

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

**Band:** 18 (1974)

**Artikel:** Sécurité des constructions: proposition d'un modèle de représentation statistique des actions

**Autor:** Mathieu, Henri

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16946>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Sécurité des constructions**  
**Proposition d'un modèle de représentation statistique des actions**

Sicherheit von Tragwerken  
Vorschlag eines Modells für die statistische Darstellung der Einwirkungen

Safety of Structures  
Proposition of a Pattern for the Statistic Representation of the Actions

**Henri MATHIEU**  
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées  
Chef de la Division des Ouvrages d'Art B au SETRA  
(Ministère de l'Equipment)  
Co-Directeur technique du Comité Européen du Béton  
Paris, France

I N T R O D U C T I O N

par M. G. GRATTESAT - Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées  
au S.E.T.R.A.  
Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

La méthode semi-probabiliste d'états-limites préconisée il y a près de vingt ans par le Conseil International du Bâtiment pour vérifier la sécurité des constructions, est maintenant adoptée par les Associations Internationales spécialisées : Comité Européen du Béton, Fédération Internationale de la Précontrainte, Convention Européenne de la Construction Métallique, ainsi que par l'ISO, Organisation Internationale de Normalisation.

On peut donc espérer qu'un des objectifs poursuivis par ces associations, l'harmonisation de la sécurité entre les diverses constructions, sera atteint sans trop tarder.

Les règlements techniques basés sur la méthode des contraintes admissibles sont en effet très différents d'un pays à l'autre. Ces différences ne proviennent pas, en général, d'études théoriques ou expérimentales, ni de considérations économiques, mais seulement du fait que les réglementations nationales ont évolué, depuis le 19 ème siècle, indépendamment les unes des autres et sans bases scientifiques solides. A l'intérieur d'un même pays, on constate d'ailleurs des différences du même genre entre constructions suivant le matériau choisi ou suivant le maître d'ouvrage dont elles dépendent.

Théoriquement, la nouvelle méthode, fondée sur des théories scientifiques, devrait permettre de supprimer les divergences injustifiées et d'aboutir à une bien meilleure homogénéité des constructions.

*En fait, il reste beaucoup à faire pour obtenir ce résultat.*

*On constate en effet dans les documents internationaux une disproportion très marquée entre ce qui concerne le calcul, qui est traité avec beaucoup de précision et de détails, et les indications relatives à la "sécurité" elle-même, qui sont beaucoup plus sommaires.*

*Ceci s'explique facilement : grâce aux recherches théoriques, appuyées sur de très nombreuses études expérimentales, et grâce à la puissance des moyens de calcul actuels, le calcul des structures a fait de très grands progrès ; il est possible maintenant de prévoir avec une bonne précision le comportement d'une structure, même très complexe, soumise à un système de forces et de couples bien déterminé.*

*En revanche, pour dimensionner une construction réelle, on connaît mal les forces et les couples auxquels elle devra résister, et on est amené à leur donner des valeurs forfaitaires choisies de manière largement arbitraire.*

*De même les valeurs des coefficients de sécurité qui doivent intervenir dans les calculs sont fixées de façon plus subjective que rationnelle.*

*Sur ces questions, la méthode semi-probabiliste représente un grand progrès par rapport au passé, notamment parce qu'elle oblige les Commissions Nationales et les projeteurs à réfléchir sur le niveau de sécurité des constructions. Mais elle n'est pas par elle-même suffisante, et il faudra accumuler beaucoup de travail théorique et de données statistiques pour l'appliquer convenablement et pour arriver à déterminer scientifiquement les valeurs numériques nécessaires.*

*Il résulte de cette situation que les règlements ou projets de règlements basés sur les nouveaux principes de sécurité sont encore sensiblement différents suivant les pays, non pas à cause des méthodes de calcul, qui sont pratiquement unifiées, mais à cause des valeurs différentes attribuées à l'ensemble des actions, et des coefficients qui sont utilisés pour calculer les sollicitations.*

*Si la même sollicitation peut varier, sans raison objective, de 20 % et même plus suivant le règlement appliqué, il paraît évidemment illusoire de calculer la structure à 1 %, voire même à 1 % près.*

*De toute façon, il sera absolument indispensable de s'entendre sur les actions à prendre en compte et pas seulement sur les méthodes de calcul, si l'on veut unifier, ou tout au moins harmoniser, les règlements de différents pays.*

*Ces constatations montrent la nécessité et l'importance d'explorer ce domaine des actions qui apparaît, lorsqu'on examine les textes existants, comme très mal connu.*

○

○

*Le premier travail qui s'impose consiste à approfondir et à développer la notion de "valeur caractéristique" d'une action. Ce travail a été commencé, en particulier par le Comité mixte "Sécurité des Constructions" qui réunit les représentants des grandes associations internationales. Il a fait apparaître de sérieuses difficultés, malgré la simplicité apparente de la définition donnée dans les "Recommandations Internationales" CEB-FIP de la valeur caractéristique (que nous appellerons dans ce qui suit "valeur caractéristique principale").*

Cette étude ne peut pas être séparée de celle des combinaisons d'actions. Dans le cas général, en effet, une construction risque d'être soumise, en dehors de son poids propre, à plusieurs actions simultanées : charges d'exploitation, vent, neige, température, etc....

Les premières formules indiquées dans les "Recommandations Internationales", qui ne font intervenir qu'une seule action en plus du poids propre, ne sont donc applicables que dans des cas particuliers.

Dans la plupart des cas, c'est la formule (3) de l'article 4 22,211 :

$$1,5 \left[ 0,9 S_{gk} + 0,9 S_{q1k} + 0,8 S_{q2k} + 0,7 (S_{q3k} + S_{q4k} + \dots) \right]$$

qui devrait être utilisée (Rédaction de Mai 1972).

Mais il semble tout à fait improbable - sauf avec des actions très particulières - que plusieurs actions puissent intervenir en même temps avec leurs valeurs caractéristiques principales, même réduites de 10 à 30 %.

Cette observation explique la classification des actions et de leurs valeurs caractéristiques que nous avons faite dans les "Directives Communes relatives au calcul des Constructions" (Instruction Provisoire du 13 Décembre 1971) qui sont destinées à servir de base aux nouveaux règlements français de calcul aux états-limites.

Dans ces "Directives Communes", reprenant une terminologie proposée par l'ISO. TC.98, nous avons appelé :

- valeurs caractéristiques de courte durée, celles qui présentent une faible probabilité d'être dépassées, dans le sens défavorable, une fois au cours de la durée de référence ; cette notion est, qualitativement, la même que celle de valeur caractéristique principale ;

- valeurs caractéristiques de longue durée, celles qui présentent une faible probabilité d'être atteintes ou dépassées, dans le sens défavorable, fréquemment ou en permanence pendant une fraction assez longue de la durée de référence ; cette notion est tout à fait différente de la précédente : elle a pour objet de définir une valeur dont la probabilité de simultanéité avec la valeur "de courte durée" d'une autre action ne soit pas négligeable.

Les combinaisons à étudier sont alors essentiellement les combinaisons "fondamentales" dans lesquelles une seule action a sa valeur caractéristique de courte durée, les autres ayant leur valeur caractéristique de longue durée.

On a estimé que la recherche de valeurs caractéristiques de longue durée permettait, dans la grande majorité des cas, une meilleure approche de la réalité que la recherche de coefficients  $\gamma_{s2}$  indépendants de la nature des actions (coefficients 0,9 0,8 et 0,7 ci-dessus).

Cependant cette méthode ne résout par elle-même en rien les difficultés d'estimation des "valeurs caractéristiques". La notion de valeur caractéristique "de longue durée" suscite même de nouvelles questions. Consistant, en effet, à rechercher la probabilité d'atteinte ou de dépassement de telle ou telle valeur de l'action pendant une certaine durée, elle conduit à étudier la loi de distribution dans le temps de chaque action, et pas seulement la loi de distribution de ses valeurs maximales.

*Ce problème ne peut d'ailleurs être esquivé, quel que soit le procédé employé pour étudier les combinaisons d'actions.*

*Dans l'étude qui suit, M. MATHIEU propose, pour l'aborder, une méthode simple et efficace. Certes, il reste beaucoup à faire pour utiliser son "résumé statistique" ; mais ce travail permet d'espérer qu'en disposant d'un minimum de données statistiques, il sera possible d'appuyer la sécurité des constructions sur des bases moins empiriques que celles que nous avons héritées du passé.*

o

o

o

#### PREAMBULE

L'étude qui suit constitue la mise au net, avec quelques compléments, des communications que nous avons présentées à la Commission de Sécurité du Comité Européen du Béton, puis à son Assemblée Générale, respectivement à LONDRES le 10 Février 1972, et à LENINGRAD en Mai 1972.

Au cours de ces études nous avons bénéficié d'abord de certains conseils de M. J. FERRY BORGES, Président de la commission mixte de sécurité, puis d'observations de M. D. VAGUELSY, Professeur de Probabilités à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, de qui on trouvera en annexe une étude qui complète utilement, par recouplement, nos propres recherches.

#### 1. - POURQUOI UNE REPRESENTATION RESUMEE ET STATISTIQUE ?

1,1. - Depuis plus de vingt ans l'on sait qu'une théorie correcte de la sécurité des constructions ne peut être que de nature probabiliste. Les premières recherches en ce sens étaient basées sur l'idée qu'il serait possible d'évaluer directement la probabilité de ruine d'une construction à partir des types de distribution statistique des actions et des résistances, et des quelques paramètres (par exemple valeur moyenne et écart-type) nécessaires pour préciser exactement chaque loi de distribution.

1,2. - Il a fallu, depuis, reconnaître que la réalité était plus complexe pour de nombreuses raisons parmi lesquelles on peut citer :

- rôle de la variable temps dans le problème de la simultanéité des actions, voire dans les problèmes de résistance ;
- rôle important joué dans la sécurité par des éléments parasites (gradients thermiques, imprécisions ou erreurs de calcul ou d'exécution, etc...) difficilement probabilisables ;
- multiplicité des états-limites, influence des états antérieurs de la construction, etc....

Pour ces raisons, seules à ce jour ont pu être rendues opérationnelles des théories très simplifiées, dites semi-probablistes. La première de ces théories a été celle des règlements de calcul soviétiques. La plus élaborée, ensuite, a été celle des Recommandations Internationales du C.E.B. et de la F.I.P. (PRAGUE 1970) [1]. Elle avait en principe, par rapport à la précédente, deux avantages principaux : celui d'une formulation simple grâce à la notion de valeur caractéristique ; et celui de prendre en compte, par l'emploi de coefficients  $\gamma_{s2}$ , la

simultanéité de plusieurs actions et, par l'emploi de coefficients  $\gamma_{s3}$ , les éléments parasites dont l'omission rend impossible l'obtention d'une sécurité homogène.

Cependant force est de constater que les valeurs numériques à donner à ces coefficients partiels de sécurité n'ont fait l'objet d'aucune étude d'ensemble. Et le véritable motif nous paraît en être le fait que leur détermination nécessite de faire appel à des données plus élaborées que celles énumérées en 1,1.

Par ailleurs certains résultats d'études de recherche ne peuvent s'exprimer directement ou aisément, pour les applications, en fonction de la seule valeur caractéristique ni même des diverses données énumérées en 1,1 ; c'est le cas par exemple pour les classements qualitatifs des actions et pour l'étude de la fatigue.

1,3. - Le modèle que nous présentons dans le présent article a pour objet de représenter chaque action par un "résumé statistique" dont l'emploi nous paraît permettre de traiter la plupart des problèmes que nous avons rencontrés jusqu'à présent concernant les actions, et même d'aborder par voie probabiliste celui des sollicitations de calcul.

Il s'agit de remplacer une distribution temporelle et/ou spatiale de la valeur d'une action par une représentation simplifiée qui soit indépendante des hasards de la distribution réelle, qui puisse donc être obtenue par des méthodes statistiques à partir d'échantillons, et qui rende abordables par le calcul les études de recherche et d'application que nous avons à mener, en particulier en dehors du domaine des valeurs extrêmes.

Nous verrons en particulier que cette représentation permet de retrouver le classement qualitatif des actions qui figure dans les Directives Communes françaises [2], mais en le précisant et en le complétant, et d'étudier numériquement des problèmes aussi divers que la simultanéité de plusieurs actions et les sollicitations de fatigue.

Elle a cependant certaines limites qui, dans l'immédiat, correspondent aux restrictions suivantes :

- l'action doit pouvoir être caractérisée à un moment quelconque, par une seule valeur numérique ; autrement dit, pour les actions qui sont à plusieurs composantes dans l'espace (direction variable) ou s'étendent dans le temps (actions provoquant une résonance), la représentation que nous proposons n'est pas suffisante en son état actuel ;

- l'usage du modèle est lié à la possibilité de se servir avec une précision suffisante, de la loi de probabilité de Poisson (ou d'autres lois, à définir, de la distribution des actions dans le temps) ;

- nous laissons de côté le problème de la connaissance de la distribution statistique à partir d'un échantillon très limité ; ce problème nécessite d'introduire la notion de double probabilité (Peltier, Congrès de la FIP, PRAGUE 1970). Nous mentionnons toutefois qu'en dehors du domaine des valeurs extrêmes l'importance pratique de ce problème est généralement réduite.

