

# Biege- und Membrantragwirkung von ebenen Fassadenelementen unter Windlasten

Autor(en): **Völkel, Gerhard / Schiebl, Hans Georg**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE reports = Rapports AIPC = IVBH Berichte**

Band (Jahr): **49 (1986)**

PDF erstellt am: **23.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38319>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Biege- und Membrantragwirkung von ebenen Fassadenelementen unter Windlasten

Transmitting Wind Loads on Flat Facade Plates by Bending and Membrane Effects

Eléments de façade plans sous charges de vent résistant par flexion et effet de membrane

### Gerhard VÖLKELE

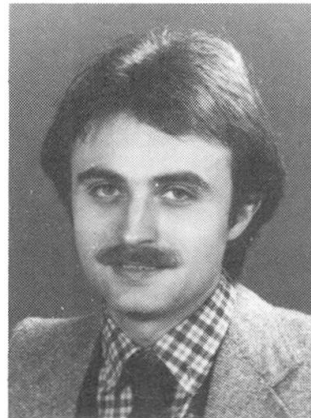
Dr. Ing.  
Otto-Graf-Institut  
Stuttgart, BR Deutschland



G. Völkel, geb. 1936; 1964 Dipl.-Ing.; 1970 Dr.-Ing., TH Darmstadt; 1971-1976 Beratender Ing. v. Tetra Darmstadt; 1976-1982 Referatsleiter, Gerüstbau beim IfBt; 1982-heute Leiter der Abt. Baukonstruktionen, FMFA B.W.

### Hans Georg SCHIEBLE

Dipl.-Ing.  
Otto-Graf-Institut  
Stuttgart, BR Deutschland



H. G. Schiebl, geb. 1955; 1981 Dipl.-Ing. für Bauwesen von der Univ. Karlsruhe; 1983 Dipl.-WirtschaftsIng. von der TFH Berlin; 1983-heute Wissenschaftlicher Angestellter an der FMFA B.W.

### ZUSAMMENFASSUNG

Für dünnwandige, zweiseitig und vierseitig gelagerte rechteckige und ebene Fassadenplatten werden analytisch geschlossene Lösungen der Differentialgleichung für das Gleichgewicht am verformten System unter Berücksichtigung von nichtlinearer Geometrie bei den Verträglichkeitsbedingungen vorgestellt. Ergebnisse aus Rechnung und Versuch werden verglichen.

### SUMMARY

For thin-walled rectangular and flat facade plates which are supported along two or four edges, complete analytical solutions of the differential equation for equilibrium of the deformed system are presented, including the non-linear geometry in the conditions of compatibility. Results of calculation and of tests are compared.

### RÉSUMÉ

Cette contribution présente des solutions analytiques complètes de l'équation différentielle exprimant l'équilibre des systèmes déformés d'éléments de façade plans, rectangulaires et à parois minces appuyés sur deux ou quatre bords. Cette analyse prend en compte dans les conditions de compatibilité la non-linéarité géométrique des éléments. Les résultats de l'analyse sont finalement comparés à des résultats d'essais.

