

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

**Band:** 19 (1974)

**Artikel:** Communication de MM. Lorrain et Maso

**Autor:** Lorrain, Michel / Maso, Jean-Claude

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17537>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

(iii) solution of the analysis problem for a given loading stage (says  $k^{\text{th}}$ ) assuming holonomic flow laws, i. e., that no sequence of loading-unloading takes place in the stress path of any point of the structure during the application of the load, (iv) solution of the analysis problem for the following  $(K + 1)^{\text{th}}$  loading stage assuming again holonomy, but with a suitable modification of the constitutive laws (in practice of the yield limit) for those stress points that were in the plastic range at the end of the  $k^{\text{th}}$  stage.

It is possible to show that for both phases (iii) and (iv) the analysis problem can be formulated in terms of various quadratic programming problems involving as unknowns the plastic multipliers, or the plastic multipliers and displacements, or the plastic multipliers and stresses (see references for more details).

I would like to conclude with some remarks on the adopted procedure. An important advantage is the possibility to subdivide "a priori" the final loads in to proportional loading steps. However there are some sources of error in applying the multistage procedure. First is the piecewise linearization, but this source of error can be reduced in its importance by increasing the number of planes describing the linearized yield surface. Second is the possibility of loading-unloading sequences during a step; but this source of error too can be reduced in its importance by decreasing the amplitude of the loading step.

An important point to be mentioned is the possibility of reducing the number of variables in the problem by forecasting the yield planes which will be activated at the solution under the final loads (on the basis e. g. of the elastic solution). This sometimes reduces so drastically the number of variables, that large size problems can often be solved very easily.

Finally, another point is about the algorithm to adopt to solve the quadratic programming problem. There are different algorithms which all have the common important feature of guaranteeing convergence to the solution of the problem in every case (of course in the presence of overall stability). A recent algorithm (by Cottee) can even say whether, during the loading step, there is some load-unloading sequence, i. e., whether the source of error already mentioned is present; this information is an important tool for suitable ajustement of the length of the loading step. Thank you.

## SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES BETONS A LA LIMITE DU DOMAINE REVERSIBLE.

Michel LORRAIN et Jean-Claude MASO

Département de Génie Civil,  
Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.

L'étude des lois de comportement des mortiers et bétons et de leurs mécanismes de fissuration et de rupture fait l'objet d'un programme de recherche développé depuis plusieurs années au Département de Génie Civil de l'I. N. S. A. de Toulouse.

Nous présentons, dans cette communication, les conclusions de ces travaux en ce qui concerne la définition d'un critère de réversibilité pour les mortiers et bétons.

## GENERALITES ET METHODE D'ETUDE

Les désordres irréversibles tels que microfissures ou plastifications sont des phénomènes qui se produisent à l'échelle locale dans le matériau.

C'est pourquoi il nous a paru indispensable pour mener notre étude, de tenir compte des distributions locales de déformations et de contraintes engendrées dans le matériau par les multiples singularités qui s'y trouvent.

La grande complexité de la structure interne des bétons nous interdit l'analyse directe des états de déformations et de contraintes qui s'y développent. Nous avons donc été amené à leur substituer un modèle théorique simple, pour entreprendre ensuite des études plus complètes sur des modèles de plus en plus complexes et revenir ainsi au matériau composite initial.

Nous avons supposé que le solide n'était pas fissuré initialement.

Nous avons repris l'hypothèse formulée par DANTU (1) selon laquelle on peut considérer les bétons comme des milieux hétérogènes à deux phases homogènes et isotropes, le mortier, d'une part, et les granulats, d'autre part.

On peut alors représenter un béton comme un composite granulaire cohérent à matrice élastique, dont les singularités sont soit des inclusions rigides par rapport à la matrice, soit des trous libres. Les premières simulent les cailloux et les secondes les pores.

Nous avons distingué deux types de liaison entre la matrice et la singularité. Dans un premier cas, nous avons supposé qu'il y avait adhérence (2) entre les deux phases. Les déplacements de l'inclusion et de la matrice sont alors égaux à l'interface.

Dans un second cas, nous avons supposé qu'il n'y avait pas adhérence. Il existe alors deux types de conditions aux limites à l'interface. Sur la partie en contact, elles sont celles de l'adhérence ; sur la partie décollée, elles sont celles d'un bord libre.

Nous avons, dans un premier temps, analysé le comportement d'un modèle élémentaire plan, à singularité circulaire unique. Nous pouvons ainsi mener jusqu'au bout les calculs mathématiques de l'élasticité linéaire.

Cette représentation schématique peut paraître très éloignée de la réalité physique, mais il convient de remarquer que ce modèle constitue un premier pas dans l'hétérogénéité.

Nous avons ensuite généralisé cette schématisation en examinant le cas d'un modèle polygranulaire constitué d'une matrice plane dans laquelle est insérée une distribution aléatoire d'inclusions circulaires, de manière à nous rapprocher du matériau composite initial.

La connaissance des distributions théoriques des contraintes et des déformations en tout point du modèle nous permet d'étudier le comportement du schéma théorique de béton à la frontière du domaine de réversibilité.

Dès lors qu'on connaît, en effet, les critères auxquels obéissent les deux phases homogènes en présence, on peut déterminer, pour une sollicitation donnée, en quels points l'état limite est atteint et définir ainsi avec précision les zones où apparaissent les premières plastifications ou les premières microfissures.

Lorsqu'on ne connaît pas les critères auxquels obéissent les deux phases homogènes, on peut, à partir d'observations expérimentales suffisamment fines de l'apparition des premiers désordres irréversibles, tenter de définir les lois du passage à l'état limite réversible.

