

Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 19 (1974)

Artikel: Beitrag zur statischen Berechnung von Gewölbesperren nach dem Lastaufteilungsverfahren

Autor: Kettner, R.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-17543>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Beitrag zur Statischen Berechnung von Gewölbesperren nach dem Lastaufteilungsverfahren

*Contribution to the load distribution method for the
static analysis of arch dams*

*Contribution sur la méthode de distribution des
charges pour le calcul des barrages-vôûtes*

R. KETTNER
Dipl. Ing. Dr. nat. techn.
Siemens ag Österreich, Ve 7 - Bautechnik - A-4020 Linz

1. Einleitung

Zu statischen Berechnungen von Gewölbesperren werden in der Praxis am häufigsten zwei Berechnungsmethoden verwendet:

Das Versuchslast- [1] bzw. Lastaufteilungsverfahren [2-5] und die Methode der finiten Elemente [6,7]. Obwohl letzteres Verfahren in relativ kurzer Zeit eine rasante Entwicklung durchgemacht und bereits einen hohen Entwicklungsstand erreicht hat, dürfte die Anwendung des Versuchslast- bzw. Lastaufteilungsverfahrens noch überwiegen. Es erscheint daher gerechtfertigt, über eine Verfeinerung des Lastaufteilungsverfahrens nachfolgend zu berichten. Diese Verfeinerung wurde in einem Rechenprogramm aufgenommen, das von der Abteilung Bautechnik der Siemens AG Österreich in Linz vor etwa zehn Jahren entwickelt und wiederholt erfolgreich eingesetzt wurde.

Bekanntlich basiert das Lastaufteilungsverfahren auf folgenden Grundgedanken: Die Gewölbesperre wird durch horizontale und vertikale Schnitte in Bogen- und Kragträgerlamellen unterteilt, die das gesamte Bauwerk lückenlos ausfüllen. Von diesen Lamellen wird eine begrenzte Anzahl ausgewählt, so daß sie ein Rostsystem bilden. Die äußeren Lasten werden auf die Bogen oder Kragträger angesetzt. Mit Hilfe

von sogenannten Übertragungsgrößen werden die Verrückungen (Verschiebungen und Verdrehungen) der Bogen und Kragträger in deren Kreuzungspunkten durch Lösen eines Gleichungssystems in Koinzidenz gebracht (ausgeglichen). Von den sechs möglichen Knotenverrückungen werden je nach Erfordernis hinsichtlich des gewünschten Genauigkeitsgrades der Untersuchung zumeist nur ein bis drei ausgeglichen; z.B. Radialausgleich (häufig als einfacher Ausgleich bezeichnet) oder Radial-Tangential- und Torsionsausgleich (bzw. dreifacher Ausgleich). Die Größe des zu lösenden Gleichungssystems steigt mit der Anzahl der Ausgleiche linear, die Anzahl der zu ermittelnden Koeffizienten quadratisch und der Aufwand für das Lösen der Gleichungen etwa mit der dritten Potenz.

Das in die Berechnungen eingehende Rostsystem stellt nicht einen Trägerrost im üblichen Sinn dar, denn es wird auch der Zusammenhang und die Mitwirkung der nicht in den Rost aufgenommenen Lamellen berücksichtigt, somit die Flächentragwirkung der Sperre erfaßt. Dies wird dadurch erreicht, indem die statisch unbestimmten Übertragungsgrößen nicht als Einzellasten in den Knotenpunkten, sondern als Streckenlasten auf die einzelnen Lamellen des Rostsystems aufgebracht werden. Dies hat zur Folge, daß die Matrix des linearen Gleichungssystems der Übertragungsgrößen zur Hauptdiagonale nicht symmetrisch ist.

Die Koeffizienten des genannten Gleichungssystems können als Einflußwerte der Kragträger und Bogen aufgefaßt werden. Sie stellen Verschiebungen und Verdrehungen in den Knoten des Rostes zufolge sogenannter Einheitslasten dar. Zumeist werden dreieckförmige Einheitslasten mit linearem Verlauf zwischen den Knotenpunkten verwendet (siehe Fig.1). Daraus resultiert ein polygonaler Verlauf der Lastaufteilung zwischen den Bogen und Kragträgern mit Knicken in den Kreuzungspunkten, wie in Fig.2 schematisch dargestellt. In Wirklichkeit ist jedoch die Lastfunktion stetig in ihrem Verlauf. Durch eine entsprechend enge Netzteilung des Rostsystems könnten die Unstetigkeiten wohl gemildert werden (im Extremfall einer theoretisch unendlich feinen Netzteilung sogar ausgeschaltet werden), jedoch ist damit eine wesentliche Erhöhung der Knotenzahl, somit auch des Gleichungssystems verbunden, was zu rechentechnischen Schwierigkeiten führt.