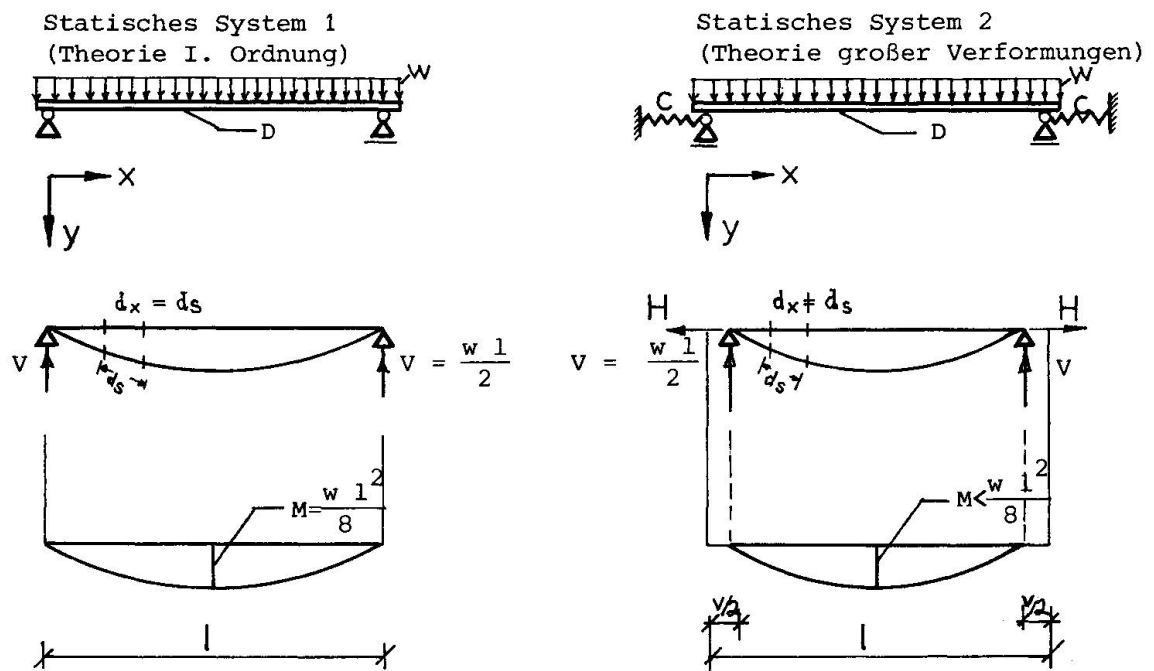


## 1. EINLEITUNG

Großflächige, rechtwinklige und ebene Fassadenplatten aus den Werkstoffen Aluminium, Stahl, Kunststoff, Keramik und aus Verbundwerkstoffen werden insbesondere in Kombination als Sandwichelemente in zunehmendem Maße für Außenwandbekleidungen von Bauwerken eingesetzt. Diese Platten werden in der Regel neben ihrem Eigengewicht und evtl. Schnee- und Eislasten hauptsächlich durch Windlasten und durch Zwängungen infolge Temperatur beansprucht und sind als in statischer Hinsicht untergeordnete Bauteile relativ schlank und biegeweich ausgelegt.

Großflächige und biegeweiche Platten erreichen bei den nach den Regeln der Technik anzusetzenden Windlasten oft Feldmittendurchbiegungen, die das Vielfache ihrer Dicke erreichen. Um den Schnittgrößenverlauf in einer Platte mit einer im Verhältnis zur Plattendicke großen Durchbiegung wirklichkeitsnah erfassen zu können und um die Horizontalkräfte in den Befestigungsmitteln überhaupt bestimmen zu können, müssen die üblichen Näherungen der Statik aufgegeben werden. Es wird erforderlich, das Gleichgewicht am verformten System aufzustellen und bei den Verträglichkeitsbedingungen Anteile aus nichtlinearer Geometrie zu berücksichtigen.

Bei einer einachsig gespannten Fassadenplatte, die z.B. mit Nieten oder Schrauben an der Unterkonstruktion befestigt ist, werden sich mit steigender Querbelastung und damit zunehmender Durchbiegung infolge der in Längsrichtung elastisch gehaltenen Plattenrändern Membrankräfte aufbauen, siehe Bild 1.

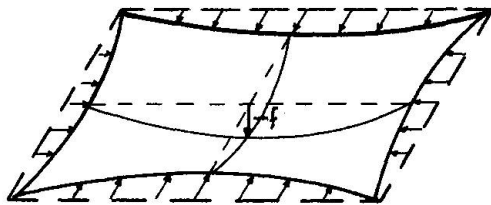


**Bild 1.** Einachsig gespannte Platte unter Windlast  $w$

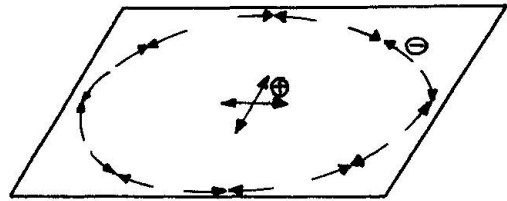
Ähnlich verhält es sich bei der vierseitig liniengelagerten Platte. Durch die großen Durchbiegungen der Platte werden ihre Ränder zur Feldmitte gezogen. Im Gegensatz zur einachsig gespannten Platte werden hier nicht Befestigungsmittel zur Aufnahme der entstehenden Zugkräfte benötigt.

