

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen  
**Band:** 23 (1975)  
**Artikel:** Phénomène de saut dans le problème de flambement eulerien  
**Autor:** Leites, S.D.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19803>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

PHENOMENE DE SAUT DANS LE PROBLEME DE FLAMBEMENT EULERIEN

S.D. Leites  
Gosstroy  
Moscow  
USSR

ABSTRACT

A more exact solution of non-linear buckling of columns is obtained, based on the governing differential equation whose curvature expressions are modified to correspond to ten real values. The non-linear differential equations are solved numerically and the phenomenon of "jump" (the discontinuity of the two states of equilibrium) is analysed as an Eulerian problem. The rigidity of the column is observed to be reduced when the geometric non-linearity is taken into account. The results obtained show the relation of the phenomenon of "jump" and the level of bifurcation.

## 1. INTRODUCTION

Il n'existe de système idéal (c'est-à-dire dépourvu de toute imperfection) ni dans la nature, ni dans le domaine technique. C'est pourquoi il ne faut envisager un système idéal que comme un résultat de la transition limite à partir du système non idéal.

De ce point de vue le problème classique Euler concernant la bifurcation d'équilibre d'une barre élastique comprimée axialement présente un cas limite du problème plus général, celui du comportement de la barre comprimée et fléchie.

Le présent exposé donne une analyse de grands déplacements d'une barre élastique biarticulée soumise à une charge de compression appliquée avec des excentricités inégales, cette analyse étant faite par voie de l'intégration de l'équation différentielle de flexion qui comprend une expression précise de courbure.

Plusieurs études ont été consacrées aux problèmes de grands déplacements des barres élastiques sollicitées aussi bien en compression simple qu'en compression avec flexion. C'étaient J.-L. Lagrange [18], L. Saalschütz [20], G.H. Halphen [16], C.J. Kriemler [17], M. Born [12], L. Malkin [19] et beaucoup d'autres qui s'en occupaient.

Une différence essentielle entre le présent exposé et les études précédentes basées d'ailleurs sur le même mécanisme mathématique, consiste en une plus large interprétation des relations analytiques obtenues. Pour une barre comprimée et fléchie (système non idéal) il existe au moins deux séries de solutions des équations de calcul. La première série reflète des états primaires d'équilibre d'une barre correspondant à une croissance naturelle de la compression. La deuxième série de solutions que les auteurs mentionnés ci-dessus passent sous silence, reflète des états secondaires d'équilibre d'une barre qui ne peuvent pas avoir lieu au cours de cette croissance naturelle de la compression. Il n'est possible de "jeter" une barre à un état secondaire d'équilibre qu'à l'aide du saut, c'est-à-dire d'un procédé de transition à travers les états d'équilibre adjacents. Les états primaires d'équilibre sont toujours stables, tandis que ceux secondaires se divisent en stables et instables. Une valeur minima de la force de compression qui rend possibles des états secondaires d'équilibre est nommée transcritique [5]. Sur la courbe de comportement d'une barre (déformation caractéristique - force de compression) le point transcritique sert de limite pour les états secondaires de l'équilibre stable et instable.

Lorsque le paramètre d'une non-idéalité tend vers zéro, on obtient une solution du système idéal (barre soumise à une compression simple ou bien à une charge de compression appliquée à ses extrémités avec des excentricités égales mais diamétralement opposées). La forme d'équilibre du système idéal à un état non-troublé (avant-critique) est orthogonale à sa forme primaire, c'est-à-dire à la courbe de flambement. Dès qu'une force de compression gagne sa valeur critique, le système idéal subit un flambement au sens eulérien, et alors une bifurcation d'équilibre a lieu. Une analyse montre qu'il faut considérer cette bifurcation comme un cas limite du phénomène de saut, et notamment, comme un saut de longueur nulle.

Une telle interprétation du problème Euler a été illustrée [5] grâce à une analyse des états primaires et secondaires d'équilibre d'une barre comprimée et fléchie par une charge appliquée à ses extrémités avec des excentricités égales. La transition limite vers une compression simple a mis en lumière une corrélation mentionnée ci-dessus entre le phénomène de bifurcation et celui de saut. Avec cela, il faut considérer la force critique eulérienne comme une limite inférieure de la force transcritique réalisable au fur et à mesure de la réduction de l'excentricité au zéro.

Quelques résultats de l'étude [5] ont été reproduits dans l'exposé de T. Renzulli [21], deux années plus tard.

## 2. BARRE COMPRIMEE ET FLECHIE CHARGEE AUX EXTREMITES AVEC DES EXCENTRICITES INEGALES

Nous allons étudier des déplacements de flexion dans le plan des forces appliquées à une barre initialement rectiligne (fig. 1) tout en négligeant des déformations de compression axiale. On désigne par :

- x - l'abscisse d'un point situé sur la ligne élastique de la barre et mesurée à partir de son appui gauche fixe,
- y - l'ordonnée d'un point situé sur la ligne élastique de la barre et mesurée à partir de l'axe initial rectiligne, une direction de la flèche vers le bas est estimée comme positive,
- s - la longueur de l'arc de la ligne élastique de la barre mesurée à partir de l'appui gauche,
- $\theta$  - L'angle de rotation de la section autour de l'appui gauche, la rotation au sens des aiguilles de montre est estimée comme positive,
- l - la longueur de la barre,
- $x_1$  - la distance entre les extrémités de la barre déformée,
- EI - la rigidité de la barre lorsque celle-ci fléchit dans le plan de l'application des forces,
- N - la force normale de compression,
- H - la réaction d'appui perpendiculaire à l'axe non-déformé de la barre,
- a - l'excentricité de la force de compression appliquée à l'appui gauche,
- $\kappa a$  - l'excentricité de la force de compression appliquée à l'appui droit ( $-1 \leq \kappa \leq 1$ ).

L'équation différentielle de flexion de la barre est du type suivant :

$$EI \frac{d^2 y}{ds^2} \left[ 1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + N(a+y) - Hx = 0 \quad (1)$$

Cette équation comprend une expression de courbure proposée par F.S. Iassinski [11] .

En posant  $\alpha^2 = N/EI$ ,  $\beta = H/N$  (2)

on peut écrire la solution de l'équation (1) sous la forme paramétrique :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\alpha(1+\beta^2)^{3/4}} \left[ 2K\beta (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1-2k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \right] \\ y &= \frac{2K}{\alpha} (1+\beta^2)^{1/4} \cos \varphi + \beta x - \alpha \\ s &= \frac{1}{\alpha(1+\beta^2)^{1/4}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

où :  $\varphi$  est une variable auxiliaire (paramètre) et  $\varphi_0$  est une amplitude (la valeur de cette variable pour  $x = 0$ ,  $s = 0$  et le module  $\kappa$  ( $|\kappa| < 1$ ) jouent le rôle de constantes d'intégration).

