

**Zeitschrift:** IABSE reports = Rapports AIPC = IVBH Berichte  
**Band:** 70 (1993)

**Artikel:** Modèle considérant la maçonnerie comme matériau non-résistant à la traction  
**Autor:** Van Balen, Koen / Smars, Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-53315>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

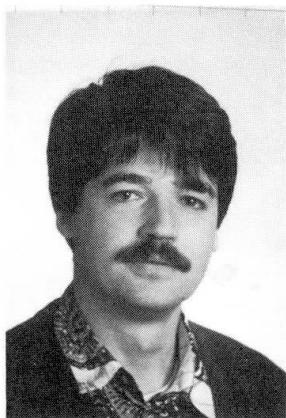
## Modèle considérant la maçonnerie comme matériau non-résistant à la traction

Zugspannungsfreies Werkstoffmodell für Mauerwerk

Non-Tension Material Model for Masonry

### Koen VAN BALEN

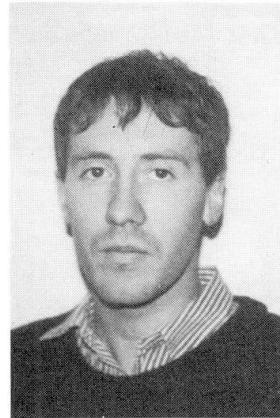
Dr. Sc. Appl.  
K. U. Leuven  
Leuven, Belgique



K. van Balen, né en 1956 a obtenu le diplôme d'ing. architecte à la K.U. Leuven. Il a travaillé pour la restauration du patrimoine architectural avant de se concentrer sur la recherche dans le domaine des structures et matériaux historiques.

### Pierre SMARS

Maître en Sc. Appl.  
K. U. Leuven  
Leuven, Belgique



P. Smars, né en 1966, a obtenu le diplôme d'ing. architecte à la K.U. Leuven. Il s'est spécialisé en conservation des monuments au Centre d'études pour la conservation du patrimoine architectural et urbain où il travaille en tant que chercheur dans le domaine des calculs des structures anciennes.

### RÉSUMÉ

La définition de la maçonnerie ancienne comme un matériau ne résistant pas à la traction, permet de reproduire différents comportements typiques de structures anciennes. L'intégration de cette hypothèse dans un modèle aux éléments finis permet d'individualiser dans la maçonnerie des parties structurelles simples, telles que des barres ou des arcs. Suite à des fissurations, ces zones s'isolent de la partie de la maçonnerie qui ne fonctionne que comme remplissage et poids mort. Ce nouveau type de modèle est illustré sur différents exemples simples.

### ZUSAMMENFASSUNG

Indem das Mauerwerk als ein Material ohne Zugfestigkeit definiert wird, können verschiedene typische Verhaltenserscheinungen bei alten Tragwerken nachvollzogen werden. Die Integration dieser Hypothese in ein Modell mit finiten Elementen erlaubt die Identifikation unterschiedlicher struktureller Partien, wie Bogen oder Balken, innerhalb des Mauerwerks. Als Folge von Rissbildungen heben sich diese Zonen vom übrigen Teil des Mauerwerks, das nur als Füllmaterial dient, ab.

### SUMMARY

Defining masonry as a non-tension material allows to reproduce different well known behaviours of ancient masonry structures. When this hypothesis is included in a finite element model, different structural zones like arching, thrust and dead-load areas can be identified within the masonry. The presented model is illustrated for different simple masonry structures.

## 1. INTRODUCTION.

Les méthodes de calcul employées pour le calcul des structures anciennes en maçonnerie ont beaucoup évolué depuis que Méry a introduit sa méthode graphique pour la définition de la ligne de poussée. Les nouvelles théories des charges limites ont permis à différents auteurs, souvent en s'appuyant sur les recherches de J. Heyman [5], de démontrer la validité de l'emploi des lignes de poussée pour des structures composées de blocs rigides.

Durant les derniers décades l'introduction de la méthode des éléments finis a bouleversé les différentes aires de la science des matériaux. On a, en particulier, chercher à l'appliquer pour décrire le comportement des maçonneries. Comparés aux modèles de lignes de poussée les modèles aux éléments finis ont l'avantage de permettre, pour autant que le comportement des matériaux soit décrit correctement, d'étudier parallèlement les tensions et les déformations dans la structure [4][9]. Graduellement différents chercheurs ont essayé d'adapter ces modèles, considérant initialement les matériaux comme isotropes et élastiques, à la réalité du comportement de la maçonnerie. Il s'est avéré que ce matériau n'est que très peu élastique et que les importantes déformations dues entre autre à la fissuration constituent plutôt la règle que l'exception.