Durch die Linienlagerung bleiben die Randbereiche der Platte weitgehend eben und wirken als ringförmig aussteifende Scheiben, in die sich die biegeweiche Membran hineinhängen kann (innere Membrantragwirkung). In Bild 2 sind Verformungen, in Bild 3 der resultierende Druckring und die Hauptrichtungen der Zug-

spannungen im Feld schematisch dargestellt.



**Bild 2.** Verformungsbild einer vierseitig freidrehbar und in der Plattenebene frei verschieblich gelagerten Platte

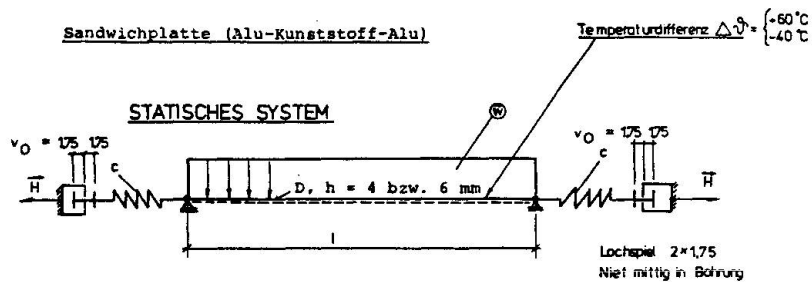


**Bild 3.** Innerer Membranspannungszustand in einer Platte, die, wie in Bild 2 dargestellt, verformt ist.

2. ABBILDUNG DES REALEN SYSTEMS EINER EINACHSIG GESPANNTEN PLATTE IN EIN MECHANISCHES MODELL

2.1 Statisches System

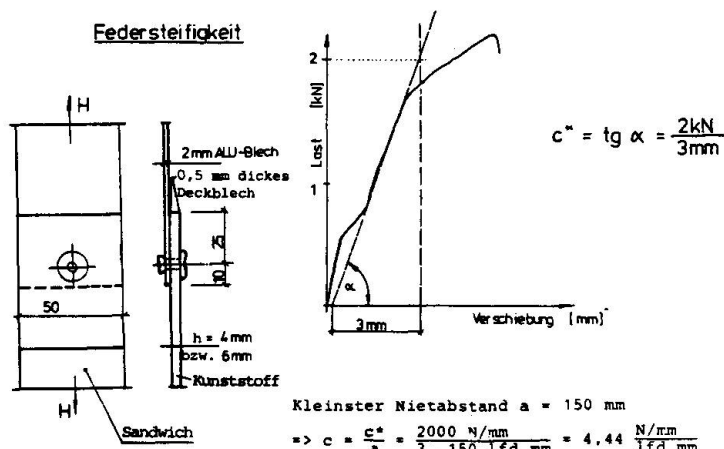
Das statische System des betrachteten Stabes ist in Bild 4 dargestellt.