Il est possible de transformer des intégrales elliptiques définies par la solution (3) en une forme normale de Legendre en se basant sur les relations :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} &= F(\varphi, k), \quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt = E(\varphi, k) \\ \int_0^{\varphi} \frac{1-2k^2 \sin^2 t}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} dt &= 2E(\varphi, k) - F(\varphi, k) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

On peut écrire l'équation des tangentes des angles de rotation :

$$\frac{dy}{dx} = \beta - \frac{1+\beta^2}{\beta + \phi} \quad (5)$$

où :

$$\Phi = \frac{1/2 - k^2 \sin^2 \varphi}{k \sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (6)$$

l'angle de rotation de la section autour de l'appui gauche est déterminé par :

$$\operatorname{tg} \theta = \left( \frac{dy}{dx} \right)_0 = \beta - \frac{1 + \beta^2}{\beta + \Phi_0} \quad (7)$$

où la valeur  $\Phi_0$  est obtenue à l'aide de la substitution de  $\varphi_0$  par  $\varphi$  dans l'expression (6)

Lorsque le total de moments de toutes les forces appliquées à l'extrémité droite de la barre est égal à zéro, on obtient :

$$\beta x_1 = \alpha (1 - \chi) \quad (8)$$

A partir des conditions limites :

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \text{ pour } \chi=0, \quad s=0, \quad \varphi=\varphi_0 \\ y=0 \text{ pour } \chi=\chi_1, \quad s=l, \quad \varphi=\varphi_1 \end{array} \right\} \quad (9)$$

et de la relation (8) on peut trouver :

$$\cos \varphi_0 = \frac{\alpha \alpha}{2k(1+\beta^2)^{1/4}}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{\chi \alpha \alpha}{2k(1+\beta^2)^{1/4}} \quad (10)$$

La distance entre les extrémités de la barre déformée est égale à :

$$x_1 = \frac{2}{\alpha(1+\beta^2)^{3/4}} \left[ k\beta (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) - 2U \right] \quad (11)$$

La longueur de la barre est présentée par une relation ci-après :

$$l = \frac{2T}{\alpha(1+\beta^2)^{1/4}} \quad (12)$$

Pour les intégrales elliptiques dont les valeurs de  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  servant de limite, on a admis des notations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ U = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1/2 - k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \end{array} \right\} \quad (13)$$

En éliminant la valeur  $X_1$ , des équations (8) et (11) on a :

$$\beta = \frac{(1-\alpha) k \cos \varphi_0}{2U} \quad (14)$$

Si nous introduisons un paramètre sans dimension :

$$u = \alpha \ell = \sqrt{N/EI} \ell, \quad (15)$$

nous obtiendrons une expression pour la force de compression :

$$N = \frac{u^2 EI}{\ell^2} \quad (16)$$

L'expression (14) donne :

$$u = \frac{T}{(1+\beta^2)^{1/4}} \quad (17)$$

Les relations (10) et (12) mènent au système des équations de calcul :

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_1 &= X \cos \varphi_0, \\ k \cos \varphi_0 &= \frac{\alpha}{\ell} \frac{T}{\sqrt{1+\beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

### 3. ETATS PRIMAIRES ET SECONDAIRES D'EQUILIBRE D'UNE BARRE

Puisque les fonctions trigonométriques inverses sont multiformes, le système d'équations (18) a un nombre infini de solutions. Nous ne considérons ici que des solutions pour lesquelles  $u < 2\pi$  et, par conséquent, la force de compression  $N$  est inférieure à la deuxième valeur critique.

Si une valeur de l'excentricité et celle de  $k$  sont constantes, les trois valeurs  $k$ ,  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  satisfaisant aux équations (18) détermineront un certain état d'équilibre de la barre. Les trois valeurs en question forment la solution du système (20).

Dans le plan des coordonnées  $(K, \varphi)$  chacune de ces solutions est présentée par deux points (fig. 2). Un ensemble de solutions du système (18) présenté sur la figure 2 à l'aide de deux courbes  $\varphi_0(K)$  et  $\varphi_1(K)$  forme une série de solutions.

Pour  $u \leq 2\pi$  le système (18) n'aura que deux séries de solutions. La première série correspondant à un rapport des amplitudes  $\varphi_1 = \arccos(X \cos \varphi_0)$  détermine des états primaires d'équilibre qui surgissent au cours d'une croissance naturelle de la force de compression  $N$  à partir de sa valeur initiale, nulle. Le symbole  $\arccos$  correspond ici à la valeur principale de la fonction trigonométrique inverse.

La deuxième série de solutions satisfaisant à la relation  $\varphi_1 = 2\pi - \arccos(X \cos \varphi_0)$  interprète des états secondaires d'équilibre qui ne peuvent pas être

réalisés au cours de cette croissance naturelle de la force de compression  $N$ . Il n'est possible de "jeter" une barre en un état secondaire d'équilibre que par un moyen artificiel.

Si les trois valeurs  $k, \varphi_0, \varphi_1$  présentent une solution du système (18), les valeurs

$$\bar{k} = -k, \quad \bar{\varphi}_0 = \varphi_0 - \pi, \quad \bar{\varphi}_1 = \varphi_1 - \pi \quad (19)$$

correspondant à leur tour aux équations du système (18) et reflèteront le même état d'équilibre de la barre.

L'algorithme, forme commode pour réaliser un calcul à l'ordinateur, suppose une recherche des racines du système d'équations, une détermination des paramètres de l'état d'équilibre de la barre et un traçage de son axe courbe. On a pour points de départ des valeurs telles que  $a/l, \chi, \varphi_0$ . Les valeurs de  $\varphi_1$  sont calculées d'après la formule :

$$\varphi_1 = \left| \arccos (\chi \cos \varphi_0) - \varphi \right| \quad (20)$$

avec  $\varphi = 0$  ( $\varphi = 2\pi$ ) pour la première (deuxième) série de solutions ; une valeur du module  $k$  correspondant à la deuxième équation du système (18) est basée sur un procédé itératif. Ces valeurs une fois définies, on passe à la détermination du paramètre de charge  $z$  égal au rapport de la force de compression  $N$  à sa valeur eulérienne  $N_E = \pi^2 EI / l^2$ ,

$$z = \frac{N}{N_E} = \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 = \frac{4 T^2}{\pi^2 \sqrt{1+\beta^2}} \quad (21)$$

L'angle de rotation autour de l'appui gauche  $\theta$  est déterminé d'après l'équation (7).