Die Verfeinerung des Berechnungsverfahrens besteht nun darin, daß an Stelle der Dreiecklasten stetige Funktionen in Form von Lagrange-Polynomen eingeführt werden. Sie erstrecken sich über die

Gesamtlänge jedes einzelnen Bogens und Kragträgers und sind in diesen Bereichen stetig wie auch mehrfach differenzierbar (siehe Fig.3). Wie bei den Dreiecklasten können auch die Einheitslastpolynome nach Vervielfachung mit den aus dem Gleichungssystem erhaltenen Übertragungsgrößen überlagert werden, wodurch sich für die Lastaufteilung wieder ein Lagrange-Polynom ergibt und ein stetiger Funktionsverlauf erreicht ist (siehe Fig.4). Dadurch wird es nicht erforderlich, das Rostsystem engmaschiger zu wählen, im Gegenteil ein grobes Netz ergibt auch noch hinreichend genaue Ergebnisse, wie das Zahlenbeispiel am Ende des Berichtes zeigt.

2. Einheitslastpolynome

Wie im vorangegangenen Abschnitt dargelegt, werden für die Einheitslasten (und auch punktweise gegebene Funktionen) Lagrange-Polynome eingeführt.

Sind in n Stützstellen x_i die Funktionswerte f_i gegeben, wobei $i=1,2,\dots,n$ und x_i paarweise verschieden d.h. $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$, so lautet das Lagrange'sche Interpolationspolynom

$$P(x) = \sum_{k=1}^n f_k \cdot L_k(x) . \quad (1)$$

Darin sind die $L_k(x)$ Polynome mit folgenden Eigenschaften:

$$L_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=k \\ 0 & " \quad i \neq k \end{cases} , \quad (2)$$

worin δ_{ik} das bekannte Kroneckersche Symbol mit $i,k=1,2,\dots,n$;

sie können durch das Produkt

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i \neq k \\ i=1}}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \quad (3)$$

ausgedrückt werden und sind vom Grade $m=n-1$, wie man nach Ausmultiplikation und Ordnen erhält

$$L_k(x) = a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \dots + a_{km}x^m = \sum_{v=0}^m a_{kv}x^v . \quad (4)$$

Diese Polynome nach Gl.(4) können nun zur Darstellung der Einheitslasten herangezogen werden, da sie den gewünschten Forderungen entsprechen, nämlich in $i=k$ den Funktionswert bzw. die Lastordinate $L_k(x_k) = 1$ und in den übrigen Stützstellen (= Knotenpunkten) den Wert Null anzunehmen (siehe Fig.3). Wie schließlich aus Gl.(1) zu erkennen ist, ergibt sich das Lagrange-Polynom $P(x)$ durch Überlagerung der Polynome $L_k(x)$ nach Vervielfachung mit gegebenen Stützwerten f_k . Damit ist ein kontinuierlicher Funktionsverlauf sichergestellt (siehe Fig.4).

In Matrizenform kann $P(x)$ geschrieben werden:

$$P(x) = \{f_1 f_2 f_3 \dots f_n\} \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{Bmatrix} = \quad (5)$$

$$= \{f_k\}^T \begin{bmatrix} a_{kv} \end{bmatrix} \{x_v\}, \quad (k=1,2,\dots,n; v=0,1,\dots,m; m=n-1)$$

wenn mit $\{\}$ Spaltenvektoren, mit $[]$ rechteckige bzw. quadratische Matrizen und mit dem hochgestellten T Transposition bezeichnet werden.

Die Elemente a_{kv} können aus den Funktionswerten in den Stützpunkten x_i ($i=1,2,\dots,n$) berechnet werden. Da gemäß Gl.(4)

$$\{L_k\} = \begin{bmatrix} a_{kv} \end{bmatrix} \{x_v\}$$

ist, folgt mit den Funktionswerten $L_k(x_i)$ gemäß Gl.(2)

$$\begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2m} \\ a_{30} & a_{31} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \dots & x_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

bzw. in gekürzter Schreibweise

$$\begin{bmatrix} a_{kv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{vi} \end{bmatrix} = E \quad (6)$$

mit E = Einheitsmatrix.

Durch Rechtsmultiplikation der beiden Seiten von Gl.(6) mit der Inversen $[x_{vi}]^{-1}$ erhält man die Lösung

$$[a_{kv}] = [x_{vi}]^{-1} \quad (7)$$

Mit Hilfe von Gl.(5) ist es somit auch möglich, nur punktweise durch Werte f_k gegebene Funktionen darzustellen, wovon in der Sperrenberechnung Gebrauch genommen wird, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

3. Anwendung in den Berechnungen der Kragträger- und Bogenlamellen

Die nachfolgenden Ausführungen beziehen sich auf Sperrenberechnungen mit dreifachem Ausgleich. Beim dreifachen Ausgleich werden in Horizontalebenen die radialen und tangentialem Verschiebungen sowie die Verdrehungen um vertikale Achsen der Kragträger und Bogen in Koinzidenz gebracht.