**Plattensteifigkeit**  $D = \frac{EJ}{1-\mu^2} = \begin{cases} 240,10^3 \text{ N mm}^2/\text{lfd mm} & (4 \text{ mm Platte}) \\ 590,10^3 \text{ N mm}^2/\text{lfd mm} & (6 \text{ mm Platte}) \end{cases}$   
(nach Zulassung)

**Widerstandsmoment**  $W = \begin{cases} 1,715 \text{ mm}^3/\text{lfd mm} & (4 \text{ mm Platte}) \\ 2,810 \text{ mm}^3/\text{lfd mm} & (6 \text{ mm Platte}) \end{cases}$

**Federsteifigkeit**

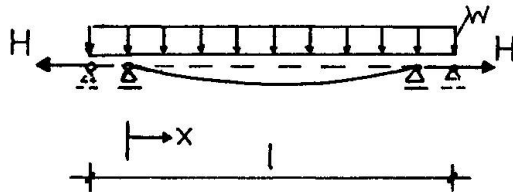


**Bild 4.** Systemannahme für die einachsig gespannte Platte und Steifigkeiten für ein Beispiel eines Sandwichelementes



## 2.2 Differentialgleichung (DGL) und deren Lösung

Die Differentialgleichung eines Stabes mit konstanter horizontaler Zugkraft am Stabende und mit konstanter Streckenlast querbelastet, entsprechend Bild 5,



**Bild 5.** Statisches System eines mit einer konstanten Zugkraft  $H$  und einer konstanten Streckenlast  $w$  querbelasteten Stabes

lautet bei der Aufstellung des Gleichgewichts am verformten System:

$$\text{DGL: } Y''''(x) - \alpha^2 \cdot Y''(x) + \frac{M_0(x)}{D} = 0 \quad (1)$$

$$\alpha^2 = H/D, \quad \xi^2 = H \cdot l^2/D = \alpha^2 \cdot l^2$$

$$M_0(x) = \text{Momentenverlauf nach Theorie I. Ordnung}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet:

$$Y(x) = C_1 \cdot \text{Sinh}(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot x) + \frac{1}{H} \cdot (M_0(x) + \frac{M_0''(x)}{\alpha^2} + \dots) \quad (2)$$

Die Berücksichtigung der Randbedingungen und der speziellen Last für das in Bild 5 dargestellte System ergibt die folgende Lösung:

$$Y(x) = \frac{w \cdot l^4}{D \cdot \xi^4} \left[ \gamma \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot x) + \text{Sinh}(\alpha \cdot x) + \frac{\xi^2}{2} \cdot \frac{x}{l} \cdot (1 - \frac{x}{l}) - 1 \right] \quad (3)$$

$$\text{mit } \gamma = \frac{1 - \text{Cosh } \xi}{\text{Sinh } \xi}$$

Die Verkürzung des Stabes infolge seiner Durchbiegung  $y(x)$  ergibt sich entsprechend Bild 6 wie folgt:

$$\begin{aligned} dx &= ds \cdot \cos\beta \\ dv &= ds - dx \\ &= (1 - \cos\beta) \cdot ds \end{aligned}$$

$$\text{für } y'^2 \ll 1 \rightarrow 1 - \cos\beta = 1 - 1 + \frac{y'^2}{2!} + \frac{y'^4}{4!} - \dots \approx \frac{y'^2}{2}$$

$$v = \int_0^l dv = \int_0^l \frac{y'^2}{2} ds \quad (4)$$

**Bild 6.** Geometrischer Zusammenhang zwischen Durchbiegung und Auflagerver-schiebung

Differenzieren von Gleichung (3) und Einsetzen in Gleichung (4) ergibt:

$$v = \frac{1}{4} \cdot \frac{w^2 \cdot l^7}{D^2 \cdot \xi^2} \left[ \frac{\xi^3}{12} + (\gamma^2 - 5) \cdot \frac{\xi}{2} - 5 \cdot \gamma \right] \quad (5)$$

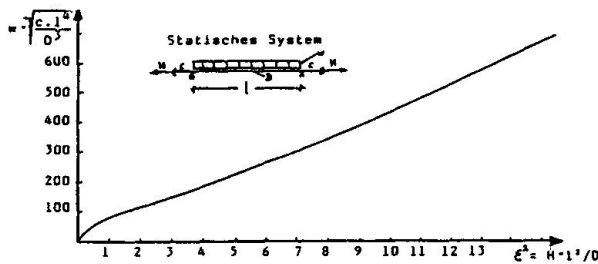
Die Erfüllung der Verträglichkeitsbedingungen zu den Längsfedern am Stabende erfordert:

$$\frac{H}{C} = V(w, l, D, \xi) \quad (6)$$

$w$  kann damit in Abhängigkeit von den anderen Parametern explizit dargestellt werden:

$$w \cdot l^3 \cdot \sqrt{\frac{C}{D^3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{12 \cdot \xi^9}{\xi^3 + 6 \cdot (\gamma^2 - 5) \cdot \xi - 60 \cdot \gamma}} \quad (7)$$