Pour tracer l'axe courbe de la barre on utilise des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{l} &= \frac{W(\varphi) - W(\varphi_0)}{T(1+\beta^2)} \\ \frac{y}{l} &= \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{T} k \cos \varphi + \beta \frac{x}{l} - \frac{\alpha}{l} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Une désignation admise ci-dessus :

$$W(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{1/2 - k^2 \sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt - k\beta \cos \varphi \quad (23)$$



L'algorithme décrit est utilisé dans un programme pour ordinateur. Les intégrales elliptiques sont calculées d'après la formule d'intégration numérique de Simpson.

#### 4. BARRES IDEALES ET NON-IDEALES

On a analysé, à l'aide d'un ordinateur, des états d'équilibre d'une barre représentés par sept schémas qui existent pour des valeurs particulières  $a/l$  et  $\chi$ .

Schéma a,  $a > 0$ ,  $\chi = 1$  (fig. 3a). Les excentricités aux extrémités de la barre sont égales et diamétralement opposées.

Schéma b,  $a > 0$ ,  $\chi = 0,5$  (fig. 3b). Les excentricités aux extrémités de la barre ont une même direction et des valeurs absolues différentes.

Schéma c,  $a > 0$ ,  $\chi = 0$  (fig. 3c). L'excentricité à l'extrémité droite de la barre est égale à zéro.

Schéma d,  $a > 0$ ,  $\chi = -0,5$  (fig. 3d). Les excentricités aux extrémités de la barre ont des directions opposées et des valeurs différentes.

Schéma e,  $a > 0$ ,  $\chi = -0,95$  (fig. 3e). Les excentricités aux extrémités de la barre ont des directions opposées tandis que leurs valeurs absolues sont presque voisines.

Schéma f,  $a > 0$ ,  $\chi = -1$  (fig. 3f). Les excentricités aux extrémités de la barre sont égales, mais diamétralement opposées (charge antisymétrique).

Schéma g,  $a = 0$  (fig. 3g). Barre soumise à une compression simple.

Pour le calcul numérique se rapportant aux schémas a à f il est admis que  $a = 0,01l$ .

La notion d'un schéma idéal suppose une forme géométrique parfaite (dans notre cas il s'agit d'un axe rigoureusement rectiligne avant l'application d'une charge) et une charge exactement centrée (une charge de compression appliquée strictement suivant l'axe de la barre).

D'une façon plus générale, nous allons nommer idéale une barre dont la ligne élastique dès le commencement de l'application d'une charge est orthogonale à sa propre forme originale (à une courbe de flambement).

Les barres dont l'axe à un état non-troublé (avant-critique) ne correspond pas à une condition d'orthogonalité stipulée ci-dessus sont nommées non-idéales.

Dans une barre biarticulée (dont l'axe initial est rectiligne, la rigidité longitudinale constante et sa propre forme originale symétrique par rapport à la section moyenne de la barre) les schémas ci-après peuvent être rapportés aux systèmes idéaux :

Schéma f,  $\chi = -1$  (fig. 3f). L'axe courbe de la barre est antisymétrique par rapport à la section moyenne de cette barre, dès le commencement de l'application d'une charge.

Schéma g,  $a = 0$  (fig. 3g). La forme rectiligne d'équilibre reste constante pour n'importe quelle charge de compression dont la valeur est inférieure à celle d'Euler.

Dans tous les autres cas ( $\alpha > 0$ ,  $k \neq -1$ ) la barre est non-idéale.

## 5. ANALYSE DU COMPORTEMENT DES BARRES NON-IDEALES

En utilisant le programme d'ordinateur mentionné ci-dessus, nous avons obtenu les résultats numériques pour un grand nombre de problèmes particuliers et tracé les courbes du comportement pour les sept schémas indiqués sur la figure 3. Les figures 4, 5 montrent les courbes de comportement pour les schémas a et e. Ces courbes correspondent à une allure du paramètre de charge  $Z = N/N_E$  fonction du déplacement caractéristique (angle de rotation autour de l'appui gauche).

La courbe OLM sur ces abaquages se rapporte aux états primaires de l'équilibre qui est stable pour  $N < N_E$  ainsi que pour  $N > N_E$ .

Des états secondaires d'équilibre sont représentés par la courbe RTS, la branche RT y correspondant à l'équilibre stable et la branche TS à l'équilibre instable de la barre.

Le point T sert de limite entre des états secondaires de l'équilibre stable et instable. Une force de compression spécifique de cette limite est nommée transcritique [5] :

$$N_t = \frac{U_t^2 EI}{l^2} = Z_t N_E \quad (24)$$

La force transcritique est une valeur minima de la force de compression rendant possible l'apparition des états secondaires d'équilibre, pour une valeur donnée de l'excentricité  $a/l$ . Une étude théorique de cette force transcritique est basée sur la condition de stabilité ci-après :

$$\frac{dN}{d\theta} = 0 \quad (25)$$

Une interprétation développée de ce critère pour une barre à une extrémité encastrée et une autre libre est donnée dans un autre exposé [5] .

A chaque valeur de la force de compression  $N < N_t$  ne correspond qu'un seul état d'équilibre de la barre, et notamment, l'état primaire, stable. A chaque valeur de la force de compression  $N > N_t$  correspondent trois états d'équilibre de la barre, et notamment un état primaire, stable, et deux autres secondaires dont l'un est stable (celui qui est caractérisé par des déplacements de valeur absolue plus grande) et l'autre instable (celui qui est caractérisé par des déplacements de valeur absolue plus petite).

La figure 6 représente une allure de la force transcritique  $N_t$  en fonction du rapport des excentricités  $\chi$  dont une ( $a/l$ ) est fixée d'avance. Aux environs du point  $\chi = -1$  la force transcritique  $N_t$  est un peu inférieure à la valeur eulérienne  $N_E$  l'ordre de grandeur de la différence  $N_E - N_t$  (pour des élancements et des excentricités ordinaires) ne dépassant que quelques centièmes du pour cent.

Sur la fig. 7 est rapporté un tracé de la force transcritique  $N_t$  en fonction de l'excentricité  $a/l$  pour  $\chi = 1$  (les excentricités aux extrémités de la barre sont égales).