Die einzelnen Formulierungen können ohne Schwierigkeiten z.B. nur auf den Ausgleich der Radialverschiebungen reduziert oder auch durch Berücksichtigung weiterer Verschiebungskomponenten (z.B. Vertikalverschiebungen) entsprechend erweitert werden.

Zur Festlegung der Sperrengeometrie wird ein globales rechtwinkliges Koordinatensystem als Linkssystem so festgelegt, daß mit dem Ursprung in Kronenhöhe die positive x-Achse zum rechten Talhang, die positive y-Achse flußabwärts und die positive z-Achse vertikal zur Talsohle gerichtet ist. Die vertikale y-z-Ebene $x=0$ liege in der Sperrenachse (siehe Fig.5).

Im weiteren kann aus Platzmangel nur der Berechnungsweg aus den wichtigsten Ansätzen aufgezeigt werden, soweit die Verwendung von Polynomen damit verbunden ist, d.i. im wesentlichen die Ermittlung der Schnittgrößen und Verschiebungen zufolge der Einheitslasten.

3.1 Kragträger

Da beim dreifachen Ausgleich die Vertikalverschiebungen unberücksichtigt bleiben, werden nur radiale, tangentiale und um vertikale Achsen drehende Einheitslasten p_δ , p_φ bzw. p_w benötigt, die am Kragträger die Schnittgrößen M, Q, T und D verursachen (Bedeutung und positive Richtungen siehe Fig.6).

In den Berechnungen der Schnittgrößen ist im allgemeinsten Fall einer doppelt gekrümmten Gewölbesperre (Gleichwinkelsperren) neben den über die Kragträgerhöhe variablen trapezförmigen Querschnitten auch die Wendelung der Kragträger zu erfassen.

Unter Berücksichtigung der mittleren, über die Höhe z variablen Kragträgerbreite $c(z)$ gilt für die differentielle Einheitsbelastung dp (siehe Fig.7)

$$dp = c(z) \cdot p(z) \cdot dz \quad (8)$$

und unter Beachtung der Kragträgerwendelung $\Delta\varphi$ gilt mit den Bezeichnungen der Fig. 8 für die differentiellen Schnittgrößen im Kreuzungspunkt i zufolge radialer Einheitslast p_δ

$$\begin{aligned} dM_\delta &= -dp \cdot \cos \Delta\varphi \cdot (z_i - z) \\ dQ_\delta &= -dp \cdot \cos \Delta\varphi \\ dT_\delta &= dp \cdot \sin \Delta\varphi \\ dD_\delta &= -dp \cdot \sin \Delta\varphi \cdot \bar{a}_i = -dT_\delta \cdot \bar{a}_i \end{aligned} \quad (9)$$

zufolge tangentialer Einheitslast p_φ

$$\begin{aligned} dM_\varphi &= -dp \cdot \sin \Delta\varphi \cdot (z_i - z) \\ dQ_\varphi &= -dp \cdot \sin \Delta\varphi = -dT_\varphi \\ dT_\varphi &= -dp \cdot \cos \Delta\varphi = dQ_\varphi \\ dD_\varphi &= dp \cdot \cos \Delta\varphi \cdot [\bar{a}_i - a(z)] \end{aligned} \quad (10)$$

zufolge drehender Einheitslast p_w

$$\begin{aligned} dM_w &= dQ_w = dT_w = 0 \\ dD_w &= -dp \end{aligned} \quad (11)$$

Die Schnittgrößen $(M, Q, T, D)_i$ folgen dann aus der Integration über den Bereich $z = 0$ bis z_i .

Der Berechnungsweg wird für das Biegemoment $M_{i\delta k}$ (im Horizont i zufolge der radiaalen Polynom-Einheitsbelastung mit der Lastordinate 1 in $i=k$) näher ausgeführt.

Mit Gl.(8) ergibt sich aus Gl.(9)

$$M_{i\delta k} = - \int_0^{z_i} \cos \Delta\varphi \cdot (z_i - z) \cdot c(z) \cdot p_k(z) \cdot dz$$

und mit $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi$ (s. Fig.8) folgt nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} M_{i\delta k} &= -z_i \cdot \cos \varphi_i \int_{\varphi_i}^{z_i} c(z) \cdot \cos \varphi \cdot p_k(z) \cdot dz - \\ &\quad -z_i \cdot \sin \varphi_i \int_0^{z_i} c(z) \cdot \sin \varphi \cdot p_k(z) \cdot dz + \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos\varphi_i \int_0^{z_i} z \cdot c(z) \cdot \cos\varphi \cdot p_k(z) \cdot dz + \\
 & + \sin\varphi_i \int_0^{z_i} z \cdot c(z) \cdot \sin\varphi \cdot p_k(z) \cdot dz
 \end{aligned} \tag{12}$$

Nachdem die geometrischen Werte eines Kragträgers in allen Horizonten $i=1,2,\dots,n$ vorweg ermittelt werden können, ist es auch möglich, diese durch Polynome gemäß Abschnitt 2 als geschlossene Funktionen über die gesamte Kragträgerhöhe darzustellen. Damit lassen sich die einzelnen Integrale einfach lösen.