Nous avons, pour cela, envisagé plusieurs hypothèses de critère :

- le critère de RANKINE, exprimé en traction pour tenir compte de la faible résistance des bétons vis à vis de ce type de sollicitation,
- le critère du cisaillement maximal,
- le critère d'extension maximale,
- le critère de distorsion maximale,
- le critère de CAQUOT, mis sous la forme de la théorie de COULOMB-MOHR modifiée par PAUL et VILE (3), qui est une combinaison du critère de RANKINE dans les quadrants de traction et du critère du cisaillement maximal dans le quadrant de la compression biaxiale.

Nous avons comparé le comportement théorique du modèle dans chacune de ces hypothèses, à son comportement réel, tant en ce qui concerne l'allure de la trace de la surface d'état limite dans le plan ( $p_1$ ,  $p_2$ ) des contraintes appliquées au modèle, qu'en ce qui concerne les figures de microfissuration.

#### COMPORTEMENT MECANIQUE DU MODELE ELEMENTAIRE

##### Distribution des contraintes et des déformations

Pour la détermination théorique du champ de contraintes et de déformations en tout point du modèle, nous avons utilisé la théorie des potentiels complexes (4) associée à un système de coordonnées polaires.

Lorsqu'il y a adhérence, l'application directe du principe de superposition aux résultats donnés par MUSKHELISHVILI pour une sollicitation monoaxiale permet d'obtenir la solution théorique du problème pour une sollicitation biaxiale quelconque.

Lorsqu'il n'y a pas adhérence, la solution est obtenue en développant, au contour de la singularité, la contrainte normale en polynôme trigonométrique dont les coefficients sont calculés en écrivant les conditions aux limites sur la partie décollée et sur la partie en contact.

L'expérience, menée en traction biaxiale avec une machine d'essais que nous avons conçue pour éviter toute sollicitation parasite, nous a permis de vérifier la validité des solutions théoriques précédentes.

##### Etat limite réversible : définition du critère

Le critère de RANKINE, exprimé en traction, conduit à une trace de la surface d'état limite qui n'est pas définie dans le domaine de la compression biaxiale puisque pour un rapport des contraintes appliquées inférieur à quatre, toutes les contraintes locales sont des compressions. Ce critère ne peut donc convenir.

Les critères du cisaillement maximal et de distorsion maximale ne peuvent pas être non plus retenus car le convexe d'état limite qui leur est associé est symétrique par rapport aux bissectrices du repère. Ceci reviendrait à admettre que les mortiers et bétons ont un comportement physique symétrique en traction et en compression.

Le critère d'extension maximale, de même que le critère de la théorie de COULOMB-MOHR modifiée, mènent à des convexes tout à fait semblables à ceux que l'on observe expérimentalement.

Nous avons pu remarquer que ces courbes étaient également très voisines de celles obtenues sur le matériau réel (3), (5), (6), ce qui justifie, a posteriori, notre schématisation.

L'allure des figures de fissuration (7) nous permet de rejeter le critère de la théorie de COULOMB-MOHR qui est incompatible avec l'apparition de fissures d'extension dans le plan médian du modèle, en compression biaxiale.

Le critère d'extension maximale, par contre, apporte en tout point du plan  $R^2$  des contraintes appliquées, une explication satisfaisante au comportement du modèle élémentaire de béton.

#### COMPOTEMENT MECANIQUE DU MODELE POLYGRANULAIRE

Nous avons étudié les effets des interactions entre singularités sur les distributions de contraintes et de déformations en tout point de la matrice.

Pour cela, nous avons formulé les lois approchées de l'influence mutuelle qui s'exerce entre plusieurs inclusions (8).

Les distributions de déformations et de contraintes qui en résultent nous ont permis d'étendre au modèle polygranulaire de béton la validité du critère d'extension maximale et d'apporter ainsi une interprétation satisfaisante et cohérente aux figures de fissuration observées dans le matériau réel.

#### CONCLUSIONS

Le critère d'extension maximale apporte au comportement du modèle théorique plan, à deux phases, de béton une explication satisfaisante tant du point de vue des traces des surfaces d'état limite dans le plan  $(p_1, p_2)$  que de celui du développement des microfissures lors du passage à l'état limite réversible.

La théorie de COULOMB-MOHR ne permet pas d'expliquer l'allure de la microfissuration en compression biaxiale et doit, par conséquent, être abandonnée.

#### INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

- |                 |  |
|-----------------|--|
| (1) P. DANTU    | "Etude des contraintes dans les milieux hétérogènes", Annales de l'I.T.B.T.P., janvier 1958, n° 121.   |
| (2) J. FARRAN   | "Contribution minéralogique à l'étude de l'adhérence entre les constituants hydratés des ciments et les matériaux enrobés", Thèse Doct. ès Sc., Toulouse 1956. |
| (3) G.W.D. VILE | "Paper F2, International Conference on the Structure of Concrete, Londres 1965.  |

- (4) N.I. MUSKHELISHVILI "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity", P. Noordhoff, Ltd. Edit.
- (5) A. BASCOUL et J.C. MASO "Influence de la contrainte intermédiaire sur le comportement mécanique du béton en compression biaxiale", Colloque sur la Rhéologie des Bétons, Paris décembre 1973.
- (6) A. STEGBAUER et D. LINSE "Comparison of stress-strain behaviour of concrete and other materials under biaxial loading", Colloque R.I.L.E.M., Cannes octobre 1972.
- (7) H. CALVET "Etude sur modèle plan des déformations sous charge autour d'un granulat ", Colloque de Géotechnique, Toulouse 1969.
- (8) M. LORRAIN "Contribution à l'étude de la micromécanique des matériaux granulaires cohérents. Application aux bétons", Thèse Doct. ès Sc., Toulouse 1974.