## 6. ANALYSE DU COMPORTEMENT ET DE LA STABILITE D'UNE BARRE CHARGEE ANTISYMETRIQUEMENT

Une barre comprimée et fléchiée par une charge appliquée à ses extrémités avec des excentricités égales et diamétralement opposées (schéma e,  $a > 0$ ,  $\alpha = -1$ , fig. 3f) se rapporte aux barres idéales.

Il est assez difficile d'analyser ce cas, une interprétation contradictoire de ce problème dans la littérature spéciale en étant la preuve. G. Bürgermeister et H. Steup [13], auteurs d'une monographie volumineuse concernant la théorie de stabilité, se réfèrent à une étude de W. Cornelius et estiment qu'une bifurcation d'équilibre a lieu dès le commencement de l'application d'une charge, c'est-à-dire pour une force nulle de compression. Le point de vue de G.O. Iarochévitch [10] est tout à fait contraire puisqu'il nie complètement la possibilité d'un flambement dans une barre antisymétriquement chargée.

E.G. Kossykh dans son exposé [2] donnerait une solution véritable de ce phénomène : il a constaté que la force critique devient inférieure à celle d'Euler. E.G. Kossykh a passé sous silence les problèmes des états secondaires d'équilibre et du mécanisme du flambement.

Sur la base du calcul sur ordinateur pour  $\alpha = 0, 0,1, \dots$  on a établi un abaque de comportement d'une barre chargée antisymétriquement (fig. 8) où le point  $k$  correspond à la force critique  $N_*$  et la courbe OKS à des états non troublés de l'équilibre qui est stable pour  $N < N_*$  (branche OK) et instable pour  $N > N_*$  (branche KS).

Des états troublés d'équilibre de la barre représentés sur l'abaque en question par la courbe RKM sont possibles pour  $N < N_*$  et peuvent être considérés comme ceux de l'équilibre stable. A chaque valeur de la force de compression  $N > N_*$  correspond un état non-troublé de l'équilibre instable et deux états non troublés de l'équilibre stable pour lesquels une symétrie inverse de la ligne élastique initiale (sous la forme de S) est transformée par la superposition d'une courbe de flambement symétrique (par rapport à la section moyenne de la barre).

De petites courbes aux environs du point critique K (fig. 8) représentent des états d'équilibre d'une barre non-idéale à paramètre  $\alpha = -1 + \epsilon$  où  $\epsilon$  est une quantité infime. Il est à noter d'ailleurs, que la courbe inférieure correspond aux états primaires et la courbe supérieure aux états secondaires d'équilibre.

Si on passe maintenant à une transition limite avec  $\epsilon$  se visant au zéro, ces deux courbes séparées se rapprocheront successivement et pour  $\epsilon = 0$  elles se rencontreront au point K qui caractérise une bifurcation d'équilibre dans une barre idéale chargée antisymétriquement.

En admettant que  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_1 = \pi$ , (état critique) et en se référant à l'équation (7) on peut déduire une relation précise :

$$\operatorname{tg} \theta_* = \beta = 2\alpha / \chi, \quad (26)$$

Au moment du flambement les tangentes aux extrémités de l'axe courbe de la barre deviennent parallèles à l'axe des excentricités, c'est-à-dire à une ligne reliant les points d'application des forces de compression (fig. 9).

Ce critère géométrique du flambement d'une barre chargée antisymétriquement peut être utilisé pour la solution de diverses problèmes. En particulier, E. Chwalla l'avait introduit dans son étude n'embrassant que de faibles déplacements de la barre.

En analysant la relation (17) pour  $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \pi$  on constate que la valeur critique  $u_*$  est inférieure à  $\pi$ , d'où :

$$N_* = \frac{u_*^2 EI}{\rho^2} < N_E \quad (27)$$

Cette constatation a un sens théorique plutôt que pratique, la diminution de  $N_*$  par rapport à  $N_E$  étant très faible. Le module  $K$  étant sensiblement inférieur à l'unité, on obtient une relation approximative :

$$u_* \approx \pi \left[ 1 - 0,383 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right] \quad (28)$$

Le calcul d'après cette formule et l'étude de l'abaque à échelle réduite (fig. 8) montrent qu'une réduction de la force critique pour  $a = 0,011$  n'atteint même pas un centième de pour cent.

Une non-linéarité géométrique prise en compte, la valeur de la force critique peut être précisée tandis qu'un problème géométrique linéaire ne donne qu'une valeur approximative de  $N_* \approx N_E$ . Dans le cas considéré un état non-troublé (avant-critique) de la barre est celui de déformation, c'est pourquoi une valeur réelle de la force critique dépend de l'excentricité  $a/l$ . Afin que la valeur de la force critique soit rigoureusement précisée, une analyse exacte de l'état avant-critique de contrainte est aussi nécessaire.

Il est à noter que dans le cadre du problème envisagé la prise en compte d'une non-linéarité géométrique est équivalente à une réduction de la rigidité de flexion de la barre.

Une analyse de la transition limite à partir d'une barre non idéale à paramètre  $\kappa = -1 \pm \varepsilon$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , montre que la force critique  $N_*$  appliquée à une barre chargée antisymétriquement présente une valeur limite de la force transcritique  $N_t$  :

$$N_* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_t \quad (29)$$

#### 7. ANALYSE DU COMPORTEMENT ET DE LA STABILITE D'UNE BARRE SOUMISE A UNE COMPRESSION SIMPLE

Une barre comprimée axialement est une barre idéale (schéma g,  $a=0$ , fig. 3g) Les équations de calcul (18) deviennent du type :

$$\varphi_1 = |\varphi_0 - \varphi|, \quad k \cos \varphi_0 = 0 \quad (30)$$

La fig. 10 reflète un comportement de la barre suivant lequel pour la force critique eulérienne  $N_E$  il existe une bifurcation (point K). Une analyse complète de l'abaque analogue est donnée dans un autre exposé [5] de l'auteur.

Une confrontation avec les courbes de comportement d'une barre non-idéale (schéma a,  $a > 0$ ,  $\kappa = 1$  fig. 4) montre que la courbe OKM de la fig. 10 n'est qu'une position limite (au fur et à mesure de la réduction de l'excentricité  $a$  au zéro) de la courbe OLM des états primaires d'équilibre tracée sur la figure 4. La courbe RKS de la figure 10 présente une position limite de la courbe RTS des états secondaires d'équilibre tracée sur la figure 4.

La configuration des courbes (fig. 10) aux environs du point K est poussée à l'extrême pour montrer d'une façon plus nette la nature du point de bifurcation.