Die in Gl.(12) durch Unterstreichung markierten Produkte unter den vier Integralen werden durch Polynome, die mit P_1 bis P_4 bezeichnet seien, ausgedrückt. Sie haben die Form

$$P_j = \sum_{v=0}^m A_{jv} \cdot z^v \quad \text{mit } j=1,2,\dots,4 \tag{13}$$

Die Koeffizienten A_{jv} lassen sich mit Hilfe der bereits ermittelten Matrix $[a_{kv}]$ der Einheitslastpolynome aus der Matrizenmultiplikation

$$[A_{jv}] = [f_{jk}] \cdot [a_{kv}] \tag{14}$$

leicht berechnen. Darin sind die Elemente f_{jk} die Funktionswerte der vorgenannten Produkte in den Horizonten $k=1,2,\dots,n$.

Die Integrale der Gl.(12) erhalten mit den Polynomen Gl.(13) und den Einheitslastpolynomen Gl.(4) die Form

$$J_j = \int_0^{z_i} \sum_{v=0}^m A_{jv} \cdot z^v \cdot \sum_{v=0}^m a_{kv} \cdot z^v \cdot dz \tag{15}$$

Das Produkt der beiden Polynome unter dem Integral liefert das Polynom

$$\sum_{v=0}^{2m} b_{jkv} \cdot z^v = \sum_{v=0}^m A_{jv} \cdot z^v \cdot \sum_{v=0}^m a_{kv} \cdot z^v , \tag{16}$$

somit folgt für die Integrale Gl.(15) die einfache Lösung

$$J_j = \sum_{v=0}^{2m} \frac{b_{jkv}}{v+1} \cdot z_i^{v+1} = \sum_{v=0}^{2m} B_{jkv} \cdot z_i^{v+1} \tag{17}$$

Schließlich kann für das gesuchte Biegemoment geschrieben werden

$$M_{ik} = \left\{ -z_i \cos \varphi_i \quad -z_i \sin \varphi_i \quad \cos \varphi_i \quad \sin \varphi_i \right\} \begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{Bmatrix} . \quad (18)$$

Eine Vereinfachung kann dadurch erreicht werden, wenn näherungsweise die gesamten Ausdrücke unter den Integralen Gl.(12) zu jeweils einem Polynom nach Gl.(13) zusammengefaßt werden. Damit entfällt die Berechnung des Polynomproduktes nach Gl.(16).

In ähnlicher Weise wie oben ergeben sich die übrigen Schnittgrößen aus den Ansätzen der Gln.(9) - (11), die zum Teil einfache Ausdrücke aufweisen. Wird eine vorhandene Wendelung der Kragträgerachse vernachlässigt, indem die Winkeldifferenzen $\Delta\varphi$ null gesetzt werden, so können wesentliche Einsparungen im Rechenaufwand erzielt werden. In den Gl.(9) bzw. (10) werden $(T,D)_g = 0$ bzw. $(M,Q)_g = 0$; außerdem verringert sich die Anzahl der Integrale.

Die in den Berechnungen der Verschiebungen und Verdrehungen aus den Einheitslasten auftretenden Integrale können ebenfalls mittels Polynome einer einfachen Lösung zugeführt werden. Die einzelnen Integranden setzen sich aus den zuvor berechneten Schnittgrößen \ddagger (M, Q, T, D) zufolge einer am Ort und in Richtung der gesuchten Verschiebung angreifenden Einzellast, ferner aus Querschnittswerten (Trägheitsmoment bzw. Fläche) und Materialdaten (Elastizitätsmodul bzw. Schubmodul) zusammen. Da die Integranden in allen Knotenpunkten wertmäßig bestimmt werden können, läßt sich ihr Funktionsverlauf über die Kragträgerhöhe wieder durch Lagrange-Polynome nach Gl.(5) festlegen. Die Integrationen sind hier über den Bereich z_i (Ort der gesuchten Verschiebung) bis z_n (Kragträgerfußpunkt) zu erstrecken, so daß allgemein folgt

$$\begin{aligned} I &= \int_{z_i}^{z_n} \sum_{v=0}^m c_{kv} \cdot z^v \cdot dz = \sum_{v=0}^m \frac{c_{kv}}{v+1} (z_n^{v+1} - z_i^{v+1}) \\ &= \sum_{v=0}^m c_{kv} \cdot (z_n^{v+1} - z_i^{v+1}) . \end{aligned} \quad (19)$$

Die Formeln für die Verschiebungen und Verdrehungen sind ähnlich wie Gl.(18) aufgebaut.

