M. L. Coulon.

M. *Hirsch* lit la communication suivante, dans laquelle il rend compte des observations faites pendant une année sur cinq pendules astronomiques présentées à l'Observatoire cantonal.

RECHERCHES

SUR DES

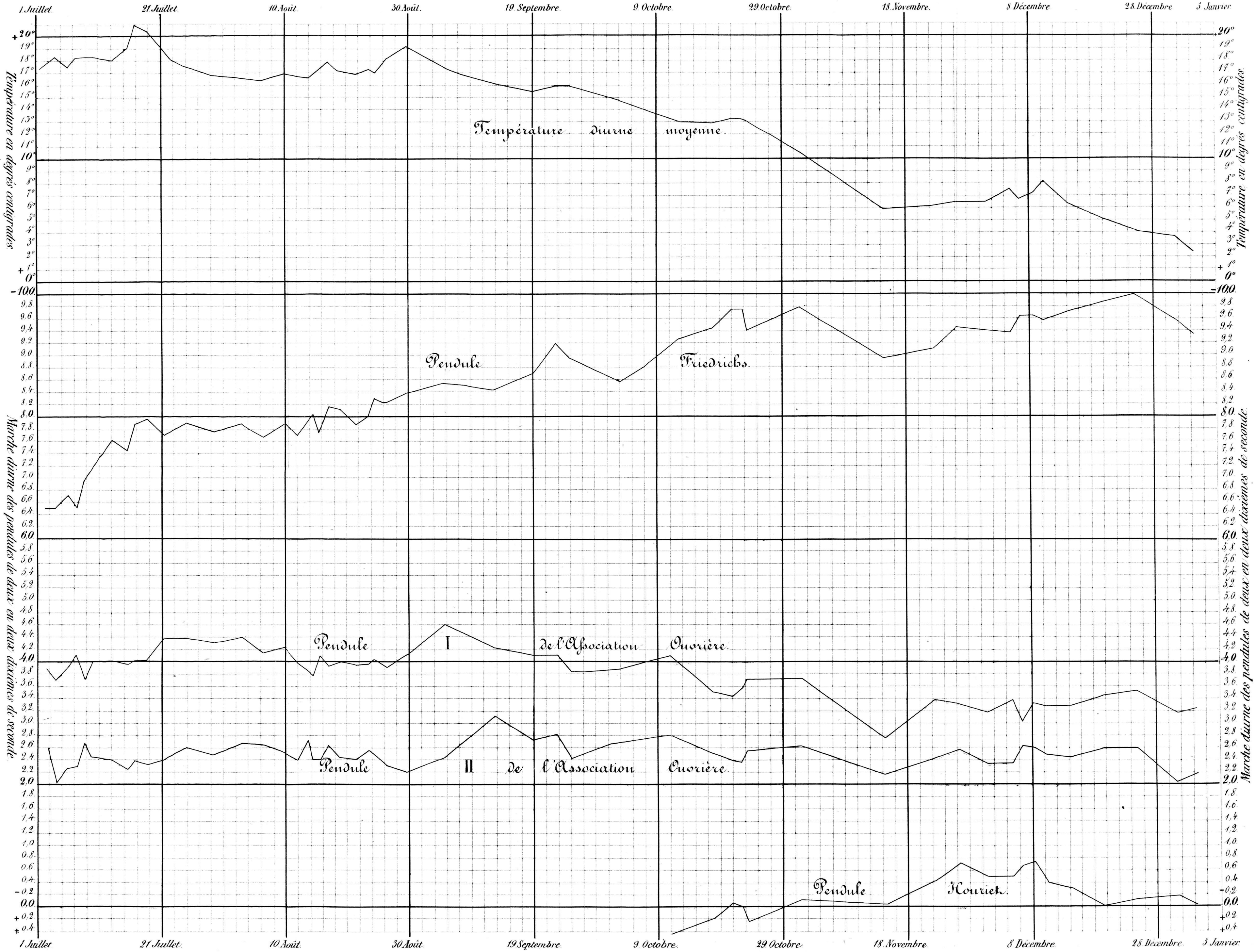
PENDULES ASTRONOMIQUES.

L'Observatoire cantonal ayant ouvert en 1858 un concours pour deux pendules astronomiques, les artistes du pays ont présenté cinq horloges qui, depuis leur installation à l'Observatoire, ont été observées et comparées régulièrement et dans des conditions identiques, afin de choisir les deux meilleures. Dans ce but on a calculé pour chacune les marches diurnes et les variations de ces marches ou leurs différences; ensuite on a formé pour chaque pendule la somme de ces variations en faisant abstraction des signes, et on en a pris la moyenne. C'est d'après ces moyennes des variations de la marche diurne, qu'on a classifié les pendules, en donnant la première place à celle qui a présenté la moindre variation moyenne. Le concours est maintenant terminé et l'Observatoire a gardé les deux horloges qui en sont sorties les premières. Nous n'avons qu'à nous féliciter de nous être adressé aux artistes de notre pays; car ils nous ont fourni deux excellentes pendules astronomiques qui, tout en faisant grand honneur aux artistes qui les ont construites, rendront d'excellents services à notre Observatoire lequel, s'occupant spécialement de la détermination du temps, a par cela même un intérêt particulier de posséder des pendules de premier ordre. Et, en effet, nous avons pour pendule normale une pièce, dont la variation moyenne diurne pendant 11 mois est seulement de $0^s,17$, et qui, ayant commencé au mois de février avec une marche de $1^s,63$, a fini au mois de décembre avec la marche de $2^s,05$, en montrant au milieu de l'été (mois de juillet) une marche de $2^s,41$. Certes, cette pendule, construite par l'Association Ouvrière du Locle, sous la direction et d'après les plans de M. William Dubois des Monts, comptera parmi les meilleures pendules astronomiques connues.

J'ai l'honneur de vous soumettre les tableaux qui contiennent les résultats de l'observation de toutes ces pendules; il me paraît naturel que notre société consigne dans ses publications la marche de ces cinq pendules astronomiques qui, sous le point de vue scientifique, peuvent être envisagées comme les chefs-d'œuvre de notre industrie nationale.