L'excentricité  $a$  tendant vers zéro, le point T s'approche du point K (point de bifurcation) et ils coïncident pour  $a = 0$ . Il s'en suit que la force critique eulérienne appliquée à une barre le long de son axe présente une limite inférieure de la force transcritique :

$$N_{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_t \quad (31)$$

Soit, à une valeur quelconque de la force de compression  $N > N_t$ , correspondent trois états d'équilibre d'une barre non-idéale désignés sur la figure 4 par des caractères  $K_1, K_2, K_3$ . Une barre se trouvant dans un état primaire d'équilibre  $K_1$  ne peut être mise en état  $K_2$ , puis en état  $K_3$  qu'à l'aide du saut, c'est-à-dire à l'aide d'un procédé dynamique de transition à travers des états adjacents non équilibrés.

Ce phénomène de saut est représenté sur la figure 4 par un tracé discontinu. La longueur de saut minima  $d$  est égale à l'écart des points  $K_1$  u  $K_2$ . Au cours de la transition limite à partir de la barre non-idéale ( $d > 0$ ) vers la barre idéale ( $d = 0$ ) cette longueur de saut  $d$  décroît successivement et sa valeur limite devient nulle :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d = 0 \quad (32)$$

Cette analyse montre qu'une bifurcation d'équilibre présente un cas limite (dégradé) du phénomène de saut (saut à longueur nulle).

Pour rendre plus claires des particularités essentielles du comportement des barres élastiques soumises à une compression simple et à une compression avec flexion il est recommandé d'utiliser un prototype constitué d'un système à l'unique degré de liberté.

En étudiant le comportement de ce prototype on constate que toutes les lois établies sont inhérentes au problème en question, pour n'importe quel nombre de degrés de liberté, et elles ne sont pas liées (comme on pouvait le supposer) au caractère compliqué des fonctions transcendantes déterminant de grands déplacements de la barre élastique.

Ce prototype est décrit dans une monographie de l'auteur [4], l'analyse de son comportement étant donnée dans un autre article [5].

## 8. CONCLUSIONS

Les résultats obtenus servent à établir une corrélation entre le phénomène de bifurcation et celui de saut ainsi qu'à mettre au jour la nature de la force critique et le mécanisme du flambement dans le domaine élastique.

Les lois établies gardent leur importance pour une gamme assez large de problèmes de stabilité élastique liés au phénomène de bifurcation.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.G. Galerkin - Théorie du flambement. Izvestia St-Petersbourg skogo polytechnicheskogo instituta, v.XII, 1909, et aussi Sobranié Sotchinéni (oeuvres), v.I, ed. Académie des Sciences de l'URSS, 1952.
- [2] E.G. Kossykh - O statitchéskoï oustoïtchivosti sjato-isognoutogo sterjnia. Izvestia vyschikh outchebnyh zavédéni. Stroïtelstvo i arkhitekhtoura, No. 4, 1968.

- [3] A.N. Krylov - O formakh ravnovéssia sjatykh sjatykh stoïek pri prodolnom izgui bé. Izvestia AS URSS, No. 7, 1931 ; et aussi Sobranié troudov (Oeuvres), v.5, ed. Académie des Sciences de l'URSS, 1935.
- [4] S.D. Leites - Oustoičhivost sjatykh stalnykh sterjnei. Gosstroüzdat, 1954.
- [5] S.D. Leites - Formy ravnovessia oluprouguikh sjatykh sterjnei i priroda totchek razvetvlénia. Isslédovania po théorii sooraujéni, v. 8, Gosstroïizdat, 1959.
- [6] V. P. Manjalovski-Nékotoryié zadatchi po théorii oustoïthivosti. Naoutchno-technitcheskoïe izdatelstvo Oukraïny, Charkov, 1938.
- [7] M.M. Mostkov-Outotchnénie réchéniia voprossov oustoïthivosti i izguiba. Gossoudarstvennoïe izdatelstvo Béloroussii, Minsk, 1935
- [8] E.P. Popov - Nélineinyié zadatchi statiki tonkikh sterjnei. Gostechthéorizdat, 1948.
- [9] M.M. Filonenko - Boroditch - O nékotorykh svoïstvakh différencsialnogo ouravnénia eulérovoï zadatchi. Izvestia Moskovskogo Vyschégo technitcheskogo outchilichtcha, No. 7, 1929.
- [10] G. O. Iarochévith - Mojet li sjato-izognoutyï sterjen tériat oustoïthivost pervogo roda ? Outchenyie zapiski Khabarovskogo pédagoguitcheskogo instituta. Phisico-mathématitcheski sbornik, v.1, 1959.
- [11] F.S. Iassinski - Opyt razvitia théorii prodolnogo izguiba, St-Pétersbourg, 1893 ; et aussi Izbrannyie raboty po oustoïthivosti sjatykh sterjnei. Gostechthéorizdat, 1952.
- [12] M. Born - Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum. Dissert. Göttingen, 1906
- [13] G. Bürgermeister, H. Steup-Stabilitätstheorie mit Erläuterungen zu DIN 4114, Teil 1. Akademie-Verlag, 1957.
- [14] E. Chwalla - Aussermittlung gedrückte Baustahlstäbe mit elastisch eingespannten Enden und verschieden grossen Angriffshebeln. Stahlbau, No. 7, 8, 1937.
- [15] W. Cornelius-Der elastisch gebettete Druckstab als Spannungsproblem. Stahlbau, 1944.
- [16] G.H. Halphen-Sur une courbe élastique. Journal de l'école polytechnique, 1884.
- [17] C.J. Kriemler - Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren. Dissert, Karlsruhe, 1902.
- [18] J.L. Lagrange - Sur la figure de colonnes. Miscelanea Tourinensia, v. 5, 1770-1773.
- [19] L. Malkin-Formänderung eines axial gedrückten dünnen Stabes. Zeitung für angew. Math. und Mech, No. 1, 1926.
- [20] L. Saalschütz - Der belastete Stab unter einer seitlichen Kraft. Leipzig, 1880
- [21] T. Renzulli - Configurazioni di equilibrio di una trave caricata di punta. Ingegneria, No. 7, 1961.



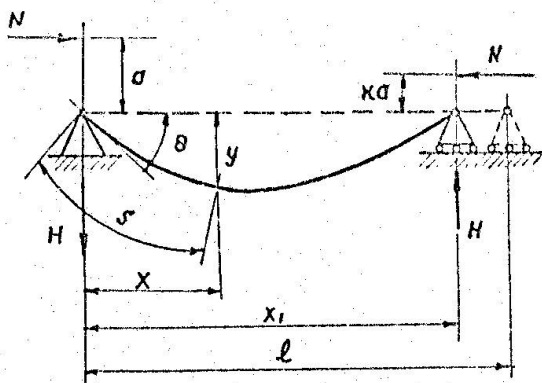


Fig. 1. Barre soumise à des charges de compression appliquées à ses extrémités avec des excentricités inégales.