Der gleiche Weg kann auch in den entsprechenden Berechnungen der äußeren Belastungen eingeschlagen werden.

\ddagger ... (M, Q, T, D) der Einheitslasten sowie aus Schnittgrößen...

3.2 Bogen:

Es ist beim Rostverfahren allgemein üblich, die Bogenlamellen durch Horizontalschnitte festzulegen, so daß deren Achsen nicht räumlich gekrümmmt sind, sondern in einer Ebene liegen. Dadurch ergeben sich im Vergleich zu den Kragträgerberechnungen gewisse Vereinfachungen, auf die im Zusammenhang mit der Kragträgerwandelung bei doppelt gekrümmten Sperren im vorigen Abschnitt hingewiesen wurde.

Auch für die Bogenlamellen werden vorteilhaft Einheitslastpolynome nach Gl.(4) eingeführt, die sich über die gesamte Bogenlänge von Kämpfer zu Kämpfer erstrecken.

Sie erfüllen vornehmlich den selben Zweck wie bei den Kragträgern, nämlich einen stetigen Funktionsverlauf, der den wirklichen Verhältnissen besser entspricht, wiederzugeben. Auf die mathematischen Formulierungen sei hier nicht näher eingegangen, da sie wegen ihres Umfangs den Rahmen der Abhandlung sprengen würden.

4. Zahlenbeispiel

Im Zuge der Entwurfsarbeiten einer rd. 180 m hohen symmetrischen Gewölbesperre wurde eine Sperrenvariante nach dem vorhin kurz beschriebenen Verfahren sowohl mit einer feinen wie auch mit einer groben Netzteilung berechnet. Da es sich um Variantenstudien handelte, wurden die Untersuchungen auf Radialausgleiche beschränkt.

In Fig.9a ist der Berechnungsrost mit enger Teilung dargestellt; Fig.9b zeigt das grobmaschige Rostsystem, das sich durch Weglassung der Bogen $i = 3$ und 5 und der Kragträger $j = 2$ und 4 aus dem engen Rost ergibt. Die Berechnungen der beiden Rostsysteme bezogen sich auf den Lastfall Vollstau bis zur Sperrenkrone bei sommerlich erwärmtem Mauerkörper.

In den Tabellen 1 und 2 sind die Ergebnisse der beiden Berechnungen gegenübergestellt u.zw. die Randnormalspannungen der vier vergleichbaren Kragträger und Bogen. Die Lastaufteilung ergab sich in beiden Fällen nahezu gleich, was auch in der guten Übereinstimmung der Spannungen zum Ausdruck kommt. Die maximale Abweichung beträgt $2,4 \text{ kp/cm}^2$ bei den Kragträgern bzw. $5,2 \text{ kp/cm}^2$ bei den Bogen, d.s. rd. $3,1\%$ bzw. $6,7\%$ bezogen auf die größte Spannung von $78,0 \text{ kp/cm}^2$.

Aus diesen Ergebnissen kann gefolgert werden, daß die Anwendung des Lastaufteilungsverfahrens mit Polynomfunktionen auch eine grobe Netzteilung des Berechnungsrostes zuläßt.

Tab. 1 Kragträger - randparallele Normalspannungen σ_z kp/cm²

i	j = 1		j=2 (3)		j=3 (5)		j=4 (6)	
	σ_W	σ_L	σ_W	σ_L	σ_W	σ_L	σ_W	σ_L
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	6,7 (8,8)	2,7 (0,5)	7,9 (9,1)	2,0 (1,0)	12,6 (11,2)	-1,2 (0,1)	13,6 (13,1)	-0,8 (-0,3)
3 (4)			-9,0 (-7,4)	39,6 (40,0)	12,9 (12,5)	20,1 (20,5)	14,0 (16,2)	24,1 (21,9)
4 (6)					-6,9 (-5,1)	61,0 (63,4)	2,0 (1,4)	59,8 (60,5)
5 (7)							-3,8 (-4,3)	77,2 (78,0)

Tab. 2 Bogen - randparallele Normalspannungen σ_x kp/cm²

i	j = 1		j=2 (3)		j=3 (5)		j=4 (6)	
	σ_W	σ_L	σ_W	σ_L	σ_W	σ_L	σ_W	σ_L
1	40,9 (35,7)	63,1 (67,6)	50,0 (49,2)	53,9 (54,0)	61,8 (62,8)	42,0 (40,3)	47,5 (46,9)	56,4 (56,4)
2	36,1 (36,0)	65,1 (66,5)	41,7 (45,4)	59,4 (56,9)	64,8 (65,1)	36,0 (36,9)	45,5 (45,4)	55,7 (57,1)
3 (4)			15,0 (15,3)	73,3 (73,1)	59,0 (59,0)	35,4 (35,5)	51,7 (50,9)	43,1 (44,0)
4 (6)					5,2 (5,1)	44,6 (44,3)	40,7 (40,8)	8,9 (8,4)