Elle nécessite, de plus, diverses options sur la définition spatiale et temporelle de chaque action, c'est-à-dire sur celle de l'évènement étudié : veut-on, en particulier, considérer comme constituant un seul ou plusieurs évènements, plusieurs fluctuations successives de grande ou petite amplitude, à

courte période et dont le groupage dans le temps n'est donc pas fortuit ? Par exemple, pour définir la vitesse du vent, dans quel domaine spatial et surtout pendant quelle durée en prend-on la valeur moyenne ? Cette option interfère avec le problème de la validité de la loi de Poisson.

Pour lever ces difficultés, le modèle peut encore servir, mais en l'établissant avec des finesseuses différentes selon l'étude dont il s'agit.

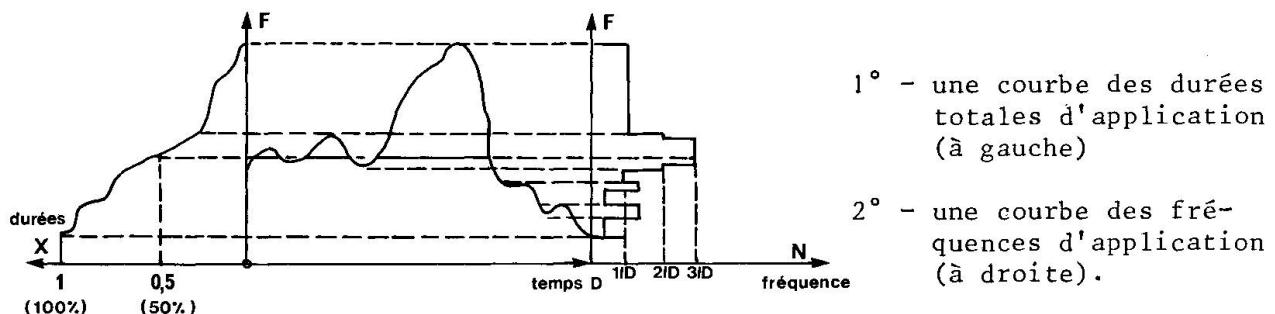
De même, les actions de la neige étant concentrées pendant l'hiver, on peut se servir du modèle en séparant dans les études les périodes d'été des périodes d'hiver (on se sert, selon la saison, de deux modèles différents).

## 2. - DEFINITION DE LA REPRESENTATION PROPOSEE

Nous partons d'une courbe représentant la variation réelle de la grandeur  $F$  d'une action en fonction du temps, pendant une durée  $D$  suffisante pour que la courbe constitue un échantillon "assez représentatif" de la distribution de la grandeur de l'action. L'échantillon peut être uniquement temporel, ou temporel et spatial (dans ce dernier cas les variations correspondant aux différents relevés de durées  $D_i$  sont représentées l'une à la suite de l'autre sur le graphe, donnant ainsi une représentation sur une durée totale  $D = \sum D_i$ ).

Habituellement, et en particulier pour la détermination des valeurs caractéristiques des actions, on analyse ce graphe par un "classement vertical" des actions : on fractionne la durée  $D$  en un grand nombre d'intervalle égaux, on relève dans chacun d'eux la valeur maximale de  $F$ , et on étudie statistiquement l'ensemble de ces valeurs maximales (exemple maxima mensuels des vitesses du vent relevées en site donné).

Pour l'établissement de notre modèle, nous proposons au contraire de procéder à un "classement horizontal" des actions, de manière à en tirer deux fonctions statistiques représentées par deux courbes :



Pour ce faire, nous étudions les segments découpés par le graphe échantillon sur des droites horizontales.

Sur une de ces droites, d'ordonnée  $F$  quelconque, le graphe découpe au total  $n$  segments (soit  $n_1$  au cours desquels l'ordonnée de la droite considérée est dépassée, et  $n_2$  au cours desquels elle n'est pas atteinte ;  $n_1 = n_2 \pm 1$  près ; et  $n = n_1 + n_2$ ) ; la somme des longueurs des  $n_1$  segments est désignée par  $d$ .

La courbe des durées s'obtient en portant en abscisse, à l'ordonnée  $F$ , la grandeur  $x = d/D$ .

La courbe des fréquences s'obtient en portant en abscisse, à l'ordonnée  $F$ , la grandeur  $N = \frac{n-1}{2D}$ .

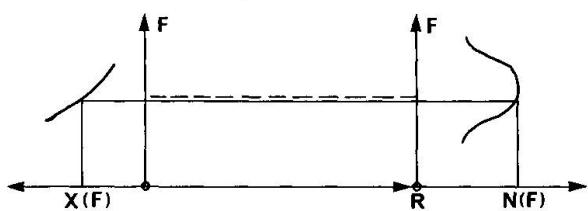
Ainsi, sur la figure ci-dessus, à l'ordonnée représentée, nous avons  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$ ,  $n = 7$ , d'où  $N = 3/D$ , et  $d/D = 0,5$  (soit 50 %).

Les ordonnées de chacune de nos deux courbes sont comprises entre les deux valeurs extrêmes de  $F$  sur l'échantillon.

On se rend compte que ces courbes peuvent être obtenues avec une précision suffisante à partir d'un échantillon limité, à l'exception de leurs parties extrêmes, pour lesquelles en revanche le dépouillement d'un vaste échantillon est aisément. Ce sont ces deux fonctions (ou leurs courbes représentatives) qui constituent le "résumé statistique" des variations de l'action au cours du temps.

### 3. - PREMIERES INTERPRETATIONS POSSIBLES ET PROPRIETES D'UN RESUME STATISTIQUE.

3.1. - Disposant de courbes de durée et de fréquence afférentes à une action, que peut-on en déduire en ce qui concerne la distribution de l'action ?



Coupons nos deux courbes par une même droite d'ordonnée  $F$ ; nous en déduisons les deux abscisses  $x(F)$  et  $N(F)$ .

De façon générale, pour une durée  $R$  quelconque donnée :

- le produit  $R N(F)$  est l'espérance mathématique du nombre de fois que l'action dépassera la valeur  $F$  au cours de  $R$ ; en conséquence la période moyenne de retour d'une valeur au moins égale à  $F$  est  $1/N(F)$ ;
- le produit  $R x(F)$  est l'espérance mathématique de la durée totale, contenue dans  $R$ , pendant laquelle l'action sera supérieure à  $F$ ;
- le quotient  $x(F) / N(F)$ , qui est indépendant de  $R$ , est la valeur probable de la durée moyenne au cours de laquelle l'action, chaque fois qu'elle atteindra  $F$ , restera supérieure à cette valeur.

Deux cas extrêmes peuvent alors se présenter :

a) - Pour une durée de référence  $R$  assez grande pour que  $R N(F)$  soit largement supérieur à 1, et les extrémités supérieures des courbes étant exclues, on peut considérer avec une bonne approximation que, pendant cette durée  $R$ , la valeur  $F$  de l'action sera dépassée  $R N(F)$  fois, et chaque fois pendant  $x(F) / N(F)$  en moyenne; autrement dit, de ces courbes nous déduisons le nombre  $n_1$  de segments ci-dessus et leur longueur moyenne. On ne connaît en revanche ni les dates afférentes aux différents segments, ni la loi de distribution de leurs longueurs autour de leur valeur moyenne.

On se rend compte qu'on a ainsi une représentation de la loi de distribution de  $F$  débarrassée de ses variations fortuites et simple à utiliser. Pour cela, admettant que la loi n'a été ainsi débarrassée que de ses variations fortuites (cf. conditions de validité mentionnées au § 1,3 ci-dessus), nous avons dans nos études personnelles considéré nos  $n_1$  segments comme égaux entre eux et de répartition quelconque dans le temps (application de la loi de Poisson à leurs dates d'origine). Cependant d'autres hypothèses sont possibles : en particulier, comme on le verra, M. D. VAGUELSY a admis, dans ses calculs, non pas que les segments sont égaux entre eux, mais que la distribution de leurs longueurs est aléatoire. On verra au § 7,1 que les résultats obtenus par ces deux méthodes ne diffèrent que par des termes du second ordre.

b) - Pour une durée de référence assez courte pour que  $R N(F)$  soit très inférieur à 1 (donc en particulier pour les valeurs de  $F$  les plus grandes), la période moyenne de retour  $1 / N(F)$  est très supérieure à  $R$  et on peut considérer avec une bonne approximation que la valeur  $F$  aura une probabilité  $R N(F)$  d'être atteinte une seule fois ; et que si elle est atteinte, ce sera pendant une durée probable égale à  $x(F) / N(F)$ . Il y a peu à attendre d'hypothèses complémentaires.

De façon plus générale, considérant la seule courbe de fréquence, si on appelle  $P_k$  la probabilité d'atteinte de  $F$   $k$  fois pendant  $R$ , en application de la loi de Poisson :

- la probabilité  $P_k$  est égale à  $\frac{[R N(F)]^k}{k!} e^{-R N(F)}$  ;
- la probabilité de n'avoir aucune atteinte est  $P_0 = e^{-R N(F)}$  ;
- la probabilité d'avoir au moins une atteinte est  $1 - P_0 = 1 - e^{-R N(F)}$  ;
- la probabilité d'avoir une seule atteinte est  $P_1 = R N(F) e^{-R N(F)}$  ;
- la probabilité d'avoir au moins deux atteintes est  $1 - P_0 - P_1 = 1 - [1 + R N(F)] e^{-R N(F)}$
- etc....

Enfin, si nos deux courbes sont bornées en ordonnée, nous connaissons évidemment les valeurs extrêmes que peut prendre  $F$ .

3,2. - Nos courbes nous permettent aisément de retrouver les notions les plus couramment utilisées dans les théories semi-probabilistes de la sécurité.

Ainsi, si nous désignons comme "valeur caractéristique", conformément à la définition admise dans les R.I. de 1970, la valeur qui a une probabilité de 0,05 d'être atteinte pendant la durée prévue de la construction (soit 50 ans en ordre de grandeur), cette valeur est l'ordonnée de la courbe de fréquence au point d'abscisse  $N(F) = 0,05/50 = 0,001$  (soit 1000 ans de période moyenne de retour). Si nous désignons comme telle, comme l'admettent actuellement certains pays, la valeur qui a une période moyenne de retour de 50 ou 100 ans, cette valeur est l'ordonnée de la courbe de fréquence au point d'abscisse  $N(F) = 1/50$  ou  $1/100 = 0,02$  ou  $0,01$ .

Si nous désignons comme "valeur caractéristique de longue durée", au sens des Directives Communes françaises, la valeur qui est atteinte par exemple pendant 1 % du temps, nous l'obtenons en revanche à partir de la courbe de durée, à l'abscisse  $x = 0,01$ .

Mais en outre on se rend compte que disposant pour chaque action des courbes de durée et de fréquence, on est en mesure d'étudier la simultanéité de plusieurs actions, et les risques de fatigue sous l'effet de ces actions, bref tout ce qui doit être étudié en fonction de l'atteinte d'une valeur  $F$  un certain nombre de fois. Nous donnerons plus loin, aux § 6 et 7, des exemples de telles études.

3,3. - Enfin il est intéressant de donner les relations qui existent entre notre modèle et les résultats du classement vertical des actions, toujours sous

réserve de validité de la loi de Poisson. Pour éviter ici de trop longs développements, nous nous limiterons au cas où  $F$  est toujours positive ou nulle et la fonction de fréquence  $N(F)$  est uniformément décroissante en fonction de  $F$  (cas par exemple de l'action du vent et de la plupart des actions intermittentes).

3,31. - Appelons  $P_o(F)$  la probabilité de n'avoir aucune atteinte de la valeur  $F$  pendant un intervalle de temps élémentaire  $r$ ;  $P_o(F) = e^{-r N(F)}$ . Considérant que chaque atteinte d'une valeur  $(F + dF)$  entraîne une atteinte de la valeur  $F$ , la probabilité que la valeur maximale de l'action pendant l'intervalle de temps  $r$  soit comprise entre  $F$  et  $(F + dF)$  est égale à :

$$\frac{d P_o(F)}{dF} dF = -r \frac{d N(F)}{dF} e^{-r N(F)} dF.$$

Par intégration, la probabilité d'atteindre pendant  $r$  une valeur non nulle

est  $\int_0^\infty \frac{d P_o(F)}{dF} dF = 1 - P_o(0)$ ,  $P_o(0) = e^{-r N(0)}$  étant la probabilité de n'avoir aucune valeur de  $F$  différente de  $0$  pendant  $r$ .

Par intégration également, la valeur probable du maximum de  $F$  pendant  $r$  (ou valeur moyenne de  $F$  pendant un grand nombre d'intervalles élémentaires  $r$ ) est égale à :

$\bar{F}_r = \int_0^\infty F \frac{d P_o(F)}{dF} dF$ , qu'on peut par une intégration par parties mettre sous la forme  $\bar{F}_r = F_{\max} P_o(F_{\max}) - \int_0^{F_{\max}} P_o(F) dF$ ; cette expression peut toutefois être difficilement exploitable si la loi de distribution de  $F$  n'est pas bornée supérieurement ( $F_{\max} = \infty$ ), chacun des deux termes pouvant être infini.