Der funktionale Zusammenhang von Gleichung (7) ist in Bild 7 dargestellt.

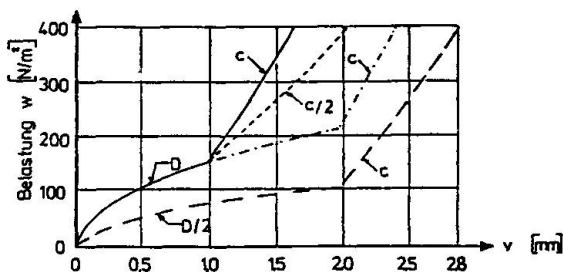


**Bild 7.** Grafische Darstellung des funktionalen Zusammenhangs der Gleichung (7)

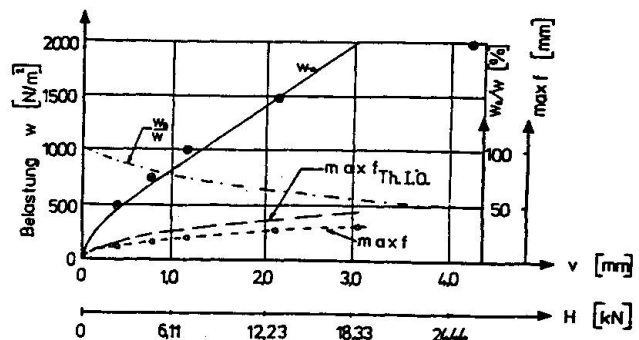
### 2.3 Vergleich der Ergebnisse aus Rechnung und Versuch an einigen Beispielen

In Bild 8 sind Last-Auflagerverschiebungskurven für ein System wie in Bild 4 abgebildet für unterschiedliche Lochspiele ( $v_0$ ), Federsteifigkeiten  $c$  und Biegesteifigkeiten  $D$  dargestellt. Vergleichsrechnungen mit der Methode der Finiten Elemente für geometrisch nichtlineare Systeme ergaben im Vergleich zu der hier vorgestellten Lösung bis zu einer Feldmittendurchbiegung  $\max f/h = 9,2$  bei den Verformungen in Feldmitte keine größeren Abweichungen als 1,8 %, bei den maximalen Spannungen keine größeren als 3,3 % und bei den Auflagerverschiebungen keine größeren als 4,0 %.

Bild 9 zeigt eine Last-Durchbiegungskurve für die Plattenmitte und eine Last-Auflagerverschiebungskurve, wie sie mit dem hier vorgestellten Modell errechnet wurden, und an 5 Stellen, welche mit Kreisen gekennzeichnet sind, in Bauteilversuchen gemessene Werte. Zum Vergleich wurden die Werte der Durchbiegung in Feldmitte nach Theorie I.0. berechnet und mit einer unterbrochenen Linie eingezeichnet. Weiter ist in Bild 9 der Lastabtragungsanteil der Biegetragwirkung bezogen auf die Gesamtlast dargestellt.