Je prendrai ensuite la liberté de vous communiquer les comparaisons et les recherches que j'ai faites sur la marche de ces pendules. Comme on a rarement l'occasion d'observer un aussi grand nombre de bonnes pendules astronomiques sous des conditions identiques et pendant un temps un peu considérable, j'ai pensé

Tableau comparatif des marches diurnes des Pendules et de la Température.



que la discussion scientifique de leurs marches pourrait avoir un certain intérêt et jeter peut-être quelque lumière sur des questions encore obscures qui se rattachent aux variations légères, mais réelles cependant, auxquelles même les meilleures pièces de précision sont sujettes. Ces questions intéressent non-seulement la haute horlogerie, mais aussi l'astronomie qui, comptant les pendules parmi ses instruments les plus importants, a toujours tâché de contribuer à leur perfection.

Pour rendre cette discussion aussi claire que possible, je commencerai par vous donner une description succincte de leur construction et de leur installation; je vous expliquerai ensuite la méthode qu'on a suivie pour les observer, et la manière dont on a déterminé les températures dans lesquelles elles ont marché. Je les comparerai alors sous le point de vue de la régularité de leurs marches, et enfin je rechercherai de quelle manière et jusqu'à quel point on peut expliquer les variations de leur marche par les différentes causes, telles que changement de température, âge des huiles, etc.

Description des pendules.

Le programme du concours avait posé, pour la construction de ces pendules, certaines conditions qui ont été toutes remplies par les artistes. Comme il nous importait avant tout de procurer de bonnes pendules à l'Observatoire et moins de provoquer toutes sortes d'essais, d'expériences et d'inventions qui, tout utiles qu'elles auraient pu être pour l'horlogerie, auraient cependant diminué les chances d'atteindre le but principal du concours, nous avons recommandé aux concurrents, comme direction générale, de suivre un des systèmes déjà éprouvés par l'expérience, notamment celui de Kessels, et nous avons prescrit certains détails de la construction, tels que l'échappement à ancre (Graham, dimensions de Kessels) et la suspension à ressorts. Pour ces derniers nous avons recommandé aux constructeurs d'utiliser les résultats des savantes recherches, que MM. Laugier et Winnerl, sous l'initiative de Bessel, ont faites en 1845, concernant l'influence du ressort de suspension sur la durée des oscillations et par lesquelles ils ont établi qu'il existe entre le poids de la lentille et la force élastique des ressorts de suspension, un rapport tel que les oscillations du pendule libre deviennent isochrones. Parmi les pendules du concours, celle de M. Friedrichs, de Fleurier, a suivi exactement les dimensions proposées par le mémoire de MM. Winnerl et Laugier; les autres s'en rapprochent de très près, en tenant compte de l'influence de l'échappement. Les deux pendules de l'Association Ouvrière du Locle ont d'ailleurs, dans leur suspension, ceci de particulier, que la distance des deux ressorts de suspension est plus considérable qu'on ne le fait ordinairement; elle atteint à peu près 8^{mm}. —

Quant à la compensation, on a laissé le choix entre celle au mercure et celle à gril, tout en indiquant la supériorité théorique de ce dernier système, pourvu qu'il soit exécuté avec beaucoup de soin. Et, en effet, nous avons reçu une pendule compensée à mercure (celle de M. Alexandre Houriet, à Couvet), les autres ont des balanciers à gril. Parmi ces derniers les deux du Locle ont 9 tringles: 5 d'acier et 4 de laiton; celle de

M. Friedrichs a 4 tringles d'acier et une de zinc, enfin, le pendule de M. Girard, de la Chaux-de-Fonds, est compensé moyennant 2 tringles de zinc et 3 d'acier. Ce dernier a le défaut que sa lentille n'est pas suspendue au centre, comme celle de tous les autres, ce qui empêche le jeu complet de la compensation. Le rouage de toutes ces horloges est très-simple et son calcul était donné par la condition que les pendules devaient marcher au moins 35 jours, et par la disposition du cadran qui devait montrer les secondes séparément, et les heures depuis zéro jusqu'à 24. En effet, la pendule Girard marche 35 jours, la pendule Friedrichs 36, la pendule Houriet 40 jours, les deux de l'Association Ouvrière 42 jours. Le mouvement de la pendule Houriet se distingue par une solidité vraiment anglaise; celui des deux pendules du Locle par le fini, on pourrait dire parfait du travail; la pendule Girard, par le luxe de son exécution, toutes les parties étant dorées.

Quant à l'amplitude de l'oscillation, à laquelle le programme avait assigné la limite de $2^1/_2{}^0$, les pendules Friedrichs et Houriet oscillent par $2^0,15'$, la pendule II de l'Association Ouvrière par $2^0,22',5$; celle de Girard par $2^0,24'$; le n° I du Locle seul a une oscillation un peu trop forte s'élevant jusqu'à $2^0,50'$.

Les cages des deux pendules de l'Association Ouvrière sont construites à doubles parois, pour maintenir plus constante la température à l'intérieur; celle de la pendule Houriet atteint le même but par sa solidité extraordinaire et son excellente facture; les deux autres pendules sont moins favorisées sous ce rapport, leurs cages étant des vitrines assez légères. — Les deux pendules du Locle ont en outre le grand avantage que le mouvement et le pendule sont suspendus directement au mur d'une manière tout-à-fait indépendante de la cage qui est fixée séparément; de cette manière la marche de la pièce est entièrement soustraite à l'influence de la cage, soit par le travail de son bois, soit par les chocs qu'elle peut recevoir.

D'ailleurs, on a pris toutes les précautions pour assurer à toutes ces pendules une stabilité à toute épreuve; trois ont été placées contre la colonne massive qui porte la lunette parallactique; la pendule Girard, qui a servi jusqu'à présent comme pendule de passage, est fixée à un pilier en marbre tout-à-fait isolé, et la pendule Houriet repose sur des barres de fer scellées très-solidement dans une énorme pierre du mur de la tour, dont l'épaisseur en ce point est de 6 à 7 pieds.

Méthode d'observation et de calcul.