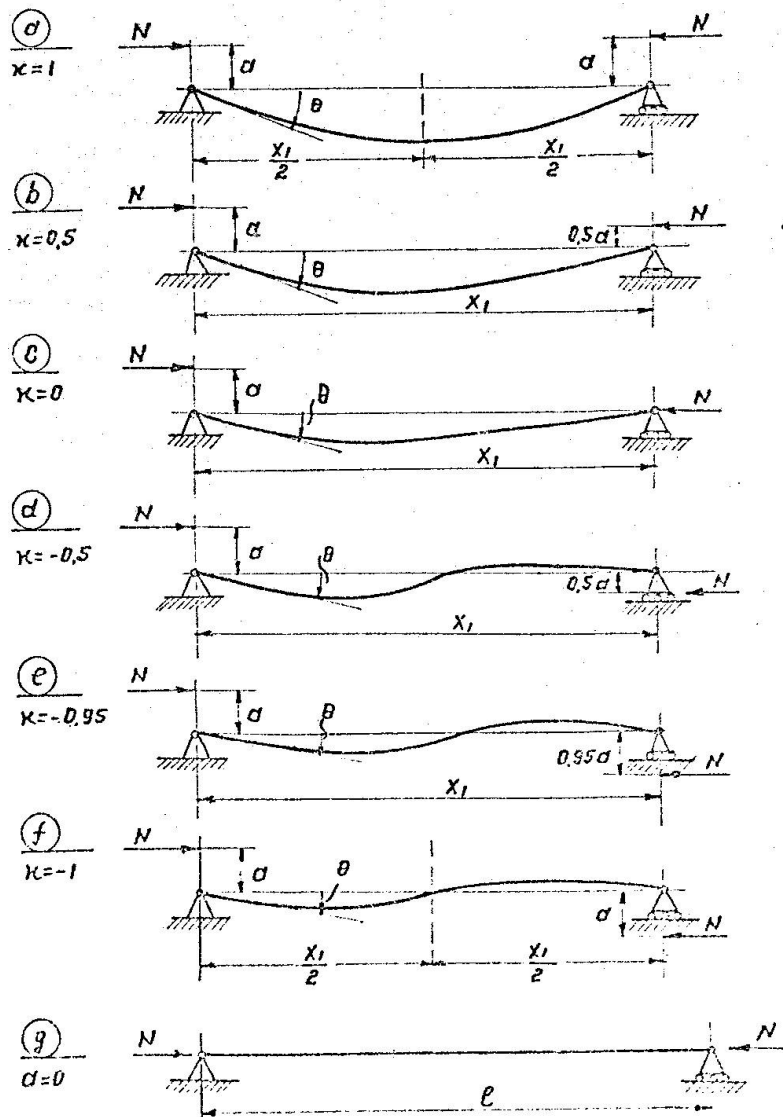


Fig. 3. Sept schémas de la barre comprimée et fléchie

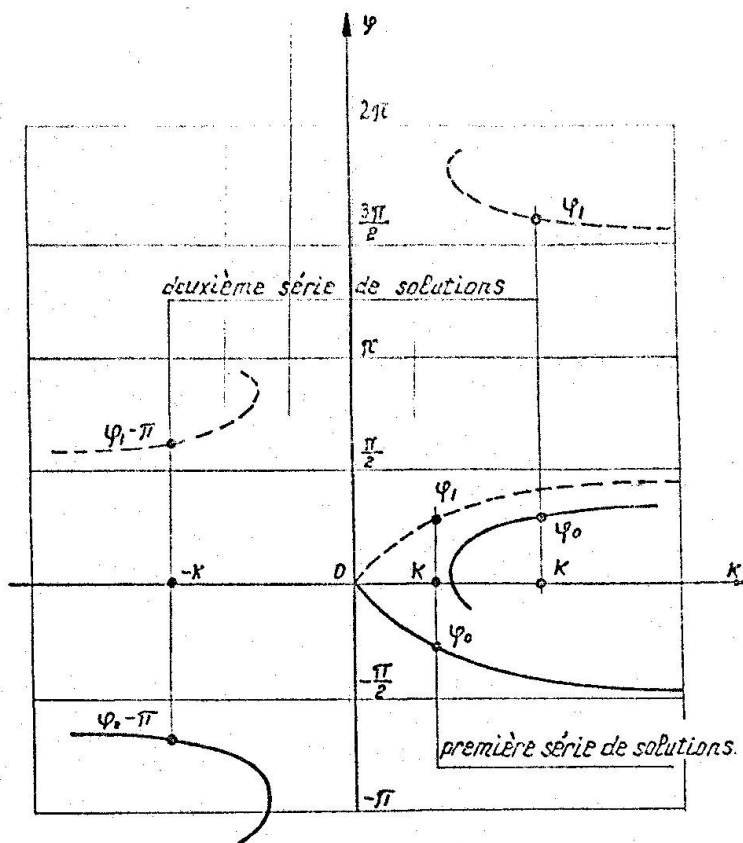


Fig. 2. Amplitudes  $\psi_0$  et  $\psi_1$  en fonction du module  $\kappa$  (abaque schématisique)