Die Klammerwerte beziehen sich auf die Ergebnisse der feinen Netzteilung (Fig.9a)

Values in brackets refer to results of the fine grid (Fig.9a)

Les valeurs en parenthèses se refèrent aux résultats du partage étroit de grille (Fig.9a)

W = Wasserseite L = Luftseite + = Druck - = Zug
Water face Air face Compression Tension
Amont Aval Compression Traction

5. Schlußbemerkungen

Hier konnte nur in kurzen Zügen die Verwendung von Polynomen im Lastaufteilungsverfahren aufgezeigt werden. Auf eine mögliche Änderung sei jedoch abschließend noch hingewiesen. Als Stützstellen der Polynome wurden die Knotenpunkte des Rostsystems gewählt. Diese liegen zumeist, im besonderen entlang der Bogenlamellen, nicht in gleichen Abständen. Werden sie ungeachtet der Lage der Kreuzungspunkte äquidistant angeordnet, dann brauchen die Koeffizienten der Einheitslastpolynome nicht für jeden Berechnungsfall neu ermittelt werden. Sie können vorweg für eine im gebräuchlichen Bereich variierende Anzahl Stützstellen ein für alle mal bestimmt werden.

Dieser Gedankengang bedarf aber noch entsprechender Untersuchungen. Ebenso wäre eine eventuelle Anwendung von Splinefunktionen an Stelle der gewählten Lagrange-Polynome noch zu prüfen.

Schrifttum

- [1] U.S. Bureau of Reclamation: Trial Load Method of Analyzing Arch Dams, Denver, Colorado, 1938
- [2] Jurecka, W.: Beiträge zur Berechnung von Bogenstaumauern nach dem Lastaufteilungsverfahren, 1948, Dissertation Technische Hochschule Graz
- [3] Jurecka, W.: Die Berechnung bogenförmiger Staumauern nach dem Lastaufteilungsverfahren. Österr. Bauzeitschrift, 1949, S. 173-175 und 195-203
- [4] Tonini, D.: Algebraic load method of analyzing arch dams, 6th Congress on Large Dams, New York, 1958, Vol.4, p.313
- [5] Mladjenovitch, V.: Calcul des barrages-vôûtes par résolution d'équations linéaires, Travaux, Décembre 1958, p.1037-1043
- [6] Theory of Arch Dams, ed. by J.R. Rydzewski, 1965, Pergamon Press
- [7] Arch Dams, A Review of British Research and Development, London, The Institution of Civil Engineers, 1968

Zusammenfassung

Der vorliegende Bericht befaßt sich mit einer Verfeinerung der Belastungsverteilung, die der Versuchslastmethode bzw. dem Lastaufteilungsverfahren zugrunde liegt. Diese beiden Berechnungsmethoden sind dem Verfahren nach identisch; sie unterscheiden sich nur dadurch, daß die Lastaufteilung zwischen Bogen und Kragträgern, in die das Tragwerk unterteilt gedacht wird, bei ersterem durch Probieren, also versuchsmäßig, und bei letzterem durch Auflösen eines Gleichungssystems ermittelt wird. Es ist allgemein üblich, die Belastungen der einzelnen Traglamellen polygonal durch Überlagerung linearer Dreiecklasten anzusetzen. Eine Verfeinerung wird durch die Wahl stetiger Funktionen und zwar von Lagrange-Polynomen erreicht. Dies ermöglicht eine Reduzierung der Netzaufteilung, d.h. man kann mit einer geringeren Anzahl Bogen und Kragträgern das Auslangen finden, ohne das Ergebnis zu schmälern, wie in einem Zahlenbeispiel gezeigt wird. Mit einer verringerten Anzahl von Netzpunkten ist auch ein kleineres Gleichungssystem verbunden, was im besonderen bei mehrfachen Ausgleichen zur Herabsetzung numerischer Ungenauigkeiten wie auch zur Verminderung des Rechenaufwandes angestrebt wird.

Ferner kann man in der Berechnung der Kragträger, deren geometrische Eigenschaften fast durchwegs nicht explizit darstellbar sind, ebenfalls Lagrange-Polynome vorteilhaft verwenden, so daß die geometrischen Werte und Materialdaten nur in den Kreuzungspunkten gegeben sein müssen.