De même également, l'écart quadratique moyen du maximum de  $F$  pendant  $r$  est égal à :

$$\sqrt{\int_0^\infty (F - \bar{F}_r)^2 \frac{d P_o(F)}{dF} dF}.$$

Plus généralement, la loi de distribution du maximum de  $F$  pendant des intervalles élémentaires égaux à  $r$  s'identifie avec une densité de probabilité

$\frac{d P_o(F)}{dF}$  (correspondant à une probabilité globale  $1 - P_o(0)$ ) et une probabilité  $P_o(0)$  de n'avoir aucune valeur différente de 0 :  $P_o(F)$  est en effet la "fonction de distribution" du maximum de  $F$  pendant  $r$ .

3,32. - Inversement, la loi de distribution de ce maximum étant supposée connue, on peut en déduire la courbe de fréquence par la relation :

$$N(F) = -\frac{1}{r} \log_{nep} \left[ P_o(0) + \int_0^F \frac{d P_o(F)}{dF} dF \right]$$

étant entendu que  $\int_0^\infty \frac{dP_o(F)}{dF} dF = 1 - P_o(0)$ .

$$\text{En particulier } N(0) = -\frac{1}{r} \log_{nep} P_o(0).$$

Ainsi, prenant  $1/r = 12$ , la loi de distribution des maximaux mensuels permet de tracer la courbe  $N(F)$  en prenant l'année pour unité de temps. Mais, naturellement, lorsque  $N$  est très grand, la valeur de  $P_o$  est beaucoup trop petite pour être connue en pratique si  $r$  n'est pas très petit.

Si la connaissance de la loi de distribution des maxima périodiques permet de connaître la courbe de fréquence, la connaissance de la seule valeur probable de ces maxima ne fixe aucun point précis de cette courbe.

En revanche la connaissance de la valeur médiane (probabilité 50 %) de la loi de distribution des maxima permet de fixer un point de la courbe de fréquence. En effet la relation qui lie  $P_o(F)$  à  $N(F)$  permet d'écrire, puisque  $P_o(F_{med}) = 0,5$ , que  $N(F_{med}) = -\frac{1}{r} \log_{nep} 0,5 = \frac{0,692}{r}$ . Nous rappelons que la valeur médiane de la loi de distribution s'identifie à la valeur probable quand la loi est symétrique, et qu'elle est à ce titre utilisée à titre d'approximation à la place de la valeur probable dans les R.I. (P. 21, 21).

#### 4. - EXEMPLES NUMÉRIQUES

4.1. - Nous avons essayé de déterminer le résumé statistique de l'action du vent à partir de divers renseignements recueillis par la Commission française qui étudie actuellement ce problème.

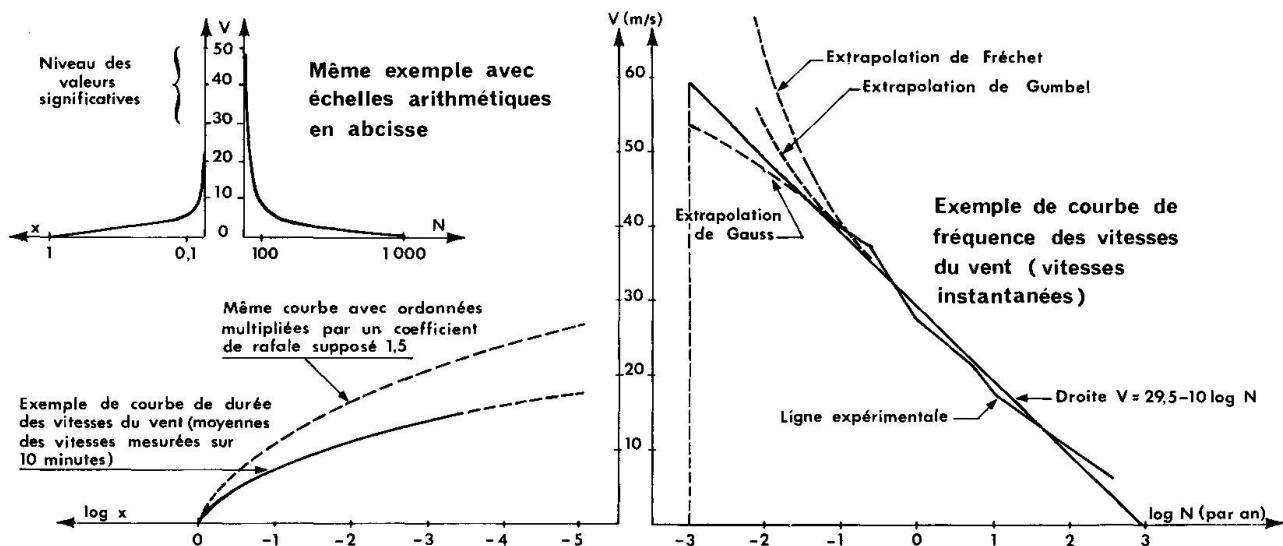
Nous avons procédé à cette étude en considérant en particulier un échantillon de 10 stations météorologiques françaises que nous avons considérées comme assez homogènes (valeur moyenne de la vitesse maximale annuelle comprise entre 29 et 31 m/s) et (peut-être) assez indépendantes les unes des autres. Pour l'ensemble de nos 10 stations, nous disposions au total de 219 années d'observations.

Quoique les renseignements dont nous disposions fussent incomplets et hétérogènes, ils nous ont permis de tracer de façon approchée :

- une grande partie de la courbe de fréquence des vitesses instantanées, pour laquelle il s'est avéré commode de porter en abscisse  $\log N$  (par an) et en ordonnée la vitesse en m/s (et non la pression du vent) ; on constate qu'entre  $N = 0,01$  et  $N = 300$  la courbe de fréquence est assez bien représentée par la droite  $V = 29,5 - 10 \log N$  ;

- une partie appréciable de la courbe de durée des vitesses moyennes sur 10 minutes, pour laquelle il s'est avéré commode de porter en abscisse  $\log x$  et en ordonnée, là encore, la vitesse en m/s ; on constate qu'entre  $x = 0,0001$  et 1 la courbe de durée est très bien représentée par la formule  
 $V = 7,2 (\log 1/x)^{0,55}$ .

Nous précisons que les mesures ont été faites dans des conditions normalisées diverses, et exploitées sans distinguer selon la direction.



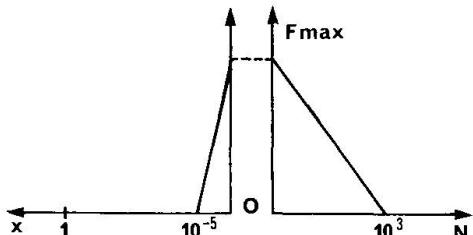
Les résultats obtenus qui, nous le rappelons, n'ont qu'un caractère d'illustration en raison de l'hétérogénéité des renseignements utilisés, ont pu donner lieu à une discussion et à divers développements :

- sur le problème de l'indépendance des stations (cette indépendance est sans doute partielle),
- sur la validité des formules classiques d'extrapolation entre  $N = 0,02$  et  $0,001$  (la réalité nous paraît a priori être entre les lois de GAUSS et de GUMBEL, et contredire la loi de FRECHET),
- par application des formules du § 3,31, sur la distribution des maximums périodiques (recouplement des valeurs observées, et notamment de leurs dispersions) ;
- sur les valeurs caractéristiques de courte durée et de longue durée de la vitesse du vent.

Nous pensons que cette étude permet déjà, non seulement d'avoir une idée qualitative des différents phénomènes qu'on peut vouloir étudier, mais même d'en connaître les ordres de grandeurs.

Entre autres résultats, nous pensons personnellement que l'échantillon spatio-temporel puisse permettre de gagner une décimale en abscisse sur la courbe des fréquences, sinon de fixer sans trop d'erreur la vitesse  $V$  correspondant à  $N = 0,001$ , les vitesses comprises entre  $N = 10^{-4}$  et  $10^{-5}$  restant en revanche certainement inaccessibles.

4,2. - Nous avons, pour étudier des applications possibles de notre méthode, considéré un exemple défini par les deux courbes ci-contre, en prenant pour unité de temps et durée d'étude 1 an. Cette loi est du type que l'on obtiendrait en étudiant la charge apportée sur un petit pont-route par un petit trafic de camions, en considérant qu'un seul camion peut être à un



moment donné sur le pont et en négligeant l'effet de la plupart des voitures légères. La distribution représentée par cet exemple correspond à la distribution des poids unitaires des véhicules pris en compte. Les applications sont données plus loin en 7,2 et 7,4.

##### 5. CLASSEMENT QUALITATIF DES ACTIONS A PARTIR DES COURBES DE DUREE ET DE FREQUENCE

Nous allons voir que l'allure des courbes de durée et de fréquence varie considérablement selon la nature des actions, et que cela permet de procéder à un classement qualitatif rationnel des actions.

L'objet d'un classement qualitatif des actions (et non pas de leurs valeurs) est de choisir, parmi plusieurs règles définissant chacune une manière de traiter des actions, celle qui est appropriée à chaque action (cf. par exemple Directives Communes Françaises). L'expérience a montré qu'il était difficile de bien le faire en recourant seulement à des critères eux-mêmes uniquement qualitatifs. L'emploi de critères numériques doit permettre un progrès, étant précisé que les valeurs numériques utilisées doivent être des valeurs pratiques plutôt que théoriques.

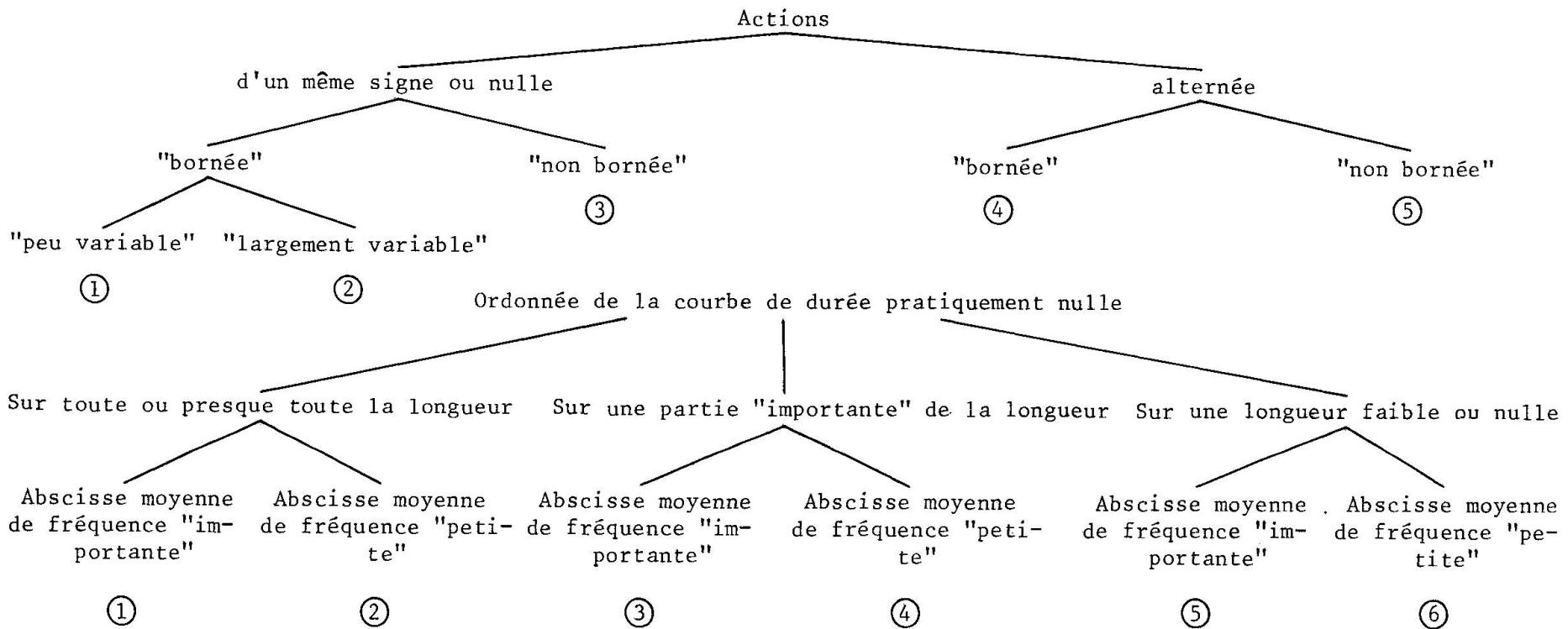
5,1. - Nous proposons, pour une étude de recherche, et parmi d'autres solutions possibles, de procéder à ce classement en recourant successivement et dans l'ordre qui suit, aux critères ci-après, étant entendu que ces critères pourront être améliorés en fonction des valeurs numériques retenues dans les Principes de sécurité :

- l'action F est d'un même signe ou de signes alternés ;
- l'action F est ou non "bornée", c'est-à-dire comprise entre deux valeurs extrêmes finies ; en fait ce critère doit être utilisé de façon pratique, ce qui revient à l'exprimer ainsi : l'action F est ou non bornée par k fois la valeur caractéristique (par exemple  $k = 1,2$  à  $1,5$ ) ; si l'action est d'un même signe, le critère ne concerne que l'existence d'une borne supérieure ;
- au cas où l'action est d'un même signe et "bornée", les valeurs extrêmes sont proches l'une de l'autre, ou non (autrement dit le rapport de la plus petite valeur extrême à la plus grande est proche de 1, ou assez proche de 0) ;
- la courbe de durée a une ordonnée nulle (ou pratiquement nulle) :
  - sur toute sa longueur ou presque toute sa longueur ;
  - sur une partie "importante" de sa longueur ;
  - sur une très faible partie de sa longueur ou sur une longueur nulle ;
- l'abscisse moyenne de la courbe de fréquence est "importante" ou non sur l'intervalle de variation (si la variation est bornée) ou sur un "large" intervalle de variation (si la variation n'est pas bornée). Cela signifie qu'il existe un intervalle de variation d'amplitude non négligeable dans lequel, pour une durée de référence R donnée, le produit  $R N(F)$  est grand, ou au contraire qu'il reste nécessairement proche de 0 ou 1.