La simple observation de maçonneries historiques suffit à expliquer la difficulté ou même l'incapacité [1] de bien décrire son comportement. Afin de l'étudier nous avons employé un nouveau matériau: le NTM (Non Traction Material [2], n'ayant aucune résistance à la traction) [5]. Celui-ci tient compte d'une caractéristique essentielle de la maçonnerie: sa faible résistance à la traction et des éventuelles fractures qui peuvent en être la conséquence.

Un programme de calcul de type éléments finis a été développé [7] dont les éléments sont constitués de "NTM". Le modèle constitué est relativement simple et permet ainsi de garder un certain contrôle sur la qualité des résultats fournis. En outre, le NTM, étant plus fragile que la maçonnerie, peut servir de base à des calculs de vérification de sécurité.

## 2. MODELISATION DE LA MAÇONNERIE.

### 2.1. Principes de base du modèle [2]

Le matériau NTM ne possède aucune résistance à la traction. Cela signifie que, en tout point, et pour toute direction, la contrainte normale sur une section parallèle à cette direction est négative ou nulle. Cette condition équivaut à dire que les contraintes principales sont non-positives.

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq 0 \quad (1)$$

Le problème consistera alors en la recherche d'un champs de contraintes vérifiant, outre les équations d'équilibre, également les conditions (1) sur le tenseur. En général, une structure constituée d'un tel matériau se décomposera en trois zones aux propriétés différentes:

- la zone  $R_0$ , où les deux contraintes principales sont nulles ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ )
- la zone  $R_1$ , où seule une contrainte principale est non nulle ( $\sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0$ )
- la zone  $R_2$ , où les deux contraintes principales sont négatives ( $\sigma_1 < \sigma_2 < 0$ )

Un problème subsiste, on sait bien que, à un champs de contrainte arbitraire donné, ne correspond pas nécessairement des déplacements possibles; il faut que les équations de compatibilité soient vérifiées. Dans le cas qui nous occupe, si la solution NTM diffère de la solution standard, les équations de compatibilité ne seront pas vérifiées: sous l'influence des forces extérieures le matériau se sera fracturé. Afin de pouvoir à nouveau intégrer le système, c'est à dire déterminer les déplacements on peut, dans le cas de l'utilisation d'un

programme aux éléments finis, représenter les fractures au moyen de déformations initiales  $\Delta$  (pour autant qu'elles restent petites en regard aux dimensions des éléments).

On comprend aisément qu'il existe deux types élémentaires de fractures: celles d'ouverture (type  $\Delta_x$ ) et celles de glissement (type  $\Delta_y$ ): toute fracture générique étant une combinaison de ces deux types fondamentaux (Fig.1).

Comme pour les contraintes, il y aura certaines conditions sur le tenseur des fractures. Pour qu'il n'y ait pas d'interpénétration de matière, il faut que les fractures  $\epsilon$  soient d'ouverture et non de fermeture, ce qui implique que le volume de la fracture doit être positif ( $\text{tr}\Delta \geq 0$ ).

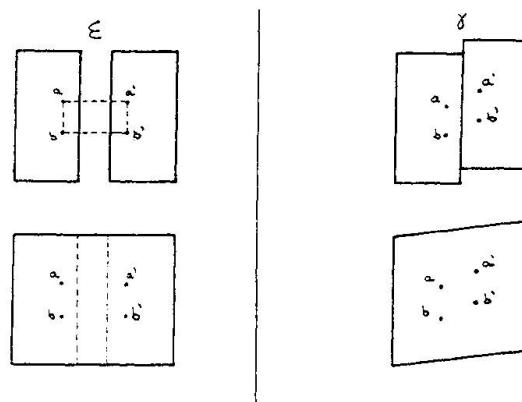
Il existe aussi des relations entre les fractures et les contraintes. Nous envisageons successivement les trois zones  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

Dans une zone  $R_0$ , aucune contrainte ne doit être transmise, le matériau ne pouvant absolument pas résister à la séparation de ses parties, il peut être entièrement fracturé.

Dans une zone  $R_1$ , les contraintes doivent être transmises dans une direction; sans nuire à la généralité, nous pouvons la fixer comme étant y ( $\sigma_y=0$ ). Pour que cette transmission soit possible, il ne peut y avoir de fractures  $\Delta_x$  (ouverture dans le sens y), par contre, les déformations  $\Delta_y$  (ouverture dans le sens x) et  $\Delta_{xy}$  (glissement) sont possibles; aucun effort ne se transmettant perpendiculairement aux fractures.

Dans une zone  $R_2$ , les contraintes doivent être transmises dans les deux directions, il ne peut y avoir aucune fracture. Dans cette zone le matériau NTM se comporte exactement comme un matériau standard.

Ces observations peuvent se résumer en disant que, en tout point, les tenseurs des fractures et des contraintes sont orthogonaux ( $\Delta^\top \sigma = 0$ ).



Fractures élémentaires et leur représentation sous forme de déformation initiale.

## 2.2. Présentation du programme CALPA

Un programme aux éléments finis a été écrit. Il utilise une discréétisation en éléments triangulaires à contrainte constante [10]. Les inconnues sont les déplacements des noeuds. Les éléments sont constitués de matériau NTM (n'ayant aucune résistance à la traction).

Le problème étant non-linéaire, une procédure itérative doit être utilisée, on utilise la méthode de Newton-Raphson modifiée (modifiée car il se peut que, à un moment du calcul, la structure ou certaines de ses parties devienne hypostatique) [3],[10].

$$\begin{aligned} {}^{n+1}u &= {}^n u + du \\ du &= -[R({}^0u)]^{-1}[R({}^n u){}^n u - F] \end{aligned} \quad (2)$$

A chaque itération, la matrice de raideur R est recalculée. En fonctions des



déplacements des noeuds, on décide du type de comportement d'un élément [4].

- Comportement bi-directionnel (zones  $R_2$ )

Si les déplacements conduisent à des déformations dont le tenseur vérifie les conditions

$$\text{tr} D < 0 \quad (3)$$

$$(1-v^2) \det D + v \text{tr}^2 D \geq 0$$

On se trouve dans une zone  $R_2$  et la matrice  $K$ , liant les contraintes aux déformations, est du type

$$K = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v \\ \frac{(1-v)}{2} & 1 \\ v & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- Comportement uni-directionnel (zones  $R_1$ )

Si le tenseur des déformations vérifie les conditions

$$\det D < 0$$

$$\text{tr} D \geq -(1-v) \sqrt{\frac{-\det D}{v}} \quad (5)$$

On se trouve dans une zone  $R_1$  et la matrice  $K$ , anisotrope, est construite en effectuant une rotation d'un angle  $\beta$  (orientation de la fracture) de la matrice  $K'$

$$K' = E \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

- Absence de réaction (zones  $R_0$ ).

Si le tenseur des déformations vérifie les conditions

$$\text{tr} D \geq 0$$

$$\det D \geq 0$$

On se trouve dans une zone  $R_0$  et la matrice  $K$  est nulle

$$K = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Si le processus itératif utilisé converge on peut être sûr de deux points.

- Le champs de contrainte est admissible et respecte les équations d'équilibre.
- Les fractures obtenues finalement sont orthogonales au tenseur des contraintes.

Or, dans un problème d'élasticité standard (avec résistance à la traction), si

l'on ajoute des déformations initiales orthogonales aux contraintes, la solution statique n'est pas modifiée, l'expression de l'énergie complémentaire (9) restant identique.

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T K \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \sigma^T \Delta d\Omega \quad (9)$$

On peut en déduire que le champs de contrainte donné par le programme aux éléments finis est bien la solution statique du problème NTM étudié.

Comme on peut le démontrer, la solution cinématique à un problème NTM n'est pas unique, l'expression de l'énergie potentielle totale n'étant pas influencée par certaines fracturations.

Les déplacements trouvés par le programme CALPA, utilisant uniquement des fractures d'ouverture, sont acceptables, mais pas forcément "économiques" [7].

Nous allons à présent étudier un certain nombre de problèmes simples afin de voir comment le programme se comporte à leur égard.