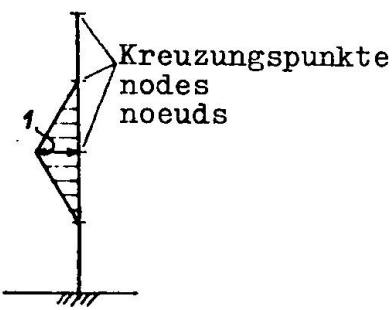
Summary

The paper deals with a refinement of the load distribution upon which the Trial Load Method and the Load Distribution Method are based. Both methods of analysis are identical with respect to the procedure, they only differ in that the distribution of loads between arches and cantilevers will be found by trial with the first method and by solving a system of linear equations with the latter. Generally the loads of the various elements are approximated polygonally by the superposition of linear triangular loads. A refinement is achieved by the use of continuous and smooth functions of Lagrangian polynomials. This allows a reduction of the

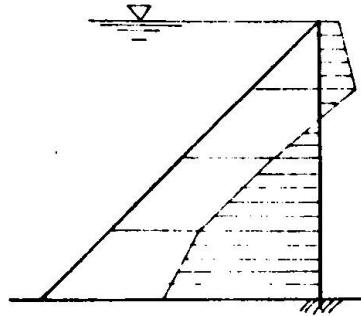
grid, thus a decreased number of arches and cantilevers suffices without impairing the final results as is shown in a numerical example. A reduced number of nodes also yields a smaller system of equations particularly endeavoured in multiple adjustments for a reduction of both numerical inaccuracies and computation time. Furthermore Lagrangian polynomials are advantageously applied in determining functions for geometrical properties which in most cases for cantilevers cannot be established explicitly so that geometric and material data only need be given at points of intersection of arches and cantilevers.

Résumé

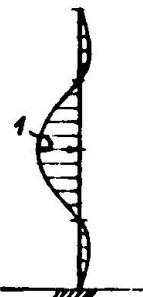
Ce rapport s'occupe d'un raffinement de la distribution de charges, basé sur le Trial Load Method et la méthode de distribution des charges. Ces deux méthodes de calculer sont identiques à l'égard de procédure. Elles ne se distinguent que par la façon de trouver la distribution de charges entre les arcs et les consoles. Selon la première méthode on trouve la distribution par essai et selon la seconde par résolution d'équations linéaires. Usuellement on fait la disposition des charges d'arcs et des consoles polygonales par superposition des charges triangulaires linéaires. Un raffinement est obtenu par le choix des fonctions continus, c'est à dire des polynômes Lagrange. Ça donne la possibilité de réduire le partage de grille, c'est à dire une plus petite nombre d'arcs et de consoles sera suffisante, sans amoindrir le résultat comme le montre un exemple exposé. Avec un nombre réduit de noeuds le système d'équation devient plus simple comme souhaité dans les multiples ajustements pour diminuer des inexactitudes numériques et de la durée de calculation. En outre, pour la présentation fonctionnelle des valeurs géométriques, lesquelles ne sont pas présentables spécialement pour les consoles d'une manière explicite, on utilise avec avantage les polynômes Lagrange, pour que les valeurs géométriques et les indications de matériaux ne sont demandé que dans les noeuds.

**Fig. 1.**

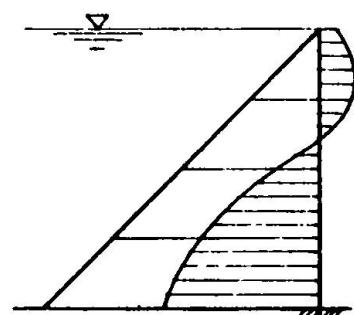
Dreieckförmige Kragträger-Einheitslast
Triangular unit cantilever load
Charge unitaire triangulaire de console

**Fig. 2.**

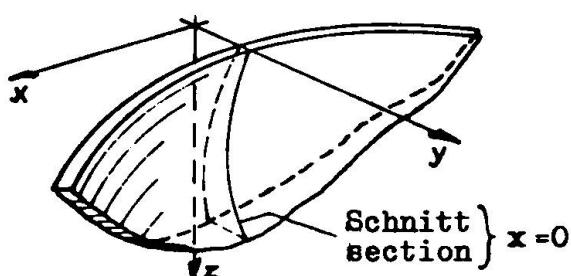
Typische Kragträgerbelastung, polygonal verteilt
Typical cantilever load polygonally distributed
Charge typique le long de la console distribution polygonale

**Fig. 3.**

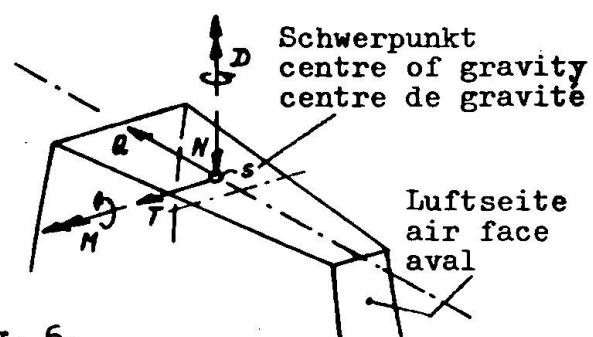
Einheitslastpolynom
Unit load polynomial
Polynôme de charge unitaire