Toutes ces propriétés sont déterminées ou appréciées au vu des courbes de durée et de fréquence. Un certain nombre de combinaisons, selon les critères ci-dessus, sont impossibles ou correspondent à une action qui serait à peu près nulle.

Le tableau de classement est représenté sur la page qui suit.

TABLEAU DE CLASSEMENT



Le classement s'obtient en combinant deux nombres extraits respectivement des parties supérieure et inférieure de ce tableau.

Exemple : 42 désigne une action bornée, de durée totale d'application courte, les applications elles-mêmes étant à la fois rares et brèves.

5,2. - D'après ce tableau 30 combinaisons des divers critères de classement sont théoriquement possibles. En fait 26 seulement présentent de l'intérêt, les combinaisons 11, 12, 13 et 14 contenant des critères incompatibles si l'action n'a pas une valeur pratiquement nulle.

On trouvera en Annexe N° 1 l'énumération et la description de chacune des combinaisons.

Au vu de cette Annexe, on constate que par rapport au premier classement des Directives Communes Françaises :

- on a introduit quelques distinctions supplémentaires : actions alternées ou non, bornées ou non ;

- on a retrouvé :

- . les actions permanentes en 16 (et accessoirement dans d'autres combinaisons) ;

- . les actions cycliques en 25, 26, 35, 36, 45, 46, 55, 56 ;

- . les actions intermittentes en 21, 23, 31, 33, 41, 43, 51, 53 ;

- . les actions accidentielles en 22, 32, 42, 52 ;

- les actions 24, 34, 44 et 54 correspondent à des actions intermédiaires entre les actions cycliques et intermittentes, illustrant une imprécision déjà connue de ce classement ;

- on a distingué en sus :

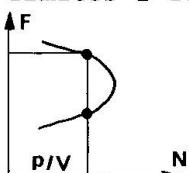
- . parmi les actions cycliques, celles qui varient souvent (25, 35, 45, 55) et celles qui varient rarement (26, 36, 46, 56) ;

- . et parmi les actions intermittentes, celles qui sont de courte durée d'application (21, 31, 41, 51) et celles qui sont de longue durée d'application (23, 33, 43, 53) ;

- on a recensé de nombreuses politiques de dépôt et stockage, illustrant la diversité des cas qui peuvent se présenter ; cette diversité est la raison pour laquelle les Directives Communes ont prévu pour les actions correspondantes des valeurs caractéristiques de longue durée très diverses, et des combinaisons supplémentaires dans lesquelles le produit de coefficients  $\gamma_{s1} \gamma_{s2}$  peut varier dans de larges limites.

## 6. - USAGE DU MODELE POUR L'ETUDE DES ETATS-LIMITES D'UTILISATION ET DE FATIGUE QUAND UNE SEULE ACTION EST A CONSIDERER :

Des études que nous avons effectuées pour la Commission de Sécurité du C.E.B. nous ont conduit à la conclusion que les critères d'atteinte des états-limites d'utilisation peuvent être divers.



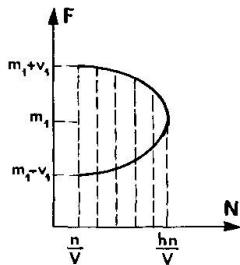
6,1. - Dans certains cas, le dommage à craindre est dû à l'atteinte, une seule fois, de la limite prévue. En un tel cas, la valeur critique F à considérer (avec des  $\gamma_s$  égaux à 1) est celle qu'on relève sur la branche supérieure de la

courbe de fréquence à l'abscisse  $p/V$ , où  $V$  est la durée de vie prévue pour la construction et  $p$  la probabilité d'occurrence admise en fonction du niveau de sécurité recherché.

6,2. - Dans d'autres cas, le dommage à craindre est dû à l'atteinte,  $K$  fois, de la limite prévue. En un tel cas, la valeur critique  $F$  à considérer (avec des  $\gamma_s$  égaux à 1) est celle qu'on relève sur la branche supérieure de la courbe de fréquence à l'abscisse  $p K/V$ , où  $V$  et  $p$  sont définis comme en 6,1.

6,3. - Dans d'autres cas, le dommage à craindre est dû à l'atteinte,  $J$  jours par an, de la limite prévue. Il suffit, de façon approchée, de considérer que la période moyenne de retour doit être d'au moins  $365/J$  et de relever sur la branche supérieure de la courbe de fréquence l'ordonnée correspondant à  $N = J/365$ .

6,4. - Dans d'autres cas, le dommage à craindre est dû à l'atteinte de la limite prévue, pendant une durée totale de  $J$  jours pendant la vie totale ( $V$  années) prévue pour l'ouvrage. Il suffit de relever sur la courbe de durée l'ordonnée correspondant à  $x = J/365 V$ .

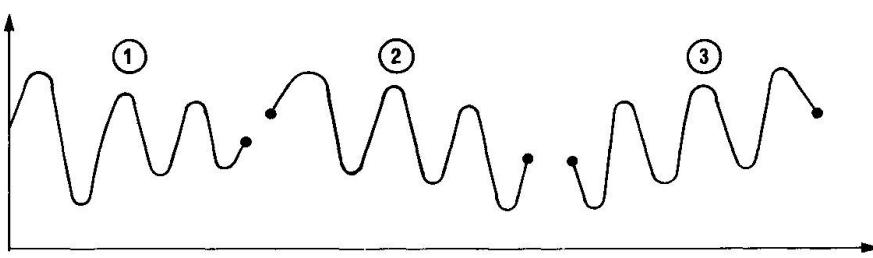


6,5. - Enfin, dans le cas de la fatigue, le critère de ruine peut être défini comme l'atteinte d'une certaine valeur par la somme  $\sum K(m, v)$  où  $n(m, v)$  est le nombre, pendant la vie  $V$  de l'ouvrage, des oscillations d'amplitude  $v$  de chaque côté d'une valeur moyenne  $m$  de l'action et  $K(m, v)$  un coefficient fonction de la construction, mesurant le dommage dû à une telle oscillation.

Pour l'étude de l'effet de la fatigue, il suffit de découper la courbe de fréquence tous les  $n/V$ ,  $n$  étant arbitraire, et de relever à chaque abscisse  $m_i$  et  $v_i$ , puis de calculer la somme  $\sum K(m_i, v_i)$  la fonction  $K$  étant supposée connue.

Il convient de remarquer que cette façon de faire comporte une part d'arbitraire du fait qu'elle suppose que les valeurs maximales et minimales de la distribution se correspondent (cf. courbe réelle 1). Une hypothèse contraire

serait tout aussi possible (cf. courbes réelles 2 ou 3), ou toute hypothèse intermédiaire, sans que le modèle permette de choisir entre elles. Il ne semble pas, toutefois, a priori, qu'il doive en résulter de différence



très notable sur le résultat, c'est-à-dire sur la valeur de la somme  $\sum K(m, v)$ , car les différences des effets correspondent aux deux courbes 1 et 2 (ou 3) se compensent au moins en grande partie ( $m$  est plus grand quand  $v$  est plus petit, et inversement). Il ne semble d'ailleurs même pas qu'on puisse dire, a priori, laquelle des courbes est la plus défavorable. Au surplus, dans le cas fréquent où la branche inférieure de la courbe de fréquence est horizontale (cas d'action intermittente non alternée), la question ne se pose même pas.

On remarquera que dans le cas le plus général, pour l'étude de la fatigue, c'est la courbe de fréquence entière et non pas seulement sa branche supérieure, qui intervient dans les calculs. On remarquera aussi que pour cette étude il est

important que la finesse de définition de l'action soit grande, afin que les oscillations dommageables soient toutes prises en compte.

#### 7. - USAGE DU MODÈLE POUR L'ETUDE DE LA SIMULTANÉITE DE PLUSIEURS ACTIONS :

Nous allons voir que l'usage du modèle permet, en s'appuyant sur les interprétations du § 3,1, de traiter numériquement le problème de la simultanéité de plusieurs actions. C'est, nous semble-t-il, le plus grand avantage que présente la méthode proposée.

##### 7,1. - Simultanéité de deux valeurs quelconques de deux actions quelconques connues par leurs résumés statistiques :

Un raisonnement élémentaire, basé sur les hypothèses que nous avons retenues selon le § 3,2 ci-dessus, nous a conduit à la conclusion suivante :

On trouve que la distribution des coïncidences suit, sous certaines conditions, une loi de Poisson, et que la probabilité d'avoir  $k$  coïncidences de valeurs supérieures respectivement à  $F_1$  et  $F_2$  pendant  $R$  vaut :

$$P_k(F_1, F_2) = \frac{(RN_2 x_1 + RN_1 x_2)^k}{k!} e^{-R(N_2 x_1 + N_1 x_2)} ;$$

$N_1$  et  $x_1$  étant fonctions de  $F_1$ , et  $N_2$  et  $x_2$  de  $F_2$ .

En particulier la probabilité de n'avoir aucune coïncidence vaut  $P_0 = e^{-R(N_2 x_1 + N_1 x_2)}$  et l'espérance mathématique du nombre de coïncidences vaut  $R(N_2 x_1 + N_1 x_2)$ . Si cette dernière valeur est petite, elle se confond avec la probabilité d'occurrence d'une coïncidence.

Les conditions de validité, mentionnées ci-dessus, sont que :

- les lois de distributions de  $F_1$  et  $F_2$  soient indépendantes l'une de l'autre;

- dans chaque loi de distribution, les probabilités d'occurrence soient proportionnelles à toute durée élémentaire, et cette proportion constante pendant  $R$  ;

- toute durée d'application d'actions au moins égales à  $F_1$  (et respectivement à  $F_2$ ) soit petite par rapport à  $R$ .

D'autre part, pendant l'unité de temps :

- pour la 1ère action la valeur  $F_1$  est atteinte ou dépassée :

- $N_1(F_1)$  fois, en espérance mathématique
- pendant une durée totale probable  $x_1(F_1)$
- pendant une durée moyenne à chaque fois  $\delta_1(F_1) = x_1(F_1) / N_1(F_1)$

- pour la 2ème action, de même en remplaçant 1 par 2 en indice

- la simultanéité de 2 actions respectivement égales au moins à  $F_1$  et  $F_2$  se produit :

- avec une espérance mathématique  $N_1(F_1) x_2(F_2) + N_2(F_2) x_1(F_1)$
- pendant une durée moyenne à chaque fois, égale à  $\delta_1 \delta_2 / (\delta_1 + \delta_2)$  \*
- et par conséquent, en effectuant les calculs, pendant une durée totale probable  $x_1(F_1) x_2(F_2)$ .

Les formules données par M. D. VAGUELSY dans l'annexe 2, établies, comme indiqué plus haut, à partir d'hypothèses quelque peu différentes sur la distribution des durées d'application élémentaires de chaque action, conduisent, avec nos notations, aux résultats suivants :

- la loi de distribution des coïncidences reste une loi de Poisson ;
- le paramètre de cette loi de distribution est égal à

$$\Lambda_{12}^R = R N_1 N_2 \left[ \frac{x_1}{N_1 (1 + x_1 \frac{N_2}{N_1})} + \frac{x_2}{N_2 (1 + x_2 \frac{N_1}{N_2})} \right] . \text{ Or si :}$$

•  $x_1$  et  $x_2$  sont petits

•  $N_1$  et  $N_2$  sont comparables, c'est-à-dire que ni  $N_1/N_2$  ni  $N_2/N_1$  ne soient très grands, et qu'ils restent petits par rapport à  $1/x_1$  et  $1/x_2$ , on peut écrire

$$\Lambda_{12}^R \approx R \left[ N_2 x_1 (1 - x_1 \frac{N_2}{N_1}) + N_1 x_2 (1 - x_2 \frac{N_1}{N_2}) \right]$$

dont le terme principal est  $R (N_2 x_1 + N_1 x_2)$  ;

- la durée relative probable d'application totale des coïncidences est

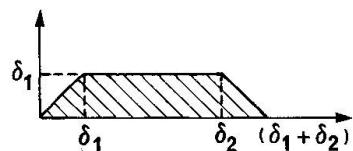
$$X = \frac{x_1 x_2}{(1 + x_1)(1 + x_2)} \quad \text{dont le terme principal est } x_1 x_2.$$

Autrement dit, les deux hypothèses mènent à des résultats qui sont en première approximation identiques lorsque les deux actions sont de faibles durées relatives d'application et de fréquences d'application comparables. Il convient d'ailleurs d'avoir présent à l'esprit qu'en l'état actuel des connaissances, des probabilités d'atteinte d'un état-limite ne peuvent être considérées comme différent d'une façon significative que si elles sont entre elles dans un rapport de l'ordre de 1 à 10, et non de 1 à 1,5 ou à 2.