**Bild 8.** Last-Auflagerverschiebungskurven für verschiedene  $v$ ,  $c$  und  $D$



**Bild 9.** Theoretisch berechnete Kurven und einzelne Meßwerte (⊙, ○) aus Bauteilversuchen



### 3. NÄHERUNGSLÖSUNG FÜR EINE ZWEIACHSIG GELAGERTE PLATTE MIT INNERER MEMBRAN-TRAGWIRKUNG

#### 3.1 Analytische Lösung des Biege-Membran-Problems

Gleichung (8) gibt eine Näherungslösung für die freidrehbar und in der Plattenebene verschieblich liniengelagerte Platte nach Barés [1] wieder, die insbesondere auf die Anwendung für Sandwichplatten hin modifiziert wurde.

$$\frac{16 \cdot w \cdot a^4}{\pi^6 \cdot D \cdot h} = (\gamma^2 + 1)^2 \cdot f/h + \frac{2,00 \cdot \gamma^2 \cdot (1 - \mu^2)}{(\gamma^2 + 0,6 + \frac{1}{\gamma^2})} \cdot \frac{t \cdot f^3/h}{h^3 - (h-t)^3} \quad (8)$$

mit  $w$  = gleichmäßige Flächenlast

$\gamma$  = Seitenverhältnis der Platte ( $\gamma = a/b$ )

$a$  = kurze Seite der Platte

$t$  = Dicke der beiden Deckbleche

$h$  = Höhe des Sandwichelements

$f$  = Plattenmittendurchbiegung

$d$  = Plattensteifigkeit ( $D = EI/(1-\mu)^2 = E \cdot \frac{h^3 - (h-t)^3}{12(1-\mu)^2}$ )

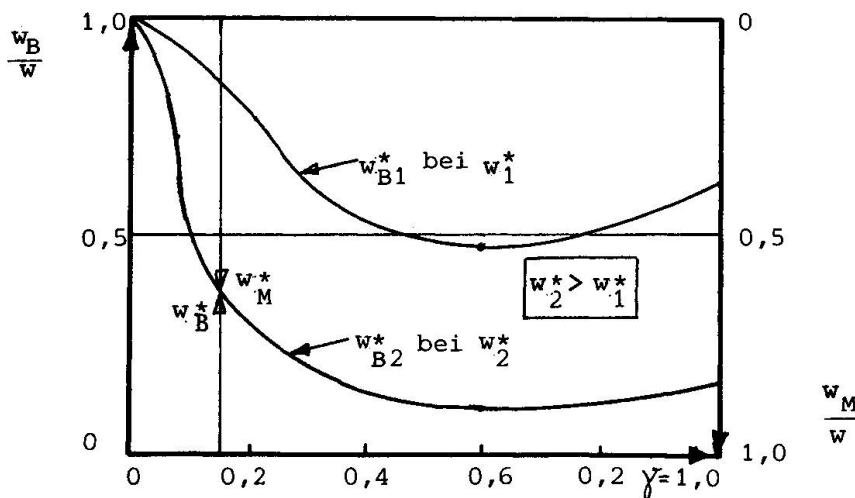
Spaltet man die Gleichung (8) nach ihrem Linearanteil, welcher die Biegetragwirkung berücksichtigt, und kubischen Anteil, welcher die Membrantragwirkung beinhaltet, auf, so erhält man Gleichung (9) und (10).

$$w = w_B + w_M \text{ oder } 1 = w_B^* + w_M^*, w_{B,M} = \frac{w \cdot 16 \cdot a^4}{\pi^6 \cdot D \cdot h} \cdot w_{B,M}^*$$

$$\Rightarrow w_B^* = (\gamma^2 + 1)^2 \cdot \frac{\pi^6 \cdot D}{16 \cdot a^4} \cdot \frac{f}{w} \quad (9)$$

$$w_M^* = \frac{2,00 \cdot \gamma^2 \cdot (1 - \mu^2)}{\gamma^2 + 0,6 + \frac{1}{\gamma^2}} \cdot \frac{\pi^6 \cdot D}{16a^4} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{t \cdot f^3/h}{h^3 - (h-t)^3} \quad (10)$$

In Bild 10 sind die Lastanteile für zwei unterschiedlich hohe Belastungen  $w_1^*$  und  $w_2^*$  in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis wiedergegeben.