**Fig. 4.**

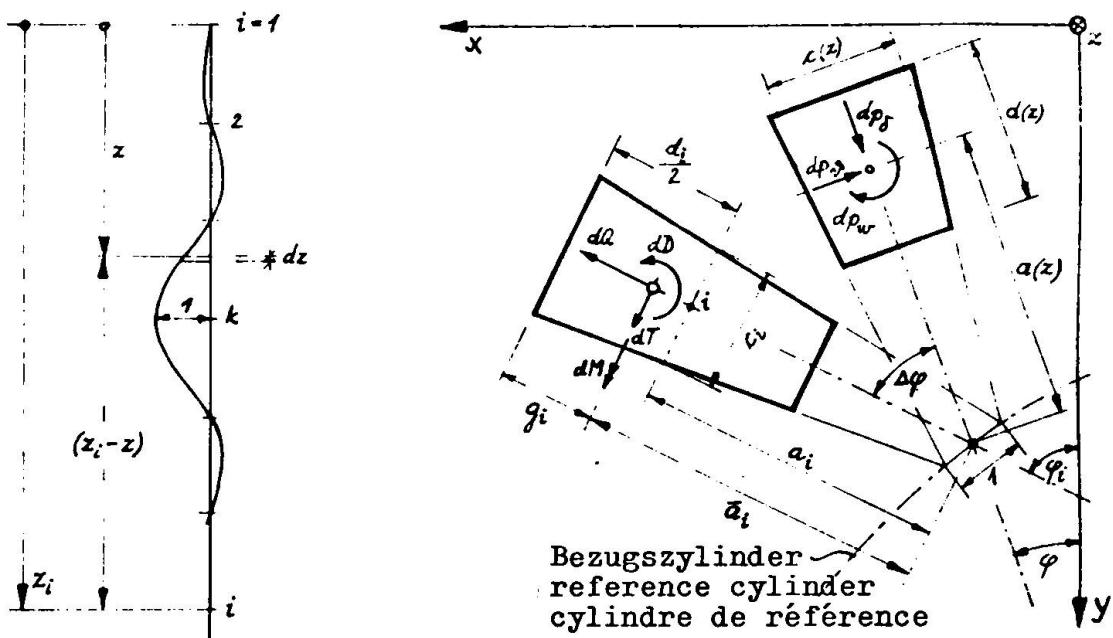
Glatte Funktion der Lastaufteilung
Smooth function of load distribution
Le cours continue de la distribution de charge

**Fig. 5.**

Kartesisches Koordinatensystem
Cartesian co-ordinate system
Système coordonnée perpendiculaire

**Fig. 6.**

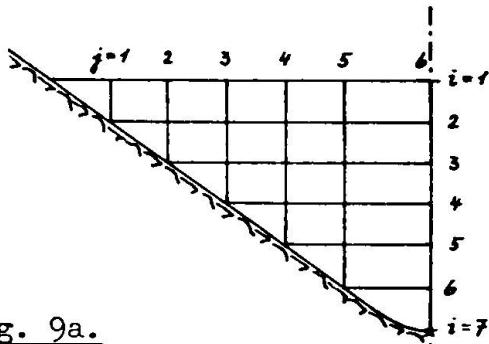
Positive Schnittgrößen
Positive forces and moments
Directions positives des forces et des couples

Fig. 7.

Einheitslastpolynom

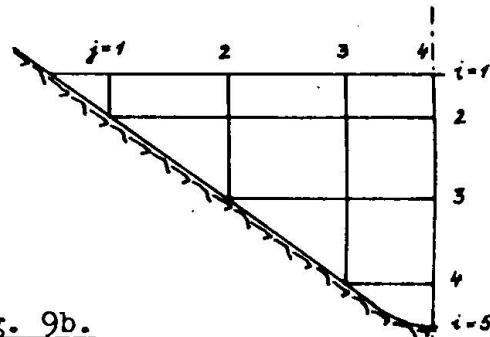
Unit load polynomial

Polynôme de charge unitaire

Fig. 8.Kragträger-Horizontalschnitte
positive Lasten und SchnittgrößenHorizontal cantilever sections,
positive unit loads, forces and
momentsSections de console horizontales,
directions positives des
charges unitaires et valeurs
de sectionsFig. 9a.

Symmetr. Parabelsperre, Berechnungsrost, a) feines und b) großes Netz

Symmetrical parabolic arch dam, a) fine and b) coarse grid system

Barrage symétrique parabolique, système de grille avec partage
a) étroit et b) étendueFig. 9b.

Leere Seite
Blank page
Page vide