#### 7,2. - Etablissement du résumé statistique de la somme de deux actions quelconques définies chacune par son résumé statistique :

Nous allons montrer que la connaissance des quatre fonctions ( $N_1, x_1, N_2, x_2$ ) permet de déterminer, toujours avec nos mêmes hypothèses, les deux fonctions

\* N.B. - Valeur moyenne de l'ordonnée de :

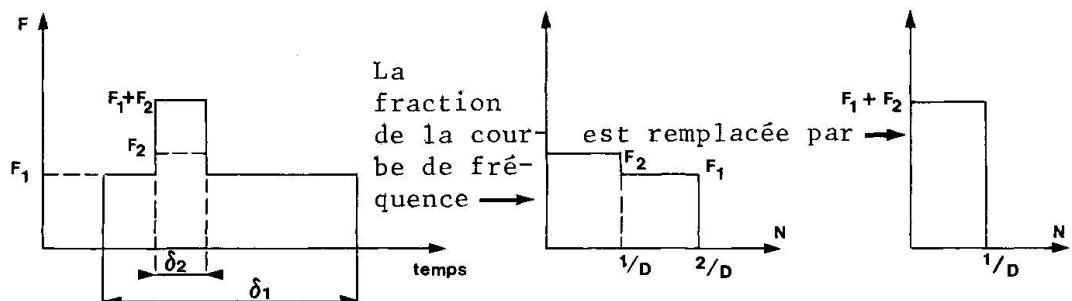


(N, X) qui constituent le résumé statistique de  $F = F_1 + F_2$  somme des deux actions  $F_1$  et  $F_2$ .

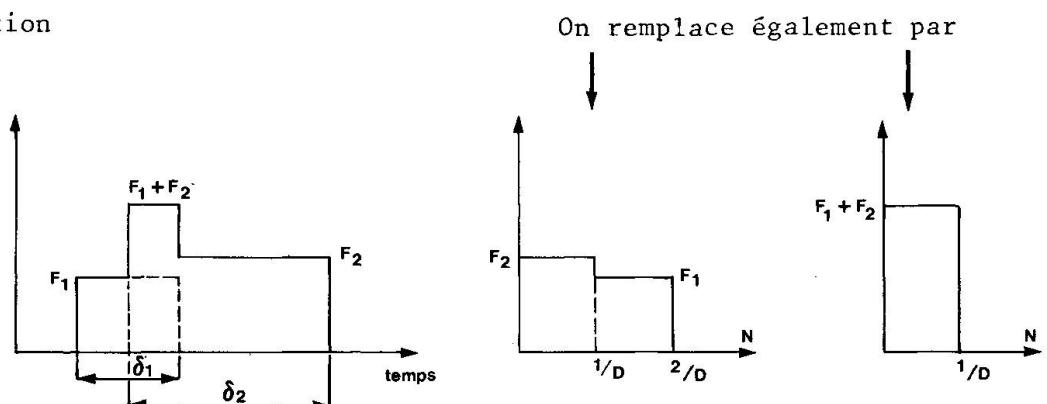
Pour éviter ici de trop longs développements, nous nous limitons aux cas où les deux actions sont d'un seul et même signe, et de nature intermittente.

Lorsqu'une simultanéité a lieu, plusieurs configurations de l'action résultante peuvent se présenter selon que la durée d'application d'une des actions inclut ou non entièrement celle de l'autre.

#### 1ère configuration



#### 2ème configuration



Au total, dans n'importe laquelle de ces configurations, la courbe de fréquence résultant de la superposition des deux actions s'obtient en corrigeant comme suit la fonction  $N_1(F) + N_2(F)$  : pour chaque simultanéité, on soustrait de  $N$   $1/D$  entre 0 et  $F_1$  et de nouveau  $1/D$  entre 0 et  $F_2$ , et on ajoute  $1/D$  entre 0 et  $(F_1 + F_2)$ . \*\*

Récapitulons maintenant les différents cas possibles. La somme des deux actions prendra une valeur  $F$  donnée :

- soit quand la première action atteint la valeur  $F$  et n'est simultanée avec aucune valeur non nulle de la 2ème action :

. l'espérance mathématique du nombre d'applications est alors

$$N_1(F) - \left[ N_1(0) x_2(0) + N_2(0) x_1(0) \right]$$

\*\* N.B. - Cette règle nécessite d'être révisée en cas de soustraction de deux actions.

. la durée totale d'application est alors  $x_1(F) - x_1(0) - x_2(0)$

- soit quand la seconde action atteint la valeur F et n'est simultanée avec aucune valeur non nulle de la 1ère action :

- . nombre probable d'applications  $N_2(F) = [N_2(F) x_1(0) + N_1(0) x_2(F)]$
- . durée totale probable d'application  $x_2(F) - x_2(0) - x_1(0)$

- soit quand il y a simultanéité,  $F_1$  étant inférieur à F et par conséquent  $F_2$  supérieur à  $F-F_1$  :

$$-\int_0^F [N_2(F-F_1) x'_1(F_1) + N'_1(F_1) x_2(F-F_1)] dF_1$$

. durée totale probable d'application  $= \int_0^F [x'_1(F_1) x_2(F-F_1)] dF_1$   
( $x'$  et  $N'$  désignant les dérivées de  $x$  et  $N$ )

- soit quand il y a simultanéité,  $F_1$  étant supérieur à F et  $F_2$  pouvant par conséquent avoir une valeur quelconque non nulle :

- . nombre probable d'applications  $N_1(F) x_2(0) + N_2(0) x_1(F)$
- . durée totale probable d'application  $x_1(F) x_2(0)$

Totalisant les nombres et durées d'application afférents à ces différents cas, qui sont bien distincts, on trouve que :

- L'espérance mathématique du nombre d'applications donnant une somme des deux actions au moins égale à F est égale à  $N = N_1(F) + N_2(F) -$

$[N_2(F) x_1(0) + N_1(0) x_2(F)] - \int_0^F [N_2(F-F_1) x'_1(F_1) + N'_1(F_1) x_2(F-F_1)] dF_1$  ;  
on démontre par une intégration par parties que N est aussi égal à l'expression symétrique

$$N = N_1(F) + N_2(F) - [N_2(0) x_1(F) + N_1(F) x_2(0)] - \int_0^F [N_1(F-F_2) x'_2(F_2) + N'_2(F_2) x_1(F-F_2)] dF_2.$$

- la durée totale probable d'application est égale, après simplification, à :

$$X = x_1(F) + x_2(F) - x_2(F) x_1(0) - \int_0^F [x'_1(F_1) x_2(F-F_1)] dF_1 \text{ qui est de même égal à l'expression symétrique}$$

$$X = x_1(F) + x_2(F) - x_1(F) x_2(0) - \int_0^F [x'_2(F_2) x_1(F-F_2)] dF_2.$$

Pour appliquer ces formules il importe de ne faire les intégrations que dans les intervalles pour lesquels les fonctions à intégrer ne sont pas nulles.

### 7,3. - Applications et développements possibles.

Il est bien évident que ce qui précède peut être aisément généralisé :

- aux cas de deux actions alternées ou de signes opposés

- à la somme des trois actions, puis d'un nombre quelconque d'actions
- enfin à toute combinaison linéaire  $\sum_1^n a_i F_i$  d'actions quelconques.

On peut ainsi, de façon générale, obtenir le résumé statistique d'une sollicitation quelconque proportionnelle aux actions et, après multiplication de ses ordonnées par des coefficients  $\gamma_{s3}$ , passer à la confrontation directe avec la loi de dispersion des résistances, et ce pour tout état-limite y compris la fatigue. Autrement dit, un calcul véritablement probabiliste devient possible, à ceci près que les éléments parasites non probabilisables doivent rester couverts par des coefficients  $\gamma_{s3}$  et qu'on ne peut donc penser obtenir que des valeurs conventionnelles de la probabilité d'atteinte de tout état-limite.

On peut, pour commencer, déterminer selon la définition des Directives Communes françaises, la valeur caractéristique de longue durée  $F_{2L} = \gamma_{s2} F_{2k}$  de la 2<sup>e</sup> action qui est à considérer comme simultanée avec la valeur caractéristique principale  $F_{1k}$ . Il suffit de partir de l'expression de la probabilité de simultanéité de  $F_1$  et  $F_2$  donnée en 7,1, en y portant  $R N_1 = 0,05$  (c'est alors, selon les R.I. actuelles, que  $F_1$  prend sa valeur caractéristique principale, dite de courte durée dans les Directives Communes françaises) ; il vient alors :

$$P = R N_2 x_1 (F_{1k}) + 0,05 x_2$$

et on choisit  $F_2$  telle que, par l'intermédiaire de  $N_2$  et  $x_2$ ,  $P$  soit égale à 0,05. Le quotient de cette valeur par  $F_{2k}$  représente le coefficient  $\gamma_{s2}$  à appliquer à  $F_{2k}$  pour l'ajouter à  $F_{1k}$ . On remarquera que le coefficient ainsi obtenu ne dépend pas des importances relatives de  $F_1$  et  $F_2$  dans la combinaison.

En fait nous verrons plus loin que l'usage direct du résumé statistique d'une action composée ( $a_1 F_1 + a_2 F_2$ ) permet de faire mieux pour la détermination des valeurs simultanées de deux actions, à introduire dans les calculs ; mais, malheureusement, l'importance relative de  $F_1$  et  $F_2$  entre alors en jeu, ce qui complique quelque peu les choses.

On remarque enfin que les études de simultanéité font intervenir les fonctions de durée  $x_1$  et  $x_2$  de façon très importante dans les probabilités ou fréquences des combinaisons ( $F_1 F_2$ ). C'est la raison fondamentale pour laquelle on ne saurait déterminer valablement, dans le cas le plus général, les coefficients  $\gamma_{s2}$  sur la seule base d'un classement vertical des actions et en négligeant l'influence de la variable temps dans la solution de ces problèmes. En fait cette observation concerne surtout les actions intermittentes et toutes autres actions non bornées.

#### 7,4. - Exemple numérique :

Nous étudions ci-après la loi de distribution de l'action simultanée de plusieurs véhicules sur un pont, la loi de distribution de l'action d'un seul véhicule étant celle que nous avons définie au § 4,2 ci-dessus.

7,41. - Cherchons la probabilité de concomitance de deux actions uniques au moins égales à  $\theta F_{\max}$  et  $\eta F_{\max}$ , avec  $\theta$  et  $\eta$  quelconques compris entre 0 et 1.

Les deux actions sont constituées respectivement :

- par  $10^3 (1 - \theta)$  durées d'application égales en moyenne à  $10^{-8}$  ;
- par  $10^3 (1 - \eta)$  durées d'application égales en moyenne à  $10^{-8}$ .

Les époques de chacune des applications individuelles étant quelconques, la probabilité pour une application individuelle  $\eta F_{\max}$  d'empiéter sur l'ensemble des durées d'application individuelles  $\theta F_{\max}$  est égale à  $2 \cdot 10^{-5} (1 - \theta)$ . Et en application de la loi de Poisson, la probabilité de non concomitance de l'ensemble des applications  $\eta F_{\max}$  avec l'ensemble des applications  $\theta F_{\max}$  vaut

$$e^{-10^3 (1 - \eta)} \cdot 2 \cdot 10^{-5} (1 - \theta) = e^{-\frac{2(1-\eta)(1-\theta)}{100}}, \text{ soit environ } 1 - \frac{2(1-\eta)(1-\theta)}{100};$$

la probabilité annuelle de concomitance s'élève donc à  $\frac{2(1-\eta)(1-\theta)}{100}$ , formule qui rejoint celle du § 7,1.

Ainsi la probabilité d'atteindre simultanément  $0,9 F_{\max}$  au moins pour les deux actions au cours d'un an vaut  $2 \cdot 10^{-4}$ .

Mais on remarque d'autre part, en traçant les courbes d'égale probabilité sur un plan d'axes de coordonnées ( $\theta, \eta$ ), que la plus grande probabilité d'atteindre une valeur quelconque de la somme  $(F_1 + F_2)$  s'obtient pour  $F_1 = F_2$  et non pas en donnant à une seule de ces actions sa valeur maximale. Il nous paraît probable qu'il en est généralement de même chaque fois qu'on a à étudier deux actions de grandeurs ou d'importances comparables.

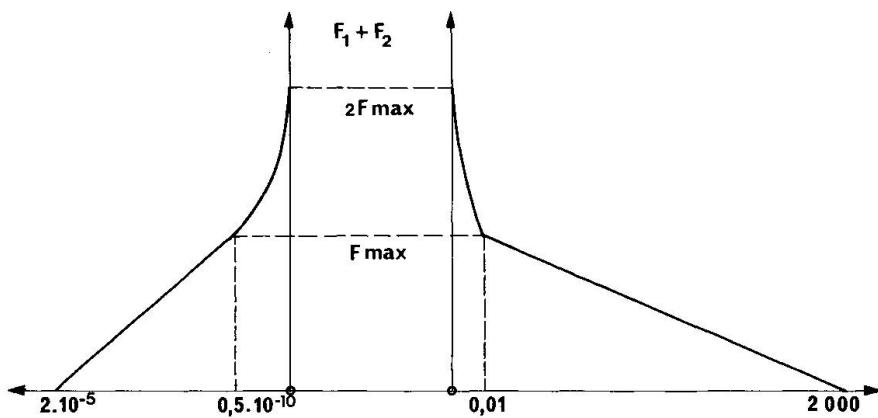
7,42. - Cherchons maintenant, de façon directe, c'est-à-dire sans utiliser les formules générales du § 7,2, la loi de distribution de  $(F_1 + F_2)$ , action simultanée ou non de 1 ou 2 véhicules sur le pont.

Etudions d'abord la distribution statistique de  $(F_1 + F_2)$  pour des valeurs de cette somme supérieures à  $F_{\max}$ . De telles valeurs ne peuvent résulter que de la simultanéité de  $F_1$  et  $F_2$ , et non pas d'applications individuelles séparées. La probabilité d'une simultanéité de deux valeurs  $F_1 > \theta F_{\max}$  et  $F_2 > \eta F_{\max}$  est, nous l'avons vu en 7,41, égale à  $\frac{2}{100} (1 - \theta) (1 - \eta)$ . Il en résulte que la probabilité de simultanéité de deux valeurs  $F_1$  et  $F_2$  telles que  $(\theta + d\theta) F_{\max} > F_1 > \theta F_{\max}$  et  $(\eta + d\eta) F_{\max} > F_2 > \eta F_{\max}$  est égale à  $\frac{2}{100} d\theta d\eta$ . Par conséquent la probabilité que  $F_1 + F_2 > \lambda F_{\max}$  (avec  $1 < \lambda < 2$ ) est

$$P(\lambda) = \int_{\lambda-1}^1 d\eta \int_{\lambda-\eta}^1 \frac{2}{100} d\theta = \frac{2}{100} \left(2 - 2\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) = 0,01 (2 - \lambda)^2, \text{ qui s'annule évidemment pour } \lambda = 2 \text{ et vaut } \frac{1}{100} \text{ pour } \lambda = 1. \text{ D'autre part, quand il y a}$$

simultanéité, la durée moyenne de l'application simultanée est égale à  $0,5 \cdot 10^{-8}$ . D'où ( $P$  s'identifiant alors pratiquement à  $N$ ) les parties supérieures des courbes de durée et de fréquence de  $F_1 + F_2$ .

Quant aux parties inférieures de ces courbes, elles s'obtiennent avec une bonne précision en doublant les abscisses des courbes représentatives de  $F_1$  et  $F_2$ . En toute rigueur il conviendrait de soustraire de ce double les applications concomitantes. On calcule facilement, dans notre exemple, que la correction sur  $N(0)$  est égale à  $\frac{4}{100}$ , donc effectivement négligeable par rapport à 2000.



Le résultat est schématisé sur la figure ci-contre.

Des courbes de fréquence et de durée de l'action composée ( $F_1 + F_2$ ) on peut déduire tout ce que l'on peut tirer de telles courbes, la valeur caractéristique principale par

exemple. Si on admet que c'est l'ordonnée correspondant à  $N = 0,001$ , on constatera qu'elle vaut  $1,68 F_{\text{max}}$ .

Or les valeurs caractéristiques de  $F_1$  et  $F_2$  valaient  $(1-10^{-6}) F_{\text{max}}$ , soit pratiquement  $F_{\text{max}}$ . On peut dire que la valeur de  $F_2$  à ajouter dans les calculs à la valeur caractéristique de  $F_1$  vaut  $0,68 F_{\text{max}}$ , et on en déduira que la durée probable d'application de cette valeur est égale à  $0,32 \cdot 10^{-5}$ . On constatera donc à cette occasion :

- que la durée probable d'application de l'action  $F_2$  à considérer comme simultanée avec  $F_{1k}$  est très faible ; ceci illustre la grande difficulté que nous avons rencontrée, lors de l'établissement des Directives Communes Françaises, pour fixer numériquement, par un raisonnement semi-probabiliste, la durée relative d'application d'une action caractéristique de longue durée : nous avions alors pensé qu'elle pourrait varier assez largement autour de  $10^{-2}$  ; nous voyons ici que dans le cas, défavorable il est vrai, des deux actions intermittentes que nous avons considérées, il faut retenir une durée d'application 3000 fois plus faible ;

- que cette durée ne peut en fait être déterminée comme résultant de la recherche d'une valeur qui soit simultanée avec la valeur caractéristique  $F_{1k}$  ; la simultanéité de deux valeurs voisines chacune de  $0,84 F_{\text{max}}$  est en fait 80000 fois plus probable (cf. remarque finale du § 7,41) ;

- que la valeur maximale de  $(F_1 + F_2)$  peut atteindre 1,2 fois sa valeur caractéristique, alors qu'aucune des deux valeurs  $F_1$  et  $F_2$  ne peut dépasser sa valeur caractéristique de façon appréciable ;

- que la loi de distribution de  $(F_1 + F_2)$  est complexe et complètement différente de la loi de distribution des deux actions composantes  $F_1 + F_2$  ;

- et que les lois de distribution de  $(F_1 + k F_2)$  avec  $k \neq 1$ , ou de la somme de deux actions  $F_1$  et  $F_2$  ayant des lois de distribution différentes, présenteraient d'autres particularités qui seraient aussi à examiner, au stade de la recherche, pour fixer des règles d'application suffisamment valables dans tous les cas.

Il est bien certain que ces particularités tiennent en partie au fait que nous avons choisi d'étudier la simultanéité de deux actions égales ayant des lois de distribution particulières et bornées. Cependant il nous semble aussi qu'une partie de ces particularités se retrouvera chaque fois que l'on voudra étudier la composition de deux actions très intermittentes, et plus encore lorsqu'on voudra étudier la composition de plus de deux actions intermittentes (on devine aisément, dès à présent, quelle serait, qualitativement, la loi de composition de 3 actions égales  $F_1 = F_2 = F_3$ ).

Nous pensons en tout cas retenir dès à présent :

- que la manière de traiter correctement une action doit être extrêmement diverse selon sa loi de distribution, et qu'il est donc utile de commencer toute étude théorique et pratique par un classement qualitatif ;

- qu'au moins dans le cas de deux actions intermittentes, la valeur caractéristique de longue durée  $F_{2L}$  à déterminer pour la seconde action est à choisir comme étant celle qui a une probabilité appréciable de coïncider, non pas avec  $F_{1k}$  (comme il est indiqué dans les Directives Communes françaises), mais avec  $0,8$  ou  $0,7 F_{1k}$  ;

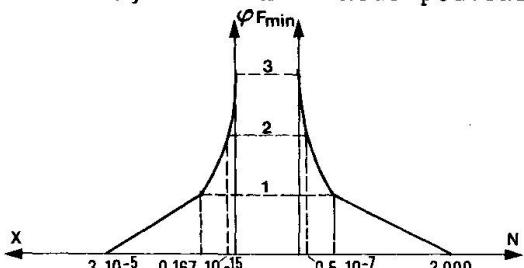
- que la modification que nous venons de préconiser doit permettre d'éliminer dans la majorité des cas la nécessité de combinaisons supplémentaires (cf. Directives Communes françaises, § 3,4) ;

- que notre exemple permet de mieux percevoir l'intérêt qu'il peut y avoir à distinguer les valeurs caractéristiques vis-à-vis des états-limites d'utilisation de celle qu'on aura adoptée vis-à-vis des états-limites ultimes ;

- que pour avoir des certitudes sur la validité de règles de sécurité, il serait utile d'établir un certain nombre d'études analogues à celles qui précèdent, mais basées sur des actions ayant des distributions très différentes ;

- que le modèle de "résumé statistique" que nous proposons permet de procéder à de telles études d'une manière certes approximative, mais simple et assez approfondie pour dégager des conclusions numériques.

7,43. - Enfin nous pouvons de même, très aisément, étudier en utilisant les formules générales du § 7,2,



la somme de trois actions de même type, en ajoutant une 3ème action à l'effet composé de deux actions. Ici nous nous intéressons seulement à la branche supérieure des deux courbes. On trouve alors : pour  $2 < \phi < 3$

$$N_3 \text{ actions} = \int_{\varphi_1}^2 \left[ \frac{(2 - \varphi + F_1)^2}{100} \cdot 10^{-5} + 10^{-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-10} \cdot (2 - \varphi + F_1)^2 \right] dF_1 = 1,5 \cdot 10^{-7}$$

$$\int_{\varphi_1}^2 (2 - \varphi + F_1)^2 dF_1 = \frac{(3 - \varphi)^3}{2 \times 10^7}$$

$$x_3 \text{ actions} = \int_{\varphi_1}^2 10^{-10} (2 - F_1) \cdot 10^{-5} (1 - \varphi + F_1) dF_1 = \frac{(3 - \varphi)^3}{6 \times 10^{15}}$$

On constate que la probabilité d'occurrence est absolument négligeable.

On remarque subsidiairement qu'en cas d'occurrence, la durée moyenne d'application à chaque fois est, pour  $2 < \varphi < 3$ , constante et vaut  $\frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$ , contre  $\frac{1}{2} \cdot 10^{-8}$  en cas de 2 actions seulement.

Bien entendu les études des § 7,42 et 7,43 supposent que la présence d'un second et d'un troisième véhicule sur le pont résulte du seul hasard et n'est aucunement influencée par la présence sur le pont d'un premier véhicule. C'est parfois vrai (cas du croisement de deux véhicules sur un pont de largeur suffisante). Mais il se peut aussi que des considérations d'encombrement obligent à procéder à certaines corrections.

Bref, l'usage du modèle ne peut pas dispenser de considérer également certains aspects de la réalité physique des phénomènes ; il apparaît cependant qu'il ouvre la voie à la détermination de lois de dégressivité des charges en fonction de la surface chargée. Des études basées sur le seul classement vertical ne permettraient évidemment pas de le faire dans le cas d'actions très intermittentes, puisqu'à moins de fractionner la durée d'étude en intervalles de quelques secondes seulement, elles traduirraient seulement l'influence de la dispersion des charges de plusieurs véhicules et ne montreraient pas que, dans notre exemple, la probabilité de présence simultanée de deux véhicules sur notre ouvrage est faible, et celle de trois négligeable.

#### 8. - CONCLUSIONS GENERALES

Nous avons pu, tout au long de cet article, énoncer de nombreuses conclusions partielles, qu'il serait trop long de répéter ici.

Nous avons montré que l'usage du modèle proposé permettrait de retrouver toutes les notions qui sont familières en matière de sécurité, et de déterminer numériquement celles qui à ce jour sont restées de simple principe ou de simple appréciation.

Cet usage donne, d'abord, une base possible pour un classement qualitatif des actions, qui paraît nécessaire pour l'établissement de règles pratiques, puisque toute théorie de la sécurité doit commencer par procéder à toute une série de simplifications successives de manière de substituer à une réalité complexe des modèles accessibles au calcul.

Mais il permet, surtout, de dégager les valeurs représentatives des actions, qui interviennent soit dans les études de simultanéité, soit dans les études des états-limites les plus divers, et en particulier d'analyser les sollicitations d'utilisation et de fatigue.

Nous n'oublierons pas, cependant, les limites des possibilités du modèle (cf. § 1,3), quoique nous ayons vu au § 7,1 que les tolérances admissibles par

rapport à ces possibilités théoriques étaient assez larges, ni que l'usage du modèle nécessite, de toute manière, de ne jamais perdre de vue la réalité physique des phénomènes étudiés (cf. § 7,43).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Recommandations Internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton ; CEB-FIP ; PRAGUE, Juin 1970;
- [2] Directives Communes relatives au calcul des constructions ; Ministère français de l'Equipement et du Logement ; PARIS, 13 Décembre 1971;
- [3] Structural Safety (Cours de sécurité des constructions), par J. FERRY BORGES et M. CASTANHETA; LISBONNE, Mars 1971.

#### ANNEXES

- 1 - Exemple de classement qualitatif des actions (par H. MATHIEU)
  - 2 - Etude d'un cas de simultanéité de deux actions (par D. VAGUELSY).
- ◦

#### *A N N E X E N° 1*

##### *Exemple de classement qualitatif des actions.*

*par M. H. MATHIEU*

*Nous allons passer en revue les 26 combinaisons qui peuvent se présenter parmi les 30 combinaisons théoriquement possibles (cf. § 5,2). La représentation graphique qui suit donne une illustration de chaque combinaison, la forme des courbes pouvant évidemment varier assez largement dans chaque cas d'espèce.*

*15 : Action d'un même signe, bornée, peu variable, donc constamment appliquée, mais subissant des changements fréquents (mais limités) ; ce serait, au sens des Directives Communes françaises, la superposition d'une action permanente importante et d'une petite action cyclique ou intermittente ; on peut donner comme exemple la réaction d'appui, sur ses fondations, d'une passerelle de piétons, ou la poussée des terres due à un massif sur lequel circulent des charges d'exploitation.*

*16 : Comme ci-dessus, sinon que les changements sont peu fréquents ; c'est le type même d'une action permanente au sens des Directives Communes.*

21 : Action d'un même signe, bornée, (largement variable), presque toujours nulle, et variant souvent ; c'est le type même d'une action intermittente telle que le passage de véhicules de poids contrôlé (wagons de chemin de fer).

22 : Action d'un même signe, bornée, (largement variable), se produisant rarement ; c'est une action accidentelle telle qu'un choc sur barrière de sécurité.

23 : Action d'un même signe, bornée (largement variable), appliquée une grande partie du temps, et nulle de même, variant souvent ; c'est une action intermittente telle que la charge d'un lieu de dépôt actif, mais contrôlé.

24 : Action d'un même signe, bornée (largement variable), appliquée une grande partie du temps, et nulle de même, et variant rarement ; c'est une action intermittente telle que la charge d'un lieu de dépôt peu actif, mais contrôlé.

25 : Action d'un même signe, bornée, (largement variable), constamment ou presque constamment appliquée, et variant souvent : c'est une action cyclique telle que la charge d'un lieu de stockage contrôlé et actif qu'on veille à rétablir après chaque prélèvement.

26 : Action d'un même signe, bornée, (largement variable), constamment ou presque constamment appliquée, et variant rarement, c'est une action cyclique telle que la charge d'un stock de sécurité bien contrôlé.

31 : Action d'un même signe, non bornée, presque toujours nulle et variant souvent ; c'est le type même d'une action intermittente telle que le passage de véhicules de poids ou de nombre non contrôlés (camions sur un grand pont route).

32 : Action d'un même signe, non bornée, presque toujours nulle et variant rarement ; c'est le type même d'une action accidentelle telle qu'en 22, mais de grandeur plus aléatoire (exemple choc d'un navire à l'accostage).

33 : Action d'un même signe, non bornée, appliquée une grande partie du temps, et nulle de même, et variant souvent : cf. 23, lieu de dépôt actif, mais incontrôlé.

34 : Action d'un même signe, non bornée, appliquée en grande partie du temps, et nulle de même, et variant rarement : cf. 24, lieu de dépôt peu actif, et incontrôlé.

35 : Action d'un même signe, non bornée, constamment ou presque constamment appliquée, et variant souvent : cf. 25, lieu de stockage dont on surveille les diminutions, mais sans prendre le soin de contrôler le poids total ; ou réaction d'appui totale d'un pont route sur ses fondations.

36 : Action d'un même signe, non bornée, constamment ou presque constamment appliquée, et variant rarement : cf. 26, charge d'un stock de sécurité mal contrôlé, poussée des terres en zone d'affaissement minier.

41 : Action alternée, bornée, presque toujours nulle et variant souvent ; c'est le type même d'une action intermittente telle que la réaction d'appui due au seul passage d'un véhicule d'entretien, à l'extrémité d'un pont à travées continues, portant une voie non exploitée.

42 : Action alternée, bornée, presque toujours nulle et variant rarement : cf. 22, choc sur barrière de sécurité à double effet ;

43 : Action alternée, bornée, appliquée une grande partie du temps, et nulle de même, variant souvent ; c'est une action intermittente telle que la pression d'un liquide d'un réservoir double sur la cloison de séparation, le réservoir constituant un dépôt actif et contrôlé.

44 : Cf. 43, le dépôt étant ici peu actif.

45 : Cloison cf. 43, mais d'un stockage géré comme en 25.

46 : Cloison cf. 43, mais d'un stockage géré comme en 26.

51 : Cf. 31 mais alternée, par exemple réaction d'appui due aux seules charges d'exploitation, à une extrémité d'un grand pont route à travées continues, ou action du vent dans des régions habituellement tranquilles. \*

52 : Cf. 32, mais alternée ; par exemple action d'un séisme.

53 : Cf. 33, mais alternée ; par exemple cloison de séparation d'un lieu de dépôt géré comme en 33, ou action du vent dans une région moyennement exposée.\*

54 : Cf. 34, mais alternée ; par exemple cloison de séparation d'un lieu de dépôt géré comme en 34, ou radier de fondations soumis à des charges d'exploitation rares et incontrôlées et à des sous-pressions rares et très aléatoires.

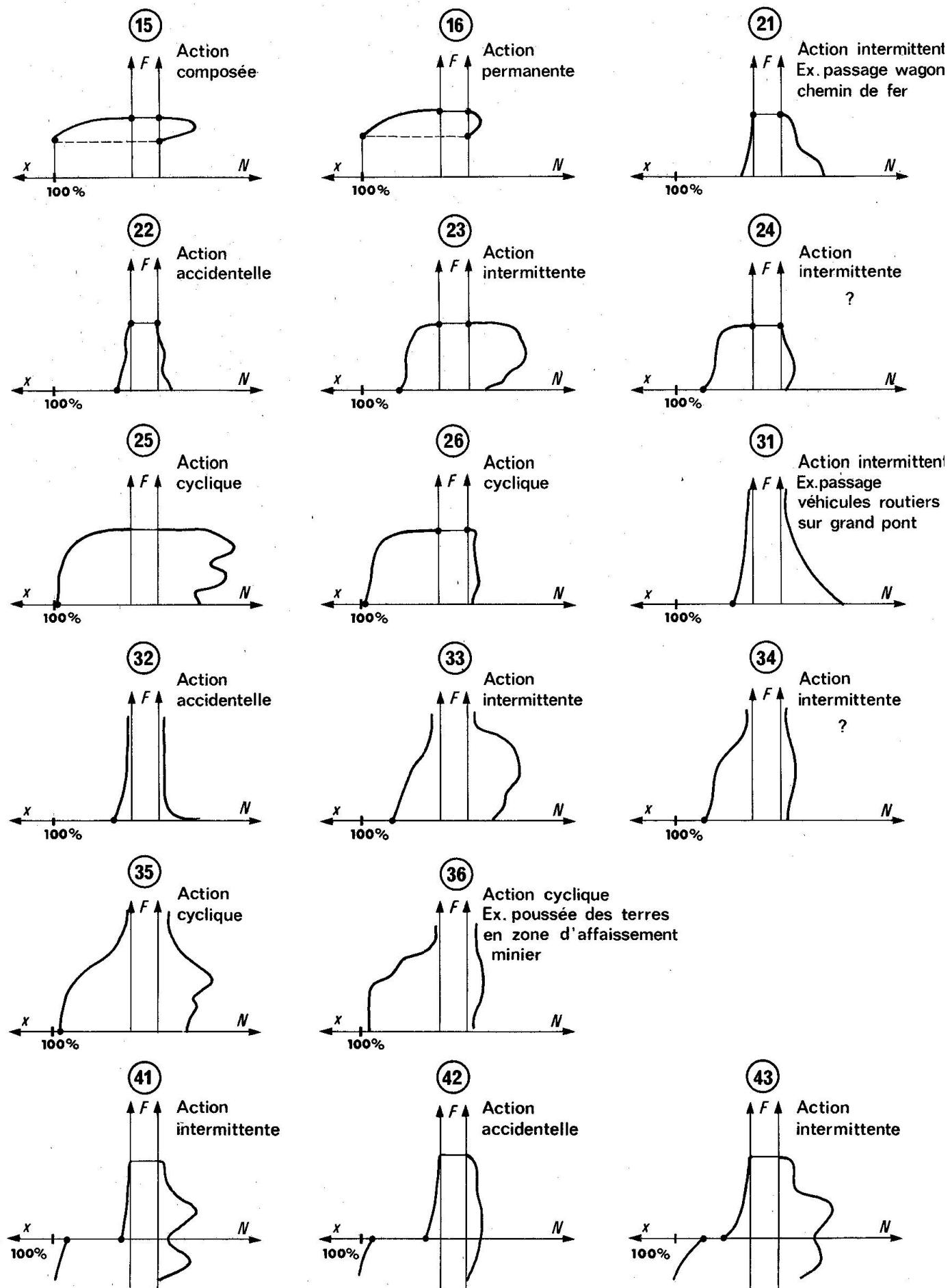
55 : Cf. 35, mais alternée ; par exemple cloison de séparation d'un stock géré comme en 35 ; ou réaction d'appui totale, à une de ses extrémités, d'un pont route à travées continues très inégales (comme avec de nombreuses actions composées, la valeur 0 de l'action ne joue plus de rôle particulier) ; ou encore action du vent en un site exceptionnellement exposé (le vent y souffle quasi-constamment dans une même direction). \*

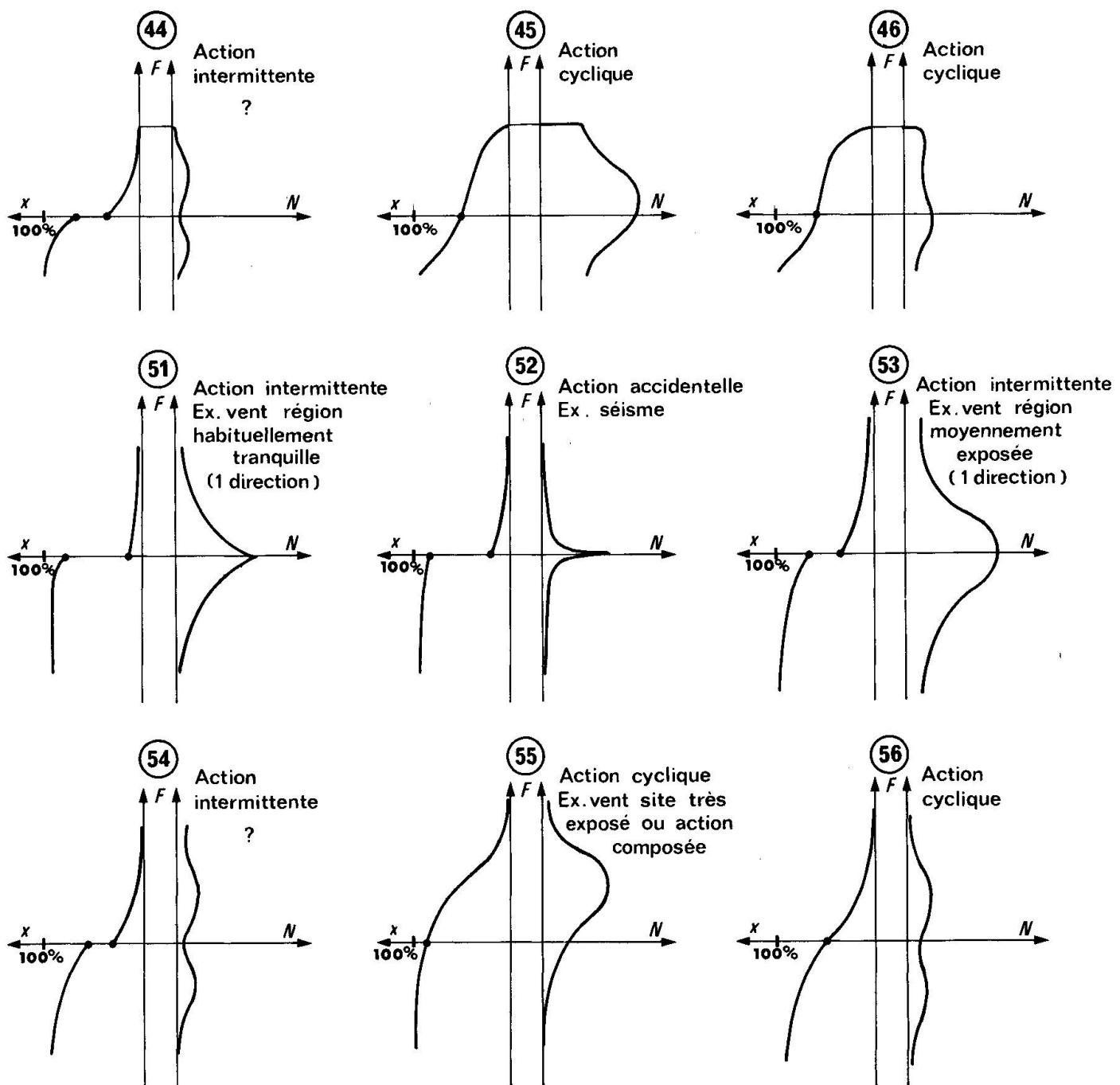
56 : Cf. 36, mais alternée ; par exemple cloison de séparation d'un stock géré comme en 36.

Nous espérons que cet exemple de classement aidera à faire reconnaître la diversité des cas qui peuvent se présenter en pratique et par suite la nécessité de diversifier suffisamment dans les vérifications de sécurité les règles ou, tout au moins, certains coefficients applicables aux différentes actions.

\* N.B. L'action du vent est à considérer comme alternée quand on étudie par exemple ses effets sur un mur (c'est-à-dire dans les deux sens d'une seule direction).

Il résulte d'autre part de l'exemple donné en 4,1 que les pressions, proportionnelles au carré de la vitesse, sont en la plupart des lieux pour  $x > 0,1$  et même  $0,01$ , inférieures au dizième de la pression caractéristique. Cependant le modèle conduit à considérer aussi l'existence d'un important vent presque permanent en certains sites très exposés.