### 2.3. Modélisation d'un arc

La maçonnerie résistant mal à la traction, pour couvrir un espace efficacement, on a toujours eu recourt à des systèmes visant à faire descendre les charges au sol sans créer de tractions dans la structure. L'arc, à cet égard, peut être considéré comme l'élément structurel typique de la maçonnerie (la voûte et la coupole étant d'autres systèmes plus complexes).

Suite aux recherches de Coulomb et ensuite en suivant la formulation classique définie au XIX<sup>ème</sup> siècle, on calculait les arcs en utilisant la méthode des lignes de poussée. Cette méthode, basée sur l'utilisation du polygone funiculaire, permet de fixer une limite inférieure et une limite supérieure aux poussées d'un arc sur les structures sous-jacentes.

Heyman a montré que cette méthode était toujours la plus efficace. Le choix entre la poussée minimale et la poussée maximale se fait en analysant la situation (une voûte s'ouvre en général).

Il est intéressant de voir comment se comporte le programme CALPA vis-à-vis de telle structures et plus particulièrement s'il fournit des résultats comparables à ceux obtenus en utilisant la méthode des lignes de poussée. Nous avons, à cette fin, testé un arc brisé successivement soumis à un écartement des appuis et à un rapprochement des appuis. Les résultats sont présentés à la Fig.2 joints à une analyse graphique.

On remarque que, pour la poussée minimale, des rotules se forment aux reins pour un angle d'environ 60° de part et d'autre de la clef de voûte. Il est également à noter qu'il y a deux zones (1 et 1') non soumises à contrainte. Ces zones ne sont pas en équilibre. Le matériau NTM, absolument incapable de résister à la traction, ne peut, en toute circonstance, assurer l'intégrité des structures qui en sont constituées; pour une poussée minimale les parties 1 et 1' tombent.

Pour obtenir des renseignements sur le comportement d'un arc d'une précision comparable à celle obtenue avec la méthode des lignes de poussée il faut utiliser un grand nombre d'éléments (nous en avons utilisé 500). L'avantage est que, pour une structure complexe, formée d'un ensemble d'éléments structuraux simples, le programme détermine -en tenant compte de l'élasticité des matériaux et de l'interaction des éléments- une combinaison de poussées (variant entre  $H_{\min}$  et  $H_{\max}$ ) conduisant à la formation d'un champs de contrainte admissible pouvant donc servir de base à une analyse aux charges limites.

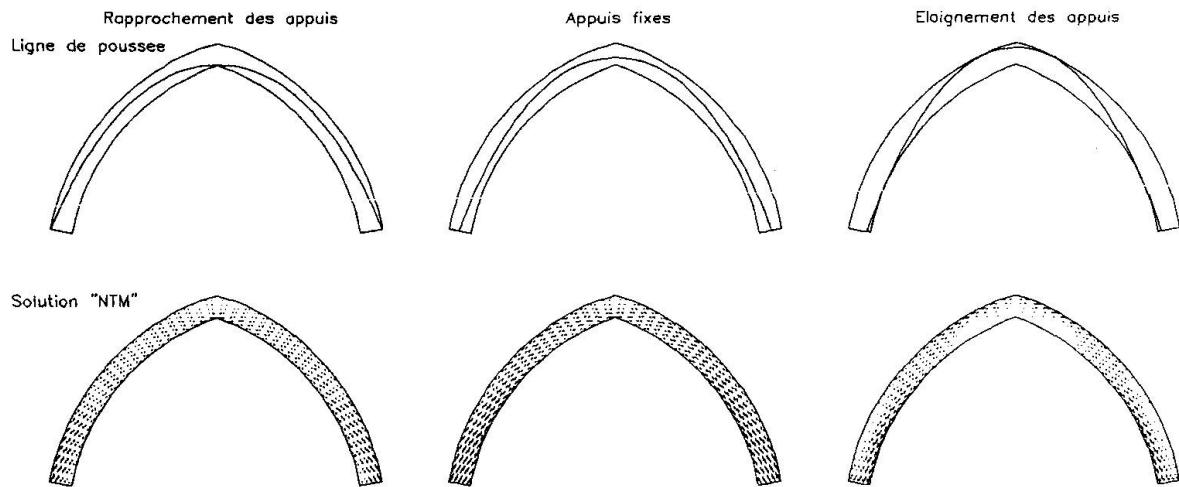


Fig. 4 Arc soumis à un éloignement et à un rapprochement de ses appuis.

#### 2.4. Modélisation d'un panneau de maçonnerie

Le programme CALPA a principalement été développé pour l'analyse de structures bidimensionnelles. Nous l'avons testé sur un élément bidimensionnel élémentaire pour lequel nous possédons une solution théorique, un panneau rectangulaire.

On sait [2] qu'une force appliquée sur un tel panneau ne diffuse absolument pas à l'intérieur de celui-ci. Ce résultat se retrouve bien en utilisant le programme.

On a également testé l'influence d'une force latérale de confinement. Si la force de confinement est égale à la force verticale, la solution NTM est identique à la solution standard, cette dernière étant acceptable ( $\sigma_1 < 0$  partout). Si la force de confinement est beaucoup plus faible (5 fois par exemple), l'interprétation est plus complexe. Il est néanmoins possible de distinguer dans le panneau les zones  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . Pour un panneau constitué d'un matériau standard, les isostatiques sont courbés alors que pour un panneau de NTM, il y a des zones  $R_1$  où elles sont droites (formant des barres structurelles) et des zones  $R_2$  de transition entre celles-ci.

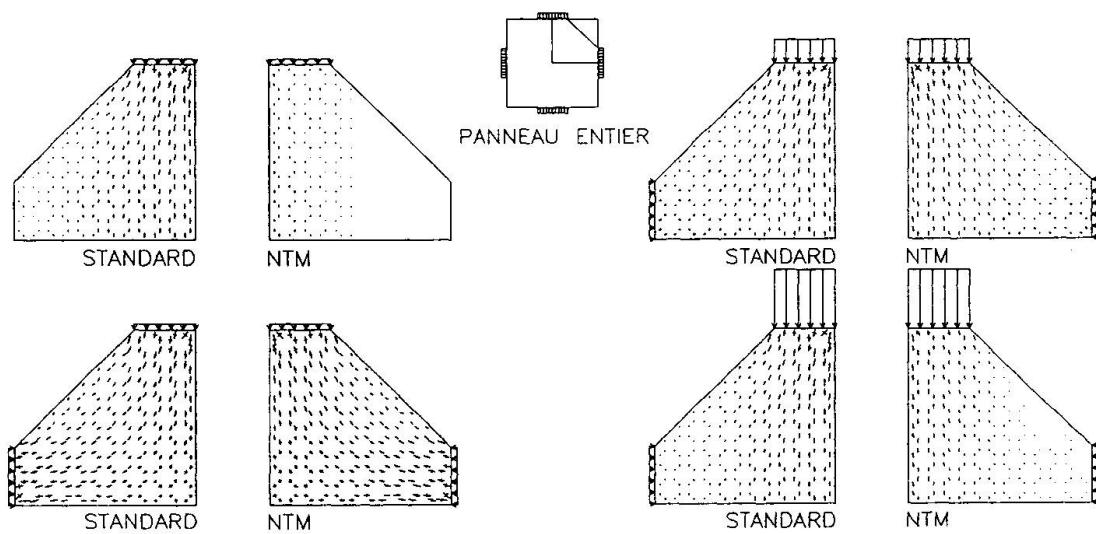


Fig. 5 Panneau de matériau NTM soumis à différentes charges.

La soudaine transition de zone  $R_0$  à la zone  $R_1$  s'exprime dans les structures réelles par des fissures. Celles-ci se présentent souvent sous les appuis des poutres maîtresses dans les structures traditionnelles en brique et bois.

On analyse également un panneau rectangulaire posé à ses extrémités. La formation à l'intérieur du panneau d'un ensemble d'arcs est bien visible.