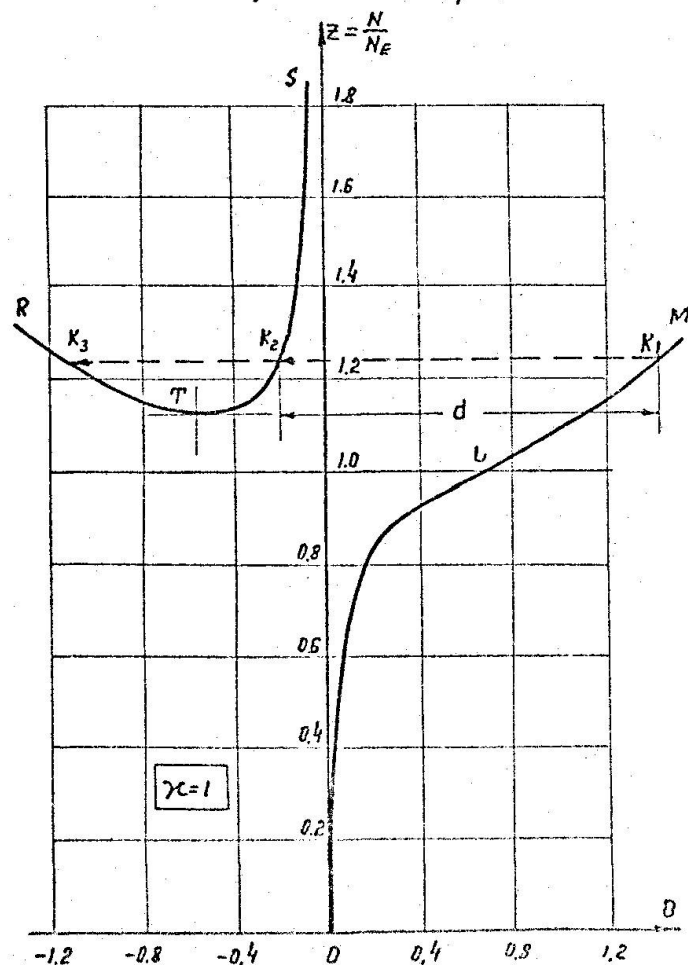


Fig. 4. Comportement de la barre conforme au schéma a

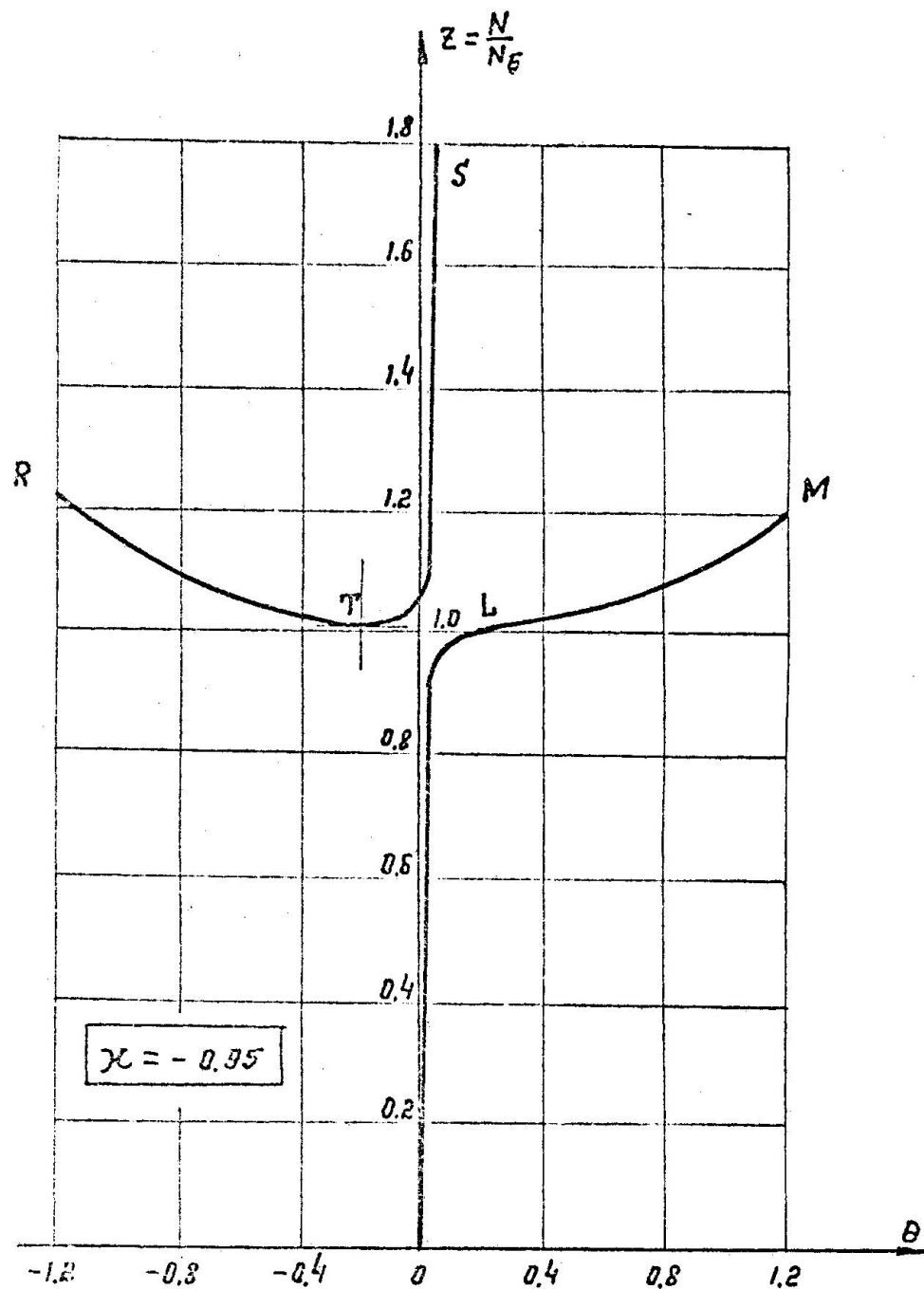


Fig. 5. Comportement de la barre conforme au schéma  $e$ .

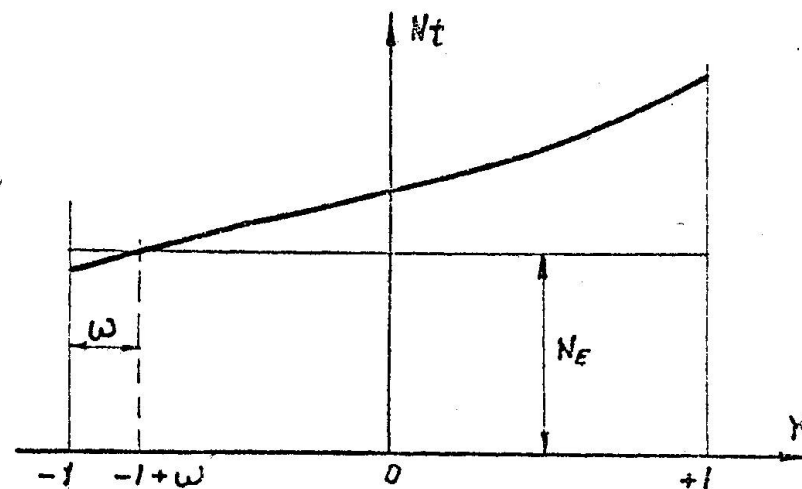


Fig. 6. Courbe schématique de  $N_t(x)$ .