## ANNEXE N° 2

*Etude d'un cas de simultanéité de deux actions*

*par M. D. VAGUELSY - Ingénieur E.S.E.*

*Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*

Dans son article [1], M. MATHIEU propose un langage simplifié pour décrire, du point de vue de la sécurité, les actions en évolution au cours du temps. Dans ce cadre, nous ajoutons des hypothèses probabilistes pour pouvoir évaluer, à partir de la connaissance ainsi acquise concernant deux actions, la loi de probabilité de la simultanéité de deux valeurs élevées. Le modèle proposé est, en un certain sens, le plus simple possible, et a été construit heuristiquement.

### 1. - LE MODÈLE.

Considérons une action qui varie au cours du temps, mais qui présente une certaine permanence en moyenne. Son histoire, c'est-à-dire la représentation de son évolution dans le temps, est représentée par une fonction. Dans le langage probabiliste, cette fonction est une trajectoire d'un processus aléatoire stationnaire  $\{Y_t, t \geq 0\}$ , correspondant à un tirage particulier.

Dans le cadre du modèle proposé dans [1], nous ne nous intéressons, dans ce qui va suivre, qu'aux instants où l'action dépasse une valeur assez élevée donnée à l'avance, - que nous appellerons seuil critique - ainsi qu'aux durées de dépassement.

Ainsi, nous pouvons associer au processus stationnaire  $\{Y_t, t \geq 0\}$  un processus stationnaire  $\{Z_t, t \geq 0\}$  qui ne prend que les valeurs 1 ou 0 selon que le seuil critique est, ou non, dépassé.

Il est clair que la loi de probabilité du processus  $\{Z_t, t \geq 0\}$  est fonction des caractéristiques probabilistes du processus  $\{Y_t, t \geq 0\}$  choisi pour représenter l'action étudiée. Malheureusement, ce développement est assez difficile, car il requiert un lourd appareil théorique. Nous procéderons donc autrement, par analogie avec les modèles construits pour l'étude des files d'attente dans les centraux téléphoniques. Nous assimilerons une occurrence d'un dépassement avec un appel téléphonique, et la durée d'un dépassement avec la durée de la conversation correspondante.

Nous appellerons  $N(t)$  la variable aléatoire "nombre de dépassements dans l'intervalle  $[0, t[$ ". Compte tenu de la stationnarité, cette variable aléatoire représente aussi le nombre de dépassements dans tout intervalle de longueur  $t$ .

Nous appellerons  $X$  la variable aléatoire "durée du dépassement". Ceci posé, nous ferons les hypothèses suivantes :

H1 -  $N(t)$  a, comme loi de probabilité, une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ , où  $\lambda$  est une constante positive caractéristique de l'action étudiée. Cela signifie que

$$P \{ N(t) = k \} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

On peut en déduire que  $E \{ N(t) \} = \lambda t$ .

Ainsi,  $\lambda$  est le nombre moyen de dépassements par unité de temps. Son inverse s'appelle la période de retour de l'action considérée. Pour une période de référence  $R$ ,  $\lambda$  sera estimé par  $\hat{\lambda} = \frac{\text{nombre de dépassements}}{R}$ .

Cette hypothèse correspond à ce que KHINTCHINE [2] appelle un flot simple. Elle repose essentiellement sur l'hypothèse que, pour tout couple d'intervalles disjoints, de longueur  $t_1$  et  $t_2$ , les variables aléatoires  $N(t_1)$  et  $N(t_2)$  sont indépendantes en probabilité. Au prix de calculs notablement plus compliqués on pourrait s'en affranchir et utiliser le modèle du flot à effets ultérieurs bornés (cf. [2]) qui correspondra mieux à des actions fortement autocorrelées.

H2 - La loi de probabilité de la variable  $X$ , durée du dépassement, est donnée par  $P \{ X \geq t \} = e^{-\beta t}$  où  $\beta$  est une constante positive. On en déduit que  $E \{ X \} = \frac{1}{\beta}$ , c'est-à-dire que  $\frac{1}{\beta}$  est la longueur moyenne des durées. Elle sera estimée par  $(\frac{1}{\beta}) = \text{moyenne arithmétique des durées de dépassement}$ .

Cette hypothèse est techniquement très commode. On a montré de plus, dans des problèmes analogues, qu'elle conduit à des résultats valables pour des types de lois arbitraires, à condition de remplacer  $\frac{1}{\beta}$  par l'espérance mathématique des durées de dépassement.

H3 -  $\beta \gg \lambda$ , et les variables aléatoires  $N(t)$  et  $X$  sont indépendantes en probabilité.

Cette dernière hypothèse implique que la durée moyenne de dépassement est très petite devant la période de retour. Elle permet l'analogie que nous proposons d'utiliser, et qui se complète par l'hypothèse d'indépendance entre les occurrences et les durées.

En résumé, quoique rudimentaire, ce modèle peut s'appliquer en première approximation aux actions stationnaires quand on considère le dépassement d'une valeur suffisamment élevée. Il propose, et ceci est détaillé dans [1], un langage descriptif commode, en matière de sécurité, pour les actions qui varient au cours du temps.

## 2. - ETUDE DE LA SIMULTANÉITE DE DEUX ACTIONS.

Soient  $A$  et  $B$  deux actions, auxquelles dans le cadre du modèle précédent sont associés les paramètres  $(\lambda_A, \beta_A)$ ,  $(\lambda_B, \beta_B)$ .

On peut considérer qu'à chaque instant on se trouve dans l'un des quatre états suivants :

- $E_O$  non dépassement de A, non dépassement de B  
 $E_A$  dépassement de A, non dépassement de B  
 $E_B$  non dépassement de A, dépassement de B  
 $E_{AB}$  dépassement de A, dépassement de B.

Compte tenu des hypothèses faites, nous nous trouvons en présence d'un processus de Markov transitif, à nombre fini d'états. On sait que l'on calcule non les probabilités  $P_i(t)$  qui dépendent de l'état initial, mais celles correspondant au régime stationnaire, quand il s'est établi, c'est-à-dire les nombres  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t) = P_{ii}$ .

Le principe du calcul (voir [2]) consiste à établir la matrice des probabilités de passage entre deux instants très voisins, pour chaque couple d'états.

Dans le cas qui nous concerne, cette matrice est donnée par :

		(état à l'instant $t + dt$ )			
		$E_O$	$E_A$	$E_B$	$E_{AB}$
Etat à l'instant $t$	$E_O$	$1 - (\lambda_A + \lambda_B)$	$\lambda_A$	$\lambda_B$	0
	$E_A$	$\beta_A$	$1 - (\beta_A + \beta_B)$	0	$\lambda_B$
	$E_B$	$\beta_B$	0	$1 - (\beta_B + \lambda_A)$	$\lambda_A$
	$E_{AB}$	0	$\beta_B$	$\beta_A$	$1 - (\beta_A + \beta_B)$

Tous calculs faits, on obtient les résultats suivants :

$$P_O = \frac{\beta_A \beta_B}{(\lambda_A + \beta_A)(\lambda_B + \beta_B)}$$

$$P_A = \frac{\lambda_A \beta_B}{(\lambda_A + \beta_A)(\lambda_B + \beta_B)} \approx \frac{\lambda_A}{\beta_A}$$

$$P_B = \frac{\lambda_B \beta_A}{(\lambda_A + \beta_A)(\lambda_B + \beta_B)} \approx \frac{\lambda_B}{\beta_B}$$

$$P_{AB} = \frac{\lambda_A \lambda_B}{(\lambda_A + \beta_A)(\lambda_B + \beta_B)} \approx \frac{\lambda_A}{\beta_A} \cdot \frac{\lambda_B}{\beta_B}$$

L'interprétation de ce résultat est la suivante : les probabilités calculées représentent la proportion de temps où le système se trouve dans l'un des états indiqués.

### 3. - NOMBRE DE SIMULTANEITES.

Nous allons aborder maintenant le problème de la simultanéité sous un autre aspect. Du point de vue de la sécurité, il apparaît tout aussi important

de pouvoir évoluer, à partir de la connaissance que l'on a des actions A et B par l'intermédiaire de leurs paramètres respectifs  $(\lambda_A, \beta_A)$  et  $(\lambda_B, \beta_B)$  le nombre moyen de simultanéités par unité de temps.

Par abus de langage, et pour simplifier l'écriture, nous noterons encore A (ou B) l'évènement "l'action A (ou B) est en dépassement". Pendant la durée de A, B peut se produire zéro, une ou plusieurs fois. Pour éviter des calculs compliqués, nous ferons l'hypothèse que la probabilité que B (ou A) se produise plus d'une fois pendant la durée de A (ou B) est nulle. Ceci revient à supposer que le temps moyen de durée de A (ou B) est très faible devant la période de retour de B (ou A), c'est-à-dire :

$$H4 - \beta_A \gg \lambda_B \text{ et } \beta_B \gg \lambda_A.$$

Si nous notons  $N_{AB}(t)$  la variable aléatoire "nombre de simultanéités se produisant dans l'intervalle de longueur t", nous pouvons écrire  $N_{AB}(t) = N_{A/B}(t) + N_{B/A}(t)$  en décomposant le nombre total de simultanéités selon que leur instant initial coïncide avec un dépassement de A (i.e. B/A) ou de B (i.e. A/B).

Le calcul de la loi de probabilités de ces variables aléatoires est classique dans la théorie des processus de Poisson. Nous n'en donnerons pas le détail ici, mais simplement les résultats. Compte tenu des hypothèses, on obtient :

$$P \{ N_{A/B}(t) = k \} = e^{-\lambda_{A/B} t} \frac{(\lambda_{A/B} t)^k}{k!}$$

et

$$P \{ N_{AB}(t) = k \} = e^{-\lambda_{AB} t} \frac{(\lambda_{AB} t)^k}{k!}$$

avec

$$\lambda_{A/B} = \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_B + \beta_A} \quad \text{et}$$

$$\lambda_{AB} = \lambda_{A/B} + \lambda_{B/A} = \lambda_A \lambda_B \left( \frac{1}{\lambda_B + \beta_A} + \frac{1}{\lambda_A + \beta_B} \right) \approx \frac{\lambda_A}{\beta_A} \cdot \frac{\lambda_B}{\beta_B} (\beta_A + \beta_B).$$

Le nombre qui précède représente le nombre moyen de simultanéités par unité de temps puisque, comme on l'a vu,  $E \{ N_{AB}(t) \} = \lambda_{AB} t$ .

En prolongeant l'interprétation de  $P_{AB}$  donnée précédemment, on peut écrire  $P_{AB} \approx \frac{\lambda_{AB}}{\beta_{AB}}$ , ce qui implique  $\beta_{AB} \approx \beta_A + \beta_B$ . L'inverse de  $(\beta_A + \beta_B)$  peut donc être utilisé comme une approximation de la durée moyenne de chaque dépassement.

#### 4. - CONCLUSION.

Les formules précédentes ont été obtenues dans le cadre d'un modèle assez restreint. Les conditions

$$\lambda_A \ll \beta_A$$

$$\lambda_A \ll \beta_B$$

$$\lambda_B \ll \beta_A$$

$$\lambda_B \ll \beta_B$$

sur lesquelles reposent nos calculs indiquent qu'elles s'appliquent à des actions

de même nature probabiliste, et pour un seuil critique respectif assez élevé. D'autre part le choix de distributions exponentielles ne peut être considéré, dans la plupart des cas, que comme une première approximation. Quoi qu'il en soit, on peut considérer la démarche proposée comme un exemple du rôle que peut jouer le calcul des probabilités dans les problèmes de sécurité. Il donne un sens précis aux concepts utilisés, et il permet, dans le cadre de modèles convenablement adaptés, de déduire, de mesures initiales, des estimations de grandeurs non observables directement.

### Bibliographie.

- [1] Article ci-dessus de M. MATHIEU.
- [2] KHINTCHINE (1969)  
Desserte d'un grand nombre d'usagers (Dunod).

### RESUME

L'étude des nombreux problèmes de sécurité des constructions nécessite de tenir compte des distributions des valeurs des actions dans le temps et en dehors du domaine des valeurs extrêmes. Pour ce faire, il est proposée une représentation statistique des actions par deux courbes (fréquence et durée d'application), établies par "classement horizontal". Ce modèle associé à la loi de Poisson, permet de connaître les différentes valeurs représentatives utiles et d'étudier la simultanéité des actions.

### ZUSAMMENFASSUNG

Die Untersuchung zahlreicher Probleme der Sicherheit von Tragwerken erfordert die Berücksichtigung der Einflüsse in Funktion der Zeit und ausserhalb der Extremwerte. Zu diesem Zweck wird eine statistische Darstellung der Einflüsse mittels zweier durch "waagrechtes Einordnen" aufgestellter Kurven (Häufigkeit und Einwirkungsdauer) vorgeschlagen. Dieses Modell ermöglicht, zusammen mit dem Poisson'schen Gesetz, die verschiedenen repräsentativen Werte zu erfassen und die Gleichzeitigkeit der Wirkungen zu untersuchen.

### SUMMARY

The study of many problems for the safety of structures necessitates to take into account the distributions of the action-values in the time and out of the extreme values. In this order we propose a statistic representation of the actions by two curves (frequency and duration) established by means of a "horizontal classification". This model, connected with Poisson's law enables to understand the different useful representatives values and to study the simultaneousness of the actions.