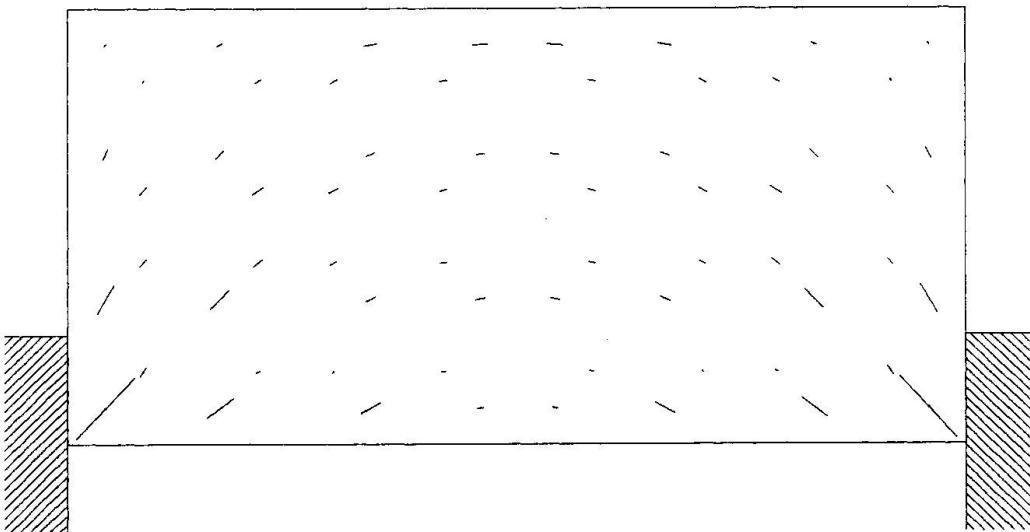


Fig. 6 Panneau de NTM sur deux appuis et soumis à son propre poids.

L'emploi du modèle illustre bien la séparation de la maçonnerie en zones structurelles et de remplissage. L'ouverture des appuis du panneau de la Fig.4 conduirait ainsi à la chute de la partie basse (comme les zones 1 et 1' de la Fig.2) et à la formation d'un arc structurel soutenant la partie supérieure. Ce type de comportement, caractéristique de la maçonnerie a conduit les maîtres maçons de l'époque à la recherche des formes structurelles optimales.

### 3. CONCLUSIONS

Les exemples donnés montrent que le modèle NTM présenté fournit des résultats très différents des modèles élastiques, plus proches de la réalité et comparables au résultats des anciens modèles (utilisants la méthode de Méry) pour des problèmes simples tout en conservant l'avantage de la méthode des éléments finis, apte à traiter des problèmes extrêmement généraux.

### NOTATION

$\sigma_1, \sigma_2$	: contraintes principales.
$\Delta$	: matrice du tenseur des fractures.
$D$	: matrice du tenseur des déformations.
$\text{tr}\Delta$	: trace de la matrice $\Delta$ .
$\det\Delta$	: déterminant de la matrice $\Delta$ .
$^n u$	: vecteur déplacement à l'itération $n$ .
$R$	: matrice de rigidité de la structure.
$F$	: vecteur des forces extérieures.
$v$	: coefficient de Poisson.
$\mathfrak{E}$	: énergie complémentaire.

### REFERENCES

1. BENVENUTO E., L'ingresso della storia nelle discipline strutturali, in Palladio, n°1 giugno 1988.
2. DI PASQUALE S., Statica dei solidi murari, teoria ed esperienze, preprint dipartimento di costruzioni, Firenze, 1984.
3. DOLTSINIS I.St., Nonlinear concepts in the analysis of solids and structures, in CISM courses and lectures n°300, pp.1-79, Springer Verlag, Wien New-York.
4. GIAQUINTA M., GIUSTI E., Researches on the equilibrium of masonry structures, in Arch. Rat. Mech. Analysis, 88, 1985.
5. HEYMAN J., The stone skeleton, in Int.J.Solids and structures, vol.2, 1966, pp.249-279.
6. HEYMAN J., The masonry arch, Ellis Horwood, Chichester, West Sussex, 1982.
7. SMARS P., Etudes sur les structures en maçonneries, mémoire présenté au Centre d'Etudes pour la Conservation du Patrimoine Architectural et Urbain R.Lemaire, K.U.Leuven, 1992, 221 p., Leuven.
8. STABLE-UNSTABLE, La consolidation des structures anciennes, actes du colloque, Leuven University Press, Leuven, 1988.
9. VAN BALEN K., Karbonatatie van kalkmortel en haar invloed op historische structuren (La carbonatation de la chaux et son influence sur le comportement des structures anciennes), thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, K.U.Leuven, décembre 1991, 281 p., Leuven.
10. ZIENKIEWICZ O.C., The finite element method, McGraw-Hill, London, 1977.