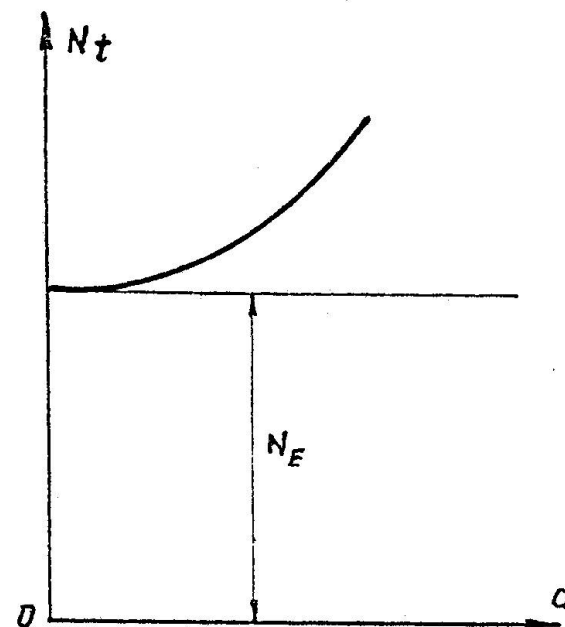


Fig. 7. Courbe schématique de  $N_t(\alpha)$  pour  $x=1$ .



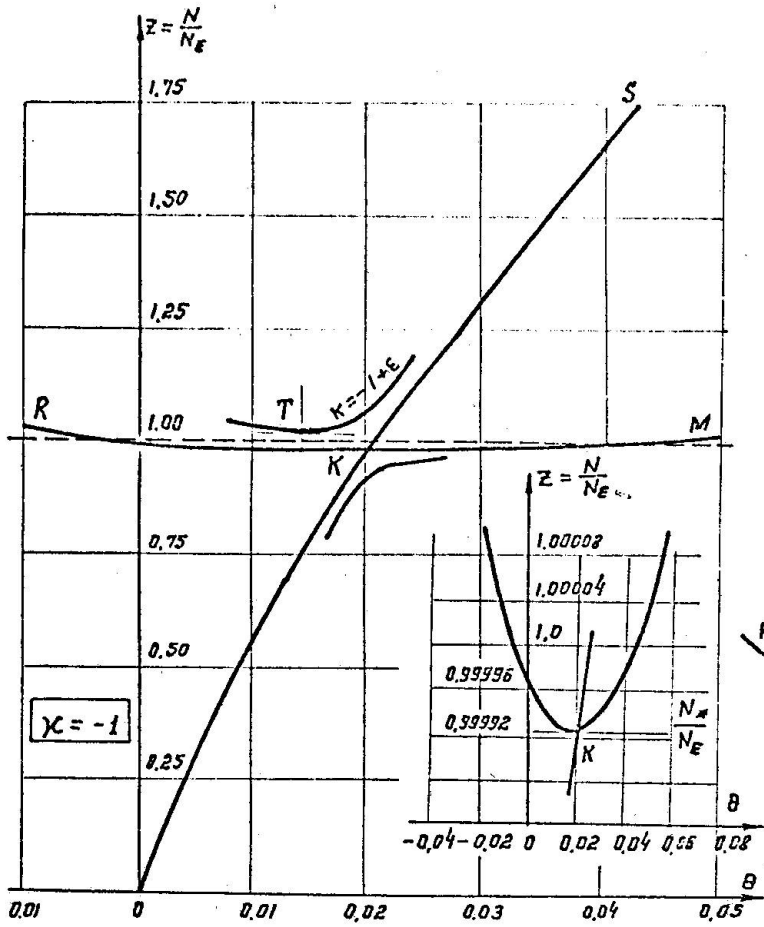


Fig. 8. Comportement de la barre et abaque à échelle réduite pour le schéma  $f$ .

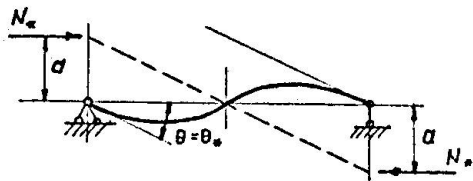


Fig. 9. Barre chargée d'une façon antisymétrique au moment du flambement.

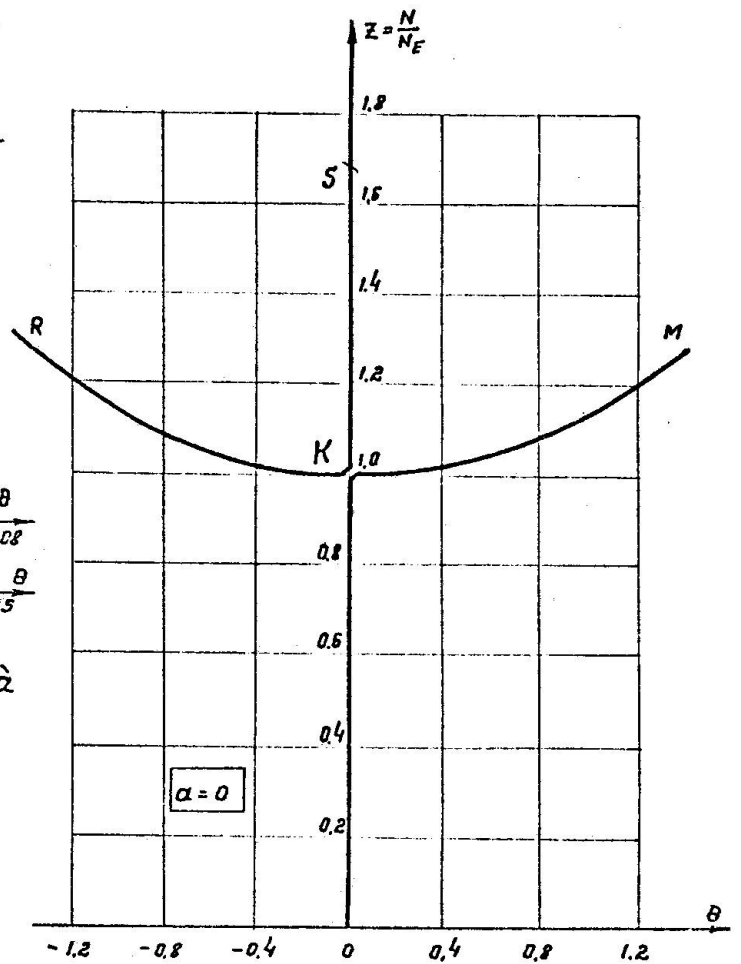


Fig. 10. Comportement de la barre conforme au schéma  $g$ .