Comme la pendule sidérale que M. Winnerl exécute pour l'Observatoire n'était pas encore terminée au commencement du concours, la pendule Girard a fonctionné comme pendule de passage. Toutes les fois que le ciel l'a permis, on a observé le soleil et un assez grand nombre d'étoiles fondamentales, pour en déduire à l'aide des constantes du *Nautical Almanac* les erreurs de la lunette méridienne et la correction de la pendule de passage. L'observation du soleil n'est entrée dans ces calculs que subsidiairement et à défaut d'étoiles fixes, pour rendre la détermination de l'heure indépendante des petites erreurs qui se trouvent encore dans les tables du soleil. Les erreurs d'inclinaison et d'azimuth de l'axe de la lunette ont été déterminées par l'observation du niveau, de la mire et de l'étoile polaire pour chaque groupe d'observations, et de temps en temps la collimation de l'axe optique qui varie très-peu. Ainsi on a obtenu avec la dernière exactitude les corrections de la pendule sidérale, que l'on a réduites avec la marche qui s'ensuit, au moment du midi moyen de chaque jour d'observation. D'un autre côté, on a comparé tous les jours à midi les quatre autres pendules entr'elles et à la pendule sidérale; à cet effet, l'aide indiquait pour chaque pendule trois secondes à l'intervalle de 10^s par un *top* sec, que j'observais à la pendule sidérale; pour contrôle je comparais les quatre pendules encore directement entre elles, et je prenais alors la moyenne de toutes ces comparaisons. Ensuite j'ai calculé ces comparaisons, en transformant les moments de la pendule sidérale en temps moyen à l'aide de ces corrections obtenues, comme il a été dit, et du temps sidéral à midi moyen, donné par le *Nautical Almanac*. De cette manière on déterminait pour chaque pendule sa correction à midi moyen, et en formant les séries des premières et secondes différences, on obtenait leurs marches diurnes et les variations de ces marches, telles que vous les trouvez consignées dans les tableaux que je mets sous vos yeux.

Ce que je viens de dire, explique pourquoi ces tableaux ne contiennent pas les marches d'un jour à l'autre; il fallait envisager à priori toutes les pendules comme également bonnes, et par conséquent on ne pouvait pas choisir une d'elles pour pendule normale, dont on aurait supposé la marche constante pendant les intervalles des observations astronomiques, car on aurait introduit ainsi un élément arbitraire dans le calcul. Malgré l'état météorologique extraordinairement mauvais de cette année, les six mois, depuis juillet à décembre, qui ont été fixés comme époque de concours, ont donné cependant 52 jours d'observation, de sorte que c'est en moyenne le 3^{me} ou 4^{me} jour qui a été clair. C'est surtout le mois de novembre qui, à cause des brouillards, a fourni peu d'observations, et le plus long intervalle de 16 jours obscurs. En général on trouve :

Pendule	Durée du séjour à l'observatoire	Nombre d'observations.	Intervalle moyen entre deux observ.
Girard . . .	15 mois	120	4 jours.
Friedrichs . .	12 $^1/_2$ »	97	3 »
Houriet . . .	13 $^1/_2$ »	95	3 $^1/_2$ »
Assoc. ouvr. II .	11 »	84	4 »
» » I .	7 »	60	3 $^1/_2$ »

Détermination des températures.

L'élément qui influe le plus sur la marche des pendules et des montres, est sans contredit la température ; car bien qu'on cherche par les différents moyens de compensation d'éliminer cette influence de la dilatation des métaux qui composent les organes principaux de ces instruments, on n'y arrive jamais d'une manière absolue, et c'est justement pour pouvoir juger jusqu'à quel degré la compensation a été atteinte dans les pendules, et pour pouvoir démêler ainsi cette cause de variation d'avec les autres influences perturbatrices, que nous avons observé régulièrement les températures des salles où les horloges étaient placées. A cet effet, j'ai placé des thermomètres dans la salle méridienne, sur le même pilier qui porte la pendule sidérale, et dans la tourelle, sur la colonne au milieu des autres pendules; ce sont des thermomètres à maxima et minima, qui ont été observés ainsi tous les jours à midi. La moyenne entre les températures extrêmes a été prise alors pour la température moyenne de la salle, à laquelle les pendules ont été exposées pendant les 24 heures; ces températures moyennes se trouvent sur les tableaux des marches.

Je n'ignore point que ce procédé n'est pas tout-à-fait exact, et que la température moyenne entre les extrêmes n'est pas rigoureusement la température moyenne vraie du jour. Il faudrait pour cela que le changement de température eût lieu d'une manière régulière et continue, ou en d'autres termes, que la marche de la température pût être représentée par une ligne droite; mais du moment où, si l'on représente les températures comme ordonnées sur les abscisses des heures, la marche de la température paraît sous la forme d'une courbe s'éloignant sensiblement d'une ligne droite, comme cela a lieu en réalité, il ne suffit plus de prendre la demi-somme des températures extrêmes pour avoir la température moyenne vraie; il faudrait connaître l'équation différentielle qui exprime la loi de la variation de la température pendant un jour, et l'intégrer. Dans les observatoires, où l'on peut observer la température à chaque heure, ou mieux encore où l'on a des instruments enrégistreurs, qui dessinent la courbe de la température, on a pu ainsi déterminer le coëfficient par lequel il faut multiplier la demi-somme des températures extrêmes pour avoir la vraie température moyenne. Pour les moyennes des mois ou de l'année, ces coëfficients sont les mêmes pour toute une contrée, et ceux que M. Plantamour a calculés pour Genève, pourraient s'appliquer également pour Neuchâtel. Mais il n'en est pas ainsi pour les températures moyennes diurnes; et d'ailleurs, ils ne sont valables que pour la température extérieure de l'air, tandis qu'il s'agit ici de la température des salles de l'Observatoire, température qui est sujette à des variations brusques et irrégulières, par exemple, lorsqu'on ouvre dans la nuit les volets pour observer.

Comme je reviendrai à une autre occasion sur cette question des températures, je veux seulement ajouter encore qu'il existe un moyen très-précis pour déterminer pour ainsi dire l'intégral de la température diurne, moyen qui est surtout précieux lorsqu'il s'agit d'étudier l'influence de la température sur la marche des montres et des pendules. C'est un instrument qu'on pourrait nommer thermomètre chronométrique, ou bien chronomètre thermométrique. C'est en substance une bonne montre exécutée en tout comme un chronomètre, seulement son balancier n'est pas compensé; naturellement la marche d'une telle montre doit varier fortement avec la température, et en déterminant sa marche pour des températures extrêmes, on peut trouver de combien de secondes elle varie par degré centigrade pendant un certain temps. Cette donnée une fois connue, on comprend qu'en déterminant chaque jour la marche de ce chronomètre, on peut en conclure la somme de toutes les températures partielles qui ont régné pendant le jour dans l'endroit où elle s'est trouvée.

J'ai commandé une montre de ce genre à un de nos artistes qui l'aura bientôt terminée; posée dans l'armoire des chronomètres, elle en fera connaître la température moyenne. Mais en attendant il a bien fallu se contenter d'observer les températures maxima et minima; ce moyen est encore préférable à celui qui consiste à prendre pour température moyenne la température observée à 9 heures du matin; car ce moyen donne un résultat approximatif seulement pour l'air extérieur.

Comparaison des pendules quant à la régularité de leurs marches.

Si l'on calcule pour chaque pendule la variation moyenne pour tout le temps de son séjour à l'Observatoire, on obtient le résultat suivant :

	Variat. moyenne.
	s.
Pendule II, de l'Association ouvrière	0,174
» I, » »	0,188
» Houriet	0,235 [1]
» Friedrichs	0,243
» Girard	0,325

Mais comme les pendules sont arrivées à différentes époques, ces variations ne sont pas rigoureusement comparables; en calculant pour les six derniers mois de l'année 1860 qui ont été fixés pour époque du con-

[1] Pendant l'époque du concours, un accident arrivé à la pendule Houriet a considérablement altéré sa marche; son balancier a montré des taches de rouille et on a été obligé, pour l'empêcher de se propager, d'y mettre des gouttes d'huile. Si l'on exclut le temps pendant lequel cette cause perturbatrice a influencé la marche, on trouve pour sa variation moyenne 0,185, ce qui la place au second rang.

cours et où toutes les pendules se sont trouvées dans les mêmes conditions, on trouve :

		Variat. moyenne.
		s.
Pendule II, de l'Association ouvrière		0,178
»	I, » »	0,184
»	Friedrichs	0,223
»	Girard	0,240
»	Houriet	0,262 (1)

Les différences un peu fortes entre ces nombres et les précédents, s'expliquent, pour la pendule Houriet, par l'accident dont nous avons parlé, pour la pendule Friedrichs parce que son constructeur l'a nettoyée au mois de mai, et pour celle de M. Girard, parce qu'on a renforcé sa compensation au mois d'avril.

Quoique ces nombres suffisent pour donner une juste idée du mérite relatif des pendules, ils ne sont pas l'expression la plus exacte de leur valeur absolue comme instruments de précision. Car le service qu'on demande à une pendule astronomique, c'est qu'en connaissant sa correction et sa marche diurne à un certain moment, on puisse calculer pour un autre moment quelconque l'heure exacte. Mais cela suppose une marche uniforme et constante; or puisque la meilleure pendule n'est pas une machine parfaite et que par conséquent sa marche variera toujours un peu, la meilleure pendule sera apparemment celle qui expose l'astronome à la moindre erreur, lorsqu'il en calcule l'état pour un certain moment en employant la marche qu'elle avait montrée lors de la dernière observation. Ainsi, il s'agit de trouver pour quelle pendule, en calculant de la manière mentionnée, l'erreur à craindre est la plus

(1) Voyez la note de la page précédente.

faible. Or, si l'on envisage les petites variations de la marche d'une pendule comme des erreurs fortuites, c'est-à-dire, comme des quantités qui ne sont liées à aucune loi connue et pour lesquelles on ne peut pas trouver la forme d'une fonction déterminée de variables susceptibles d'être mesurées, alors un raisonnement analogue à celui qui est à la base de la méthode des moindres carrés, conduit à se croire exposé à la moindre erreur par la pendule pour laquelle la somme des carrés des variations est la moindre. Ou bien, si comme dans notre cas, le nombre des variations n'est pas le même pour toutes les pendules, on obtiendra des chiffres qui seront, pour ainsi dire, l'expression de la régularité de la marche, si l'on prend pour chaque pendule la moyenne des carrés des variations et qu'on extrait la racine de cette moyenne.

Pour rendre plus clair par un exemple ce procédé et ce qui le distingue de l'autre qui consiste à prendre simplement la variation moyenne, supposons deux pendules A et B dont une (A) aurait montré trois variations exprimées en dixièmes de seconde par les nombres 1, 2 et 9, l'autre (B) aurait les variations 3, 4, 5. La variation moyenne pour toutes les deux serait la même, 4, et pourtant il est clair que la seconde pendule serait la meilleure et exposerait à une erreur moindre que la pendule A qui peut faire des sauts de 9 dixièmes de seconde dans sa marche. Car bien que pour la pendule B les variations qu'on négligerait, seraient dans la plupart des cas un peu plus fortes que pour A, d'un autre côté, on n'a pas à craindre des variations considérables dans quelques cas, comme pour l'autre pendule. Cette supériorité de la seconde pendule qui n'est point exprimée par la variation moyenne, devient visible par l'autre méthode; car on obtient

pour la pendule (A) $\sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + 9^2}{3}} = 5{,}4$ (dix[mes] de seconde)

et pour la pend[le] (B) $\sqrt{\frac{3^2 + 4^2 + 5^2}{3}} = 4{,}1$ (dix[mes] de seconde).

J'ai donc exécuté ce calcul pour nos cinq pendules et j'ai obtenu le résultat suivant :

Pour tout le temps de l'observation.	Racine de la moyenne des carrés des variations.	Pour les six mois Juill.-Décemb. 1860.	Racine de la moyenne des carrés des variations.
	s.		s.
Pend[le] II, Ass. ouv.	0,219	Pend[le] II, Ass. ouv.	0,229
» I, »	0,259	» I, »	0,261
» Friedrichs	0,303	» Friedrichs	0,277
» Houriet	0,321 (1)	» Girard	0,330
» Girard	0,437	» Houriet	0,334 (1)

En comparant ces chiffres aux variations moyennes données plus haut, on voit que, lorsqu'on ne se tient qu'aux six mois pendant lesquels les pendules ont été dans les mêmes conditions, l'ordre des pendules n'est pas altéré, cependant les différences entre leurs valeurs relatives sont un peu changées; et certes, ces derniers nombres donnent une idée plus juste de la précision des pendules. Ces nombres représentent ce que l'on appelle dans la méthode des moindres carrés *l'écart moyen* des observations par rapport à leur moyenne; On sait que l'*erreur moyenne* ou l'*erreur à craindre*

(1) Pour la pendule Houriet il faut faire ici la même remarque qu'auparavant ; en excluant les mois où il y a eu des gouttes d'huile sur son balancier, on trouve pour elle le chiffre 0,240, ce qui la place donc de nouveau au second rang.

s'obtient en multipliant l'écart moyen par $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$, si n désigne le nombre d'observations. — Dans notre cas, lorsqu'on calcule la correction d'une pendule pour un moment quelconque en employant la dernière correction et marche obtenues, c'est-à-dire, lorsqu'on suppose la variation zéro, l'erreur à craindre résulte pour les différentes pendules en multipliant par les coëfficients respectifs les nombres donnés plus haut.

Pour tout le temps de l'observation.	Erreur moyenne. s.	Pour les six mois Juill.-Décemb. 1860.	Erreur moyenne. s.
Pend[le] II, Ass. ouv.	0,220	Pend[le] II, Ass. ouv.	0,231
» I, »	0,260	» I, »	0,264
» Friedrichs	0,305	» Friedrichs	0,280
» Houriet	0,323 (1)	» Girard	0,333
» Girard	0,439	» Houriet	0,338 (1)

Enfin, le calcul des probabilités enseigne qu'on obtient l'erreur probable en multipliant l'erreur moyenne par le nombre 0,674489. Voici ces quantités pour nos pendules :

	Erreur probable. s.		Erreur probable. s.
Pend[le] II, Ass. ouv.	0,148	Pend[le] II, Ass. ouv.	0,156
» I, »	0,175	» I, »	0,178
» Friedrichs	0,206	» Friedrichs	0,189
» Houriet	0,218 (1)	» Girard	0,224
» Girard	0,296	» Houriet	0,228 (1)

Pour terminer cette comparaison des pendules, j'ajouterai encore qu'à l'aide des erreurs moyennes j'ai calculé les poids des différentes pendules, fonctions qui en découlent par la formule $p = \frac{1}{4\pi} \times \frac{1}{m^2}$; j'ai obtenu :

(1) Si l'on exclut pour la pendule Houriet les marches altérées, on obtient pour erreur moyenne 0,242 et pour erreur probable 0,163.

		Poids.
Pendule II, Association ouvrière		1,49
»	Houriet	1,36
»	I, Association ouvrière	1,14
»	Friedrichs	1,02
»	Girard	0,72

C'est à l'aide de ces nombres que je calcule par exemple la correction de la pendule électrique, pour la mettre à l'heure et envoyer le signal d'heure aux Montagnes. Chaque pendule donne par sa comparaison à la pendule électrique une correction de cette dernière; au lieu de prendre la moyenne arithmétique de ces corrections, je calcule la moyenne probable, c'est-à-dire, qui donne la moindre erreur à craindre, par la formule $M = \frac{\Sigma (p \times c)}{\Sigma p}$. De cette manière j'arrive à tenir l'erreur du signal dans les limites d'un dixième de seconde, même pendant les époques où les observations directes du ciel sont assez rares.

Recherches des formules qui représentent la marche des pendules.

La pendule astronomique est un instrument de précision dont l'âme est le régulateur, le balancier; toute cause qui change la durée de l'oscillation du balancier, altère la marche de l'horloge. Or la théorie du pendule montre que les oscillations ne sont constantes que sous deux conditions, d'abord que la longueur du pendule reste la même, et ensuite que l'arc d'élongation ne change pas sensiblement, même si l'oscillation s'opère dans de petits arcs (de 1^0 à 3^0 tout au plus). Il s'ensuit qu'il y a surtout deux éléments qui doivent influencer la marche d'une pendule; en premier lieu la température qui, en produisant des dilatations et des contractions dans les matières qui composent le balancier, doit changer la longueur du pendule; et en second lieu l'âge des huiles ou l'état des frottements dans le rouage et dans l'échappement. Car à l'aide de ce dernier, la force du poids moteur doit restituer au balancier, à chaque oscillation, la quantité de mouvement qu'il perd par la résistance de l'air et de la suspension; or si les huiles viennent à s'épaissir avec le temps et qu'ainsi la résistance des divers frottements de l'horloge augmente, la force d'impulsion que l'échappement transmet au balancier, doit diminuer et, par conséquent aussi, l'amplitude d'oscillation de ce dernier; mais le pendule, en oscillant par des arcs plus petits, les décrira en moins de temps. C'est là l'explication du fait que presque toutes les pendules avancent avec le temps.

Les artistes combattent ces deux causes perturbatrices d'abord par les différents systèmes de compensation qui ont pour but de maintenir le centre d'oscillation à la même distance du point de suspension dans toutes les températures, et ensuite, en cherchant l'isochronisme, c'est-à-dire, une construction du pendule, de sa suspension et de son échappement, telle qu'il décrit les petits arcs compris entre $1^1/_2{}^0$ et $2^1/_2{}^0$ sensiblement dans le même temps; et comme cet isochronisme est très-difficile à obtenir dans la pratique, les bons artistes en diminuent le défaut en exécutant toutes les parties du mouvement avec beaucoup de soin, afin que l'état des frottements ne subisse pas de changements considérables.

Mais quoi qu'on fasse, on ne peut jamais obtenir dans la pratique ni une compensation ni un isochronisme absolus; et tout ce qu'on peut espérer, c'est de s'approcher autant que possible de l'état théorique ou de la perfection absolue.

Il y a donc lieu de rechercher, comme Lieussou l'a fait le premier, pour chaque pendule, jusqu'à quel point l'artiste a réussi à réaliser la compensation et l'isochronisme; car non seulement on se formerait ainsi une idée exacte de la valeur d'une pendule, mais si l'on parvenait à découvrir la loi des variations d'une pendule, c'est-à-dire, à représenter ces variations comme fonctions de différents éléments variables, tels que température, âge des huiles, etc., et à déterminer les constantes de ces fonctions, alors on se rendrait indépendant de ce reste d'imperfection que la meilleure exécution laisse toujours subsister, et on assimilerait ainsi les pendules aux autres instruments astronomiques dont on détermine également les petites erreurs pour dépouiller les observations de leur influenee.

Ainsi lorsqu'on ne tient compte d'abord que de l'influence des agents principaux dont j'ai parlé, et qu'on néglige les autres, tels que pression de l'air, magnétisme terrestre, etc., qui, s'ils influent du reste sur la marche des pendules, ont certainement une importance beaucoup inférieure, alors on peut représenter la marche d'une pendule par une équation de la forme

$$M = a + f(x) + \varphi(t)$$

ou t signifie la température, x le temps écoulé à partir d'un certain moment et a une constante. La signification d'abord de cette constante est facile à comprendre ; elle exprime la marche d'une pendule à compensation et isochronisme parfaits pour lesquels, par conséquent, les deux autres termes sont nuls ; dans ce cas la marche d'une pendule par rapport au temps moyen dépend uniquement de la longueur du pendule laquelle se règle par l'écrou à l'extrémité du balancier. La constante *a* mesure donc l'exactitude avec laquelle on est parvenu à règler une pendule au temps moyen. — Le second terme qui dépend du temps, est l'expression du défaut d'isochronisme et de l'influence de l'âge des huiles, influence qui doit naturellement augmenter avec le temps ; enfin, le dernier terme, dépendant de la température, provient du défaut de la compensation. Peut-être devrait-on ajouter un quatrième terme de la forme F (t, x), dépendant à la fois du temps et de la température, puisque l'état des frottements dépend aussi de cette dernière en raison de la fluidité des huiles ; cependant comme cette influence ne se fera sentir que dans les températures extrêmes, lorsque les huiles viennent à se figer ou à se volatiliser, nous la négligerons pour le moment.

Pour arriver à connaître la somme des deux fonctions, j'ai représenté graphiquement la marche de nos pendules, en prenant le temps pour abscisse et les marches pour ordonnées ; pour unité des abscisses j'ai pris deux jours et pour celle des ordonnées deux dixièmes de seconde. J'ai construit de même la courbe des températures diurnes moyennes, déterminées comme il a été dit plus haut. En la comparant avec la courbe des marches, ainsi que ces dernières entre elles, on voit immédiatement qu'il existe en effet un rapport entre les changements de marche et de température, puisque les grands mouvements des courbes correspondent généralement; mais le degré de cette dépendance est bien différent dans les différentes pendules. Il en est de même pour l'influence de l'âge des huiles, car tandis que la pendule II de l'Association montre une marche presque toujours parallèle à l'axe des abscisses, celle de Friedrichs a une inclinaison marquée.

Pour étudier de plus près ces courbes et pour séparer les effets des deux causes, j'ai construit des lignes isothermes en réunissant les marches qui ont eu lieu à des températures égales et à des époques différentes. J'ai d'abord constaté que ces points forment des lignes sensiblement droites et que ces lignes ont une inclinaison sur l'axe des abscisses, différente pour les différentes pendules. On ne peut donc pas, pour nos pendules au moins, négliger le second terme, comme le fait M. Lieussou, qui suppose ainsi un isochronisme parfait, aussi impossible en pratique qu'une compensation parfaite. Il s'ensuit d'abord que la fonction f (x) est linéaire et qu'on peut écrire l'équation

$$M = a + b \times x + \varphi(t),$$

où la constante b est la tangente de l'angle que les lignes isothermes font avec l'axe des abscisses. Cette constante est donc la mesure de l'isochronisme; si elle est nulle, la marche de la pendule ne change point avec le temps; si elle est positive, la pendule retarde avec le temps; si elle est négative, elle avance, et cela d'autant plus que le nombre trouvé pour b sera plus grand.

En construisant sur les courbes de marche les différentes lignes isothermes correspondantes aux différentes températures, on voit que ces lignes sont sensiblement parallèles entre elles, et que les distances qui les séparent dans le sens des ordonnées, sont sensiblement proportionnelles aux différences des températures respectives. On en conclut que la fonction $\varphi(t)$ est également linéaire; au moins peut-on, comme nous le verrons, se contenter de cette première approximation, et les données d'observations dont nous disposons, ne permettent pas à présent de compléter l'équation de marche et de chercher à en déterminer d'autres termes qui dépendraient, soit du carré des températures, soit de la température et du temps à la fois. Ainsi donc nous sommes amenés à écrire l'équation de marche des pendules sous cette forme

$$\mathrm{M} = \mathrm{a} + \mathrm{b}.\mathrm{x} + \mathrm{c}.\mathrm{t}$$

Nous avons déjà expliqué la signification des deux constantes a et b; la constante c est la quantité dont la marche de la pendule varie, si la température diurne change d'un degré; elle est donc la mesure de l'exactitude que l'artiste est parvenu à obtenir dans le règlage de la compensation; si elle est nulle, la compensation est parfaite; si elle est positive, la pendule retarde lorsque la température monte, donc la compensation est trop faible; au contraire, une pendule est surcompensée, lorsque dans son équation la constante c est négative.

J'ai déterminé pour nos cinq pendules les équations de leurs marches; comme ces équations contiennent trois constantes à déterminer, il faut former pour chaque pendule trois équations de condition qu'on résout alors par la méthode d'élimination. J'ai donc calculé pour chaque pendule les marches moyennes et les températures moyennes pour tous les mois, et j'ai choisi, pour former les équations, les marches de telle sorte qu'il y ait parmi elles à la fois les plus grands intervalles de temps et les plus fortes différences de température possibles. Après avoir ainsi déterminé pour chaque pendule les constantes de sa marche, j'ai calculé les marches mensuelles et je les ai comparées aux marches observées. Les différences qu'on obtient ainsi entre les marches calculées et observées, proviennent en partie de l'erreur signalée plus haut, qu'on commet en prenant pour la température moyenne la demi-somme des températures extrêmes, et en partie aussi des termes négligés dans l'équation de la marche.

Voici les résultats de ces calculs pour les différentes pendules.

PENDULE II.

DATES.		CORRECTION.
		m. s.
Mai,	3	— 2 17,03
Juin,	2	— 3 18,99
Juillet,	2	— 4 25,65
Août,	1	— 5 38,09
Août,	31	— 6 52,65
Octobre,	6	— 8 29,31
Novembre,	9	— 9 59,04
Décembre,	4	— 10 56,75
Janvier,	4	— 12 12,60

MARCHE.	Températ. moyenne.	DATES.	Intervalles.	— 0,00345 x	— 0,0391 t	MARCHE calculée.	Différence Calc.-Ob.
s.	o.						
— 2,07	+ 14,7	18 Mai.	30 jours.	— 0,0000	— 0,5748	— 2,07	0,00
— 2,22	16,4	17 Juin	30 »	— 0,1035	— 0,6412	— 2,24	— 0,02
— 2,41	18,1	17 Juill.	30 »	— 0,2070	— 0,7077	— 2,41	0,02
— 2,49	17,2	16 Août.	33 »	— 0,3105	— 0,6725	— 2,48	+ 0,01
— 2,68	16,0	18 Sept.	35 »	— 0,4244	— 0,6256	— 2,55	+ 0,13
— 2,64	14,7	23 Oct.	29,5 »	— 0,5451	— 0,4966	— 2,54	+ 0,10
— 2,31	6,3	21,5 Nov.	28 »	— 0,6469	— 0,2463	— 2,39	— 0,08
— 2,45	+ 5,4	19,5 Déc.		— 0,7435	— 0,2111	— 2,45	0,00

EQUATIONS DE CONDITION.

$$-2{,}07 = a + 0\,.\,b \quad + 14{,}7\,.\,c$$
$$-2{,}41 = a + 60\,.\,b \quad + 18{,}1\,.\,c$$
$$-2{,}45 = a + 215{,}5\,.\,b + 5{,}4\,.\,c$$

$$c = -0{,}0391$$
$$b = -\frac{0{,}34 + 0{,}132}{60} = \underline{-0{,}00345}$$
$$a = -2{,}07 + 0{,}57477 = \underline{-1{,}495}$$

Epoque 18 Mai.

$$M = -1{,}495 - 0{,}00345\,.\,x - 0{,}0391\;t$$

PENDULE I.

DATES.		CORRECTION.	MARCHE.	Températ. moyenne.	DATES.	Intervalles.	$-$ 0,00515 x	$-$ 0,1223 t	MARCHE calculée.	Différence Calc.-Ob.
		m. s.	s.	o.						
Juin	2	— 3 20,93	— 3,74	+ 16,4	17 Juin.		— 0,0000	— 2,0057	— 3,74	0,00
Juillet	2	— 5 12,98	— 4,11	18,1	17 Juillet.	30 jours.	— 0,1545	— 2,2136	— 4,10	+ 0,01
Août	1	— 7 16,15	— 4,07	17,2	16 Août.	30 »	— 0,3090	— 2,1036	— 4,15	— 0,08
Août	31	— 9 18,31	— 4,17	16,0	18 Sept.	33 »	— 0,4789	— 1,9568	— 4,17	0,00
Octobre	6	— 11 48,47	— 3,77	12,7	23 Oct.	35 »	— 0,6592	— 1,5532	— 3,95	— 0,18
Novembre	9	— 13 56,53	— 3,04	6,3	21,5 Nov.	29,5 »	— 0,8111	— 0,7705	— 3,31	— 0,27
Décembre	4	— 15 12,57	— 3,35	+ 5,4	19,5 Déc.	28 »	— 0,9553	— 0,6604	— 3,35	0,00
Janvier	4	— 16 56,40								

EQUATIONS DE CONDITION.

$$-3{,}74 = a + 0 \,.\, b + 16{,}4$$
$$-4{,}17 = a + 93 \,.\, b + 16{,}0 \,.\, c$$
$$-3{,}35 = a + 185{,}5 \,.\, b + 5{,}4 \,.\, c$$

$$c = -\underline{0{,}1223}$$
$$b = -\underline{0{,}00515}$$
$$a = -\underline{1{,}734}$$

Epoque 17 Juin.

$$M = -1{,}734 - 0{,}00515 \,.\, x - 0{,}1223 \,.\, t$$

PENDULE FRIEDRICHS.

DATES.		CORRECTION.
		m. s.
Juin	2	— 1 9,97
Juillet	2	— 3 58,56
Août	1	— 7 42,37
Août	31	— 11 41,81
Septemb.	27	— 15 34,53
Novembre	9	— 22 14,14
Décembre	4	— 26 2,68
Janvier	4	— 31 3,65

MARCHE.	Températ moyenne.	DATES.	Intervalles.	— 0,03616 x	— 0,23797 t	MARCHE calculée.	Différence Calc.-Ob.
s.	o.						
— 5,62	+ 16,4	17 Juin.	30 jours.	— 0,0000	— 3,9032	— 5,62	0,00
— 7,46	18,1	17 Juillet.	30 »	— 1,0848	— 4,3078	— 7,11	+ 0,35
— 7,98	17,2	16 Août.	28,5 »	— 2,1696	— 4,0936	— 7,98	0,00
— 8,62	16,2	13,5 Sept.	35,0 »	— 3,2002	— 3,8556	— 8,77	— 0,15
— 9,32	13,0	18,5 Oct.	34,0 »	— 4,4658	— 3,0940	— 9,28	+ 0,04
— 9,14	6,3	21,5 Nov.	28,0 »	— 5,6952	— 1,4994	— 8,91	+ 0,23
— 9,71	+ 5,4	19,5 Déc.		— 6,7077	— 1,2852	— 9,71	0,00

EQUATIONS DE CONDITION.

$$-5{,}62 = a + 0 \,.\, b + 16{,}4 \,.\, c.$$
$$-7{,}98 = a + 60 \,.\, b + 17{,}2 \,.\, c$$
$$-9{,}71 = a + 185{,}5 \,.\, b + 5{,}4 \,.\, c$$

$$c = -\underline{0{,}23798}$$
$$b = -\underline{0{,}03616}$$
$$a = -\underline{1{,}7168}$$

Epoque 17 Juin

$$M = -1{,}7168 - 0{,}03616 \,.\, x - 0{,}23798 \,.\, t$$

Pour la pendule Houriet il a été difficile de déterminer les constantes parce que le nettoyage qu'elle a subi en septembre a rendu trop courte la période pendant laquelle elle a marché sans interruption. Cependant on peut représenter les marches des trois mois octobre, novembre et décembre, par l'équation

$$M = -1^s,068 + 0,00545 \times x + 0,09167 \times t$$

On rencontre la même difficulté pour la pendule Girard qui, servant de pendule de passage, a été mise à l'heure de temps à autre. Ensuite, l'élément de compensation est tellement prépondérant dans les variations de la marche de cette pendule que la détermination de la constante *b* devient très-incertaine. J'ai pu assez bien représenter sa marche par l'équation

$$M = -5,369 + 0,270 \times t$$

dont voici la comparaison avec l'observation :

DATES.	CORRECTION.	MARCHE mensuelle observée.	TEMPÉRAT. moyenne du mois.	MARCHE mensuelle calculée.	DIFFÉRENCE Calc.-Ob.
2 Juillet	+ s. 2,12				
		s. — 0,87	o. + 17,4	s. — 0,67	s. + 0,20
11 Août	— 32,84				
13 Août	+ 2,83				
		— 0,78	+ 17,0	— 0,78	0,0
9 Septemb.	— 18,20				
		— 1,56	+ 14,7	— 1,40	+ 0,16
5 Octob.	— 58,68				
		— 2,66	+ 10,3	— 2,59	+ 0,07
9 Novemb.	— 2m 31,90				
		— 3,63	+ 5,1	— 3,99	— 0,36
4 Décemb.	— 4 2,58				
		— 4,34	+ 3,8	— 4,34	0,0
4 Janvier	— 6 17,22				

Si l'on met en regard les équations des cinq pendules

Pendule II, Association ouvrière:

$$M = -1^s,495 - 0^s,00345 \,.\, x - 0^s,0391 \,.\, t.$$

Pendule Houriet:

$$M = -1^s,068 + 0^s,00545 \,.\, x + 0^s,0917 \,.\, t.$$

Pendule I, Association ouvrière:

$$M = -1^s,734 - 0^s,00515 \,.\, x - 0^s,1223 \,.\, t.$$

Pendule Friedrichs:

$$M = -1^s,717 - 0^s,03616 \,.\, x - 0^s,2380 \,.\, t.$$

Pendule Girard:

$$M = -5^s,369 \qquad\qquad + 0^s,270 \times t.$$

on voit se confirmer d'une manière frappante l'ordre qui leur a été assignée par les erreurs probables, et l'on reconnaît les causes des différences qui existent entre elles par rapport à la régularité de marche. Ainsi, quant au règlage de la compensation, il est de beaucoup le plus parfait dans la pendule II du Locle, dont la marche varie seulement de $0^s,04$ pour un changement de température de un degré; le défaut de compensation est déjà deux fois plus fort pour la pendule Houriet, trois fois plus fort dans la pendule I du Locle, six fois plus fort chez la pendule Friedrichs et sept fois plus fort pour la pendule Girard, pour laquelle un degré de changement de température produit $0^0,27$ de seconde de variation dans la marche diurne. On voit en outre que la compensation est trop faible dans les pendules Houriet et Girard, tandis que les autres sont plus ou moins surcompensées.

Quant à la partie de la variation qui dépend du temps, elle est très-faible pour les trois premières pendules (3 à 5 millièmes de seconde par jour), tandis qu'elle est très-forte (8 fois plus) pour la pendule Friedrichs. Cela provient de ce que l'artiste a accepté tout simplement les dimensions qui établissent l'isochronisme pour le pendule libre, mais qui doivent être modifiées, lorsqu'on a affaire à un échappement à repos qui a déjà en lui-même des conditions d'isochronisme. Là surtout il devient nécessaire de règler l'isochronisme du pendule, lorsqu'il oscille sous l'influence du rouage, en corrigeant les dimensions des ressorts de suspension, jusqu'à ce qu'on obtienne la même marche pour des arcs différents.

En revanche, l'expérience de notre concours paraît démontrer qu'il n'est point nécessaire, comme la plupart des traités d'horlogerie l'enseignent, de règler la compensation du pendule, conjointement avec le rouage. Car la pendule dont la marche varie le moins avec la température, est justement celle pour laquelle la compensation du balancier a été réglée par M. Dubois à l'aide du pyromètre, indépendamment du mouvement.

Si l'on jette un coup-d'œil sur les colonnes des différences entre les marches calculées et observées, on voit que la marche d'une pendule est d'autant mieux représentée par l'équation de la forme

$$M = a + bx + c \times t$$

que la pendule a une marche plus régulière. Ainsi, tandis que la pendule II du Locle, lorsqu'on calcule sa marche mensuelle théoriquement d'après l'équation, expose à une erreur probable qui monte seulement à $0^s,046$, cette même erreur est pour la pendule I $0^s,092$ et pour la pendule Friedrichs $0^s,122$. Mais même dans les meilleures pendules, il reste de petites irrégularités dont les considérations précédentes ne rendent pas compte. Comme je l'ai déjà dit, les données dont nous disposons, ne suffisent pas pour expliquer ces perturbations; j'ai essayé vainement de découvrir une influence de la pression atmosphérique sur la marche des pendules, et pour décider s'il en existe de la part du magnétisme terrestre, les éléments nécessaires nous ont manqué. D'ailleurs, je crois que ces questions ne peuvent être décidées que par des expériences directes, expériences que j'espère pouvoir entreprendre un jour dans notre Observatoire.

M. *Ladame* fait observer, à propos des recherches concernant la compensation, que le thermomètre ne donnant pas la température des objets, mais seulement celle de l'air qui les environne, la courbe de variation des températures déduite des observations thermométriques convient à l'air, mais n'indique pas de quelle manière cette température varie dans les corps qui y sont placés.

M. *Hirsch* répond que les expériences montrent que la courbe de variation des températures est la même pour les objets que pour l'air, sauf que la courbe des premiers est retardée à l'égard de celle du second, en d'autres termes que les changements de température se font sentir dans les objets de la même manière que dans l'air, mais toujours plus tard.

Il donne des explications sur les méthodes employées par les constructeurs d'horloges astronomiques pour obtenir la compensation. Les uns opèrent la compensation au repos par le moyen du pyromètre; les autres corrigent le pendule par une suite de tâtonnements en le faisant osciller à diverses températures.

M. *Kopp* présente un résumé des observations météorologiques faites à Bedford, en Angleterre, pour 1859 et 1860. Ce résumé lui a été envoyé par M. Barckers, météorologue anglais, qui exprime le désir d'entrer en correspondance avec notre Société, à laquelle il enverra annuellement ses observations en échange des nôtres. Ensuite de cette communication, la Société décide de présenter M. Barckers en qualité de membre correspondant.

M. le Dr *Guillaume*, fait voir le plan de l'ancienne gare et du port du Landeron, indiquant les endroits où l'on a rencontré des pilotis lacustres en creusant le port.

Séance du 15 *Février* 1861.

Présidence de M. L. Coulon.

M. *Kopp* communique quelques articles du *Mercure suisse* de 1741, ayant trait aux seiches du lac de Genève.

M. le professeur *Desor* entretient la Société des découvertes faites à Amiens et à Abbeville par M. Boucher de Perthes, et sur lesquelles se porte actuellement l'attention générale. Les résultats obtenus sont d'une telle nature, qu'il est facile de comprendre pourquoi ils ont été accueillis, pendant longtemps, avec une extrême