**Bild 10.** Lastabtragungsanteile aus Membran- und Biegetragwirkung (qualitativer Verlauf) in Abhängigkeit von Plattenseitenverhältnis  $\gamma$  und der Lasthöhe  $w^*$  (Die Summe aus  $w_B^*$  und  $w_M^*$  gibt immer 1)

### 3.2 Vergleich der Ergebnisse aus Rechnung und Versuch für einige Beispiele

In Bild 11 sind die Mittendurchbiegungskurven von vierseitig gelagerten Sandwichplatten für zwei verschiedene Kernschichtdicken  $h$ ; ( $h_1 = 4 \text{ mm}$ ,  $h_2 = 6 \text{ mm}$ ) und jeweils zwei verschiedene Seitenverhältnisse  $\gamma_i$

$$\gamma_{11} = \frac{1,22 \text{ m}}{1,22 \text{ m}}, \gamma_{12} = \frac{1,22 \text{ m}}{3,66 \text{ m}}, \gamma_{21} = \frac{1,47 \text{ m}}{1,47 \text{ m}}, \gamma_{22} = \frac{1,47 \text{ m}}{3,66 \text{ m}}$$

angegeben. Ferner sind die Versuchswerte an einzelnen Laststufen durch Symbole gekennzeichnet.

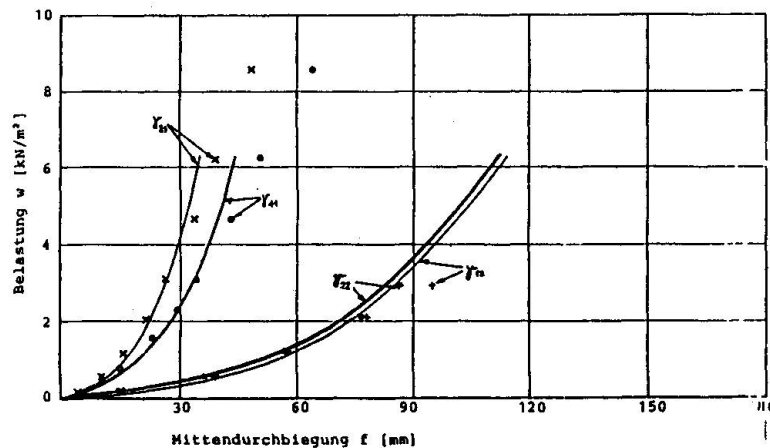


Bild 11. Last-Verformungskurven von Sandwichplatten, die mit einer gleichmäßigen Flächenlast  $w$  beaufschlagt werden.

Krümmungen bzw. Spannungen lassen sich jedoch nach dieser Formel wegen der sinusförmigen Ansatzfunktion der Lösung nur sehr ungenau, aber meist auf der sicheren Seite liegend, angeben.

#### 4. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Für den mit konstanter Flächenlast querbelasteten Plattenstreifen, der an den beiden liniengelagerten Rändern in Plattenebene elastisch gehalten ist, wird eine analytisch geschlossene Lösung angegeben. Ferner wird eine analytische Näherungslösung für die Last-Mittendurchbiegungsbeziehung einer vierseitig liniengelagerten und mit einer konstanten Flächenlast querbelasteter, rechteckiger Platte angegeben, welche die innere Membrantragwirkung der Platte berücksichtigt.

Meßwerte aus Bauteilversuchen werden mit Hilfe der angegebenen Gleichungen berechneten Werten gegenübergestellt. Versuchswerte und berechnete Werte stimmen gut überein.

Die angegebenen analytischen Lösungen ermöglichen somit, die Membrankrafteffekte von den genannten Plattentypen mit großen Durchbiegungen wirklichkeitsnah und im Vergleich zu numerischen Berechnungsverfahren wie z.B. mit der Methode der Finiten Elemente und mit dem Differenzenverfahren ohne Computereinsatz relativ einfach für praktische Fälle genügend genau zu berechnen.

#### LITERATUR

- [1] BARÈS, RICHARD, Berechnungstabeln für Platten und Wandscheiben. Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin (Germany), 3. Auflage, 1979, Seite 549.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide