

**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

**Band:** 16 (1974)

**Artikel:** Ein baustatisches Verfahren zur Bestimmung der Traglasten ebener Druckbogen

**Autor:** Bomhard, Helmut

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15746>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Ein baustatisches Verfahren zur Bestimmung der Traglasten ebener Druckbogen

A Practical Method for Determining the Load Capacity of Plane Arches under Compression

Un procédé pratique pour le calcul de la charge ultime des arcs plans comprimés

Helmut BOMHARD

Direktor der Dyckerhoff & Widmann AG  
München, BRD

### 1. Einleitung

Das Traglastproblem des Druckbogens ist ein Durchschlagproblem mit oder ohne Gleichgewichtsverzweigung. Der für die Traglast ungünstige Durchschlagvorgang ist nur mit einer geometrisch nicht-linearen Theorie faßbar. Doch genügt für die numerische Traglastrechnung im Schlankheitsbereich, den die technischen Baubestimmungen erlauben (z.B. [1] [2] ), die geometrisch linearisierte Theorie. Mit dieser bestimmte Traglasten sind dann nur mehr wenige Prozent größer als die Durchschlaglasten, wie Vergleichsrechnungen an 2-Gelenkbogen beweisen [3]. Bei Pfeilverhältnissen  $f/l \geq 0,1$  kann außerdem die Achsdehnung  $\varepsilon_0$  unberücksichtigt bleiben.

Auf der Grundlage der geometrisch linearen Theorie wird ein leistungsfähiges und anschauliches Rechenverfahren großer Genauigkeit entwickelt, mit dem die Traglasten ebener Bogen ohne und mit Gleichgewichtsverzweigung schnell von Hand gerechnet werden können, und das mit den üblichen baustatischen Mitteln auskommt. Mit dem Verfahren ist das geometrisch linearisierte Traglastproblem sowohl näherungsweise als auch genau lösbar. Erfassbar sind bei beliebiger Bogenform und frei wählbaren  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Beziehungen für Beton und Stahl nicht nur vertikale und horizontale Lasten, sondern auch Geometrieimperfectionen, Vor- und Eigendehnungszustände, eingeprägte Verschiebungen sowie Kriechverformungen.

In [4] ist das Verfahren dazu benutzt, den Einfluß unterschiedlicher Querschnittsformen (Rechteck und 2-Punktquerschnitt) und unterschiedlicher  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramme von Beton (Normalbeton und Leichtbeton) zu studieren.

### 2. Voraussetzungen

- a. Der Bogen ist eben und nur in seiner Ebene belastet. Ausweicherscheinungen senkrecht zur Bogenebene werden ausgeschlossen.
- b. Die Bogenquerschnitte sind unverformbar. Die Schwerpunkte ihrer Betonflächen bilden die Bogenachse. Eine Hauptachse der Querschnitte liegt in der Bogenebene, im übrigen sind sie beliebig geformt.
- c. Für die Querschnitte gilt die Bernoulli-Hypothese.
- d. Die Anfangskrümmung ist so schwach, daß die Schnittgrößen-Verzerrungsbeziehungen des geraden Stabes gelten.
- e. Die Lasten bleiben bei Verformung richtungstreu und ändern ihre Größe nicht.

### 3. Gleichgewicht

In den Gleichungen kennzeichnet der Zirkumflex die Werte des verformten Bogens.

#### Belastung (Bild 1)

$$\tilde{q}_z d\tilde{s} = \tilde{q}_z (1 + \varepsilon_0) ds = q_z ds = \bar{q}_z dx \quad (1a)$$

$$\tilde{q}_x d\tilde{s} = q_x (1 + \varepsilon_0) ds = q_x ds = \bar{q}_x dz \quad (1b)$$

Bei  $\varepsilon_0 = 0$  ist jede Belastung mit einem einheitlichen Lastparameter beschreibbar, weil  $\tilde{q}_z = q_z$  und  $\tilde{q}_x = q_x$ .

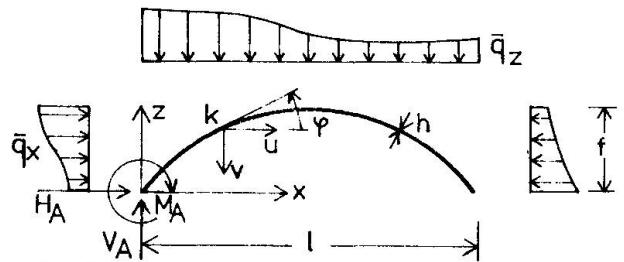


BILD 1  
GEOMETRIE UND BELASTUNG

#### Moment und Normalkraft im Querschnitt k (Bild 1)

$$\tilde{M}_{ek} = M_k + V_k u_k + H_k v_k + \Delta M_A + \Delta V_A x_k - \Delta H_A z_k + \int_0^{x_k} \bar{q}_z u dx - \int_0^{z_k} \bar{q}_x v dz \quad (2a)$$

$$\tilde{N}_{ek} = N_k (1 - \varepsilon_{ok}) + (V_k v'_k - H_k u'_k) \cos \varphi_k - \Delta V_A \sin \varphi_k - \Delta H_A \cos \varphi_k \quad (2b)$$

Auf den rechten Gleichungsseiten ist der Zeiger e für "äußere Schnittgröße" der Übersichtlichkeit wegen weggelassen.

Es bedeuten:  $V_k = V_A - \int_0^{x_k} \bar{q}_z dx$ ,  $H_k = H_A + \int_0^{z_k} \bar{q}_x dz$ , und  $(3)$

$$\Delta M_A = \tilde{M}_A - M_A, \Delta V_A = \tilde{V}_A - V_A, \Delta H_A = \tilde{H}_A - H_A. \quad (4)$$

In (2) sind, im Sinne einer geometrisch linearen Theorie kleiner Verschiebungen, alle Glieder vernachlässigt, die Produkte von Verschiebungsgrößen enthalten (Abschnitt 10).

Die bezogenen Schnittgrößen m und n sind dimensionslos und parametrisiert:

$$m = \frac{M}{A_c h f'_c}, \quad n = \frac{N}{A_c f'_c} \quad (5)$$

Der Einfachheit halber sind Ortszeiger k und Zirkumflex weggelassen.

### 4. Geometrie

Alle Geometriebeziehungen werden linearisiert. Damit gelten die üblichen baustatischen Methoden wie Arbeitsgleichung, Mohrsche Analogien usw.

### 5. Werkstoffgesetz

Beanspruchbarkeit (m,n) (Bild 2) und Verzerrungen (Stabkrümmung  $K_h$  und Achsdehnung  $\varepsilon_0$ ) (Bild 3) eines Querschnitts gegebener Form und Bewehrung ( $\omega = p \sigma_y / f'_c$ ,  $\omega' = p' \sigma_y' / f'_c$ ) werden festgelegt durch

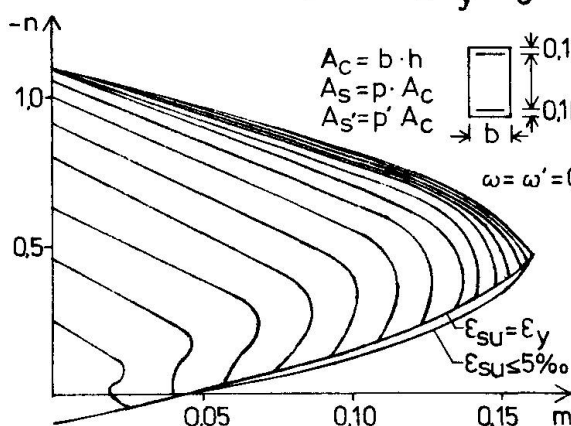


BILD 2 n-m-DIAGRAMM MIT LEITDEHNUNGSZUSTÄNDEN  $\varepsilon_{c1} = \text{KONST. GERASTERT.}$  RASTERABSTAND  $\Delta \varepsilon_{c1} = 0,25\%$

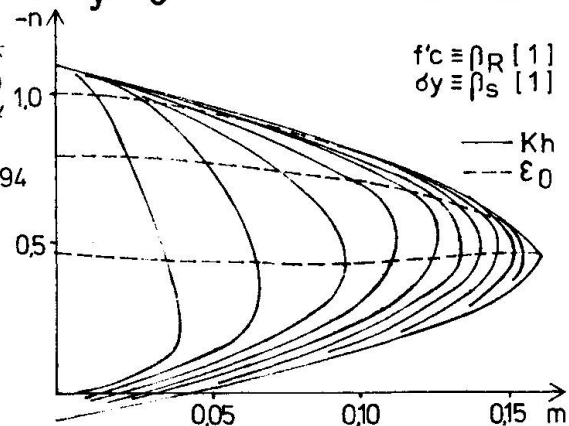


BILD 3 n-m-DIAGRAMM MIT LINIEN GLEICHER KRÜMMUNG  $K_h$  (0,5/1,0...5,0) U. ACHSDEHNUNG  $\varepsilon_0$  (-0,5,-1,0...-2,0)

die Spannungsdehnungslinien von Beton und Stahl sowie durch Dehnungsdiagramme, die angeben, wie weit die  $\sigma$ - $\epsilon$ -Linien ausgenutzt werden dürfen. Jedem Wertepaar  $m, n$  ist ein Wert  $K_h = K_h(m, n)$  und  $\epsilon_o = \epsilon_o(m, n)$  eindeutig zugeordnet (s. Bild 3).

Für das Rechenverfahren wird das Interaktionsdiagramm (Bild 2) durch Interaktionslinien gerastert, die durch Variation der Größe der Leitdehnung  $\epsilon_{c1}$  des gedrückten Querschnittsrandes erhalten werden. Die Linien bilden nichts anderes als Interaktionsdiagramme mit fiktiven Grenzdehnungen  $\epsilon_{cu \text{ fikt}} = \epsilon_{c1} = \text{konst.}$  Durch dieses Rastern, das mit einem Rechner keine Mühe bereitet, gelingt es, auch die Gleichgewichtszustände zu erfassen, bei denen der Bogen instabil wird, ohne Grenzdehnungen zu erreichen (Linien mit  $dn/dm = 0$  in Bild 8). Meist genügt ein grober Raster.

Das Werkstoffverhalten wird für Kurzzeitlast elastisch vorausgesetzt. Die Traglast wird damit unabhängig von der Belastungsgeschichte.

## 6. Traglastberechnung mit einem angenommenen Krümmungsverlauf

Das Rechenverfahren ist innerhalb seiner Voraussetzungen auf beliebige Bogenformen und Belastungen anwendbar (Abschnitt 7). Es wird hier am Beispiel symmetrischer Bogen dargestellt, deren Achse bei  $\epsilon_o = 0$  Stützlinie einer symmetrischen Gleichlast  $\bar{q}_{zs}$  ist, und die entweder einer antisymmetrischen Gleichlast  $\bar{q}_{za} = \beta \bar{q}_{zs}$  oder einer symmetrischen Scheitellast  $Q = \beta \bar{q}_{zs} l$  als Störlasten ausgesetzt sind (Bilder 4, 5, 6). Die Grundgedanken des Verfahrens kommen bei diesem einfachen Bogenmodell besonders klar zum Ausdruck, da es ohne großen formalen Aufwand behandelt werden kann. Der Rechengang ist bei Bedarf ohne weiteres auf allgemeinere Fälle übertragbar, wozu nicht mehr als die üblichen baustatischen Mittel benötigt werden (s. [3]). Wenn beispielsweise auch horizontale Störlasten  $\bar{q}_x$  auftreten, müssen sie in die Rechnung einbezogen werden, da sie die Traglast verkleinern.

### 6.1 Iterationsgleichung für den 3-Gelenkbogen

Die kritische Ausweichform des flachen Bogens (etwa  $f/l < 0,3$ ) ist symmetrisch (Bild 4). Dementsprechend sind symmetrische Störmomente  $M_k$  zu betrachten, wie sie von der Scheitellast  $Q$  erzeugt werden.

Aus einer symmetrischen Biegelinie ( $u_k, v_k$ ) folgen symmetrische Verformungsmomente  $\Delta M_k$ . Glchg. (2a) läßt sich vereinfachen zu:

$$\tilde{M}_{ek} \approx M_{k, \bar{q}_{zs} Q} + V_{k, \bar{q}_{zs} Q} \cdot u_k + H_{k, \bar{q}_{zs} Q} \cdot v_k - \Delta H_{A, \bar{q}_{zs} Q} \cdot z_k \quad (6a)$$

Die Momente werden damit etwas zu groß, weil die vernachlässigten Glieder Anteile liefern, die abzuziehen wären.  $\Delta V_A = 0$  aus Symmetriegründen. Bei der Normalkraft verschwinden an der Stelle des Größtmoments in sehr guter Näherung die Differentialquotienten  $u'_k$  und  $v'_k$ . (2b) läßt sich demnach vereinfachen zu

$$\tilde{N}_{ek} \approx N_{k, \bar{q}_{zs} Q} - \Delta H_{A, \bar{q}_{zs} Q} \cdot \cos \varphi_k \quad (6b)$$

Aus  $\tilde{M}_{eG} = 0$  für das Scheitelgelenk  $k = G$  folgt

$$\Delta H_{A, \bar{q}_{zs} Q} = \frac{H_{G, \bar{q}_{zs} Q} \cdot v_G}{f} \quad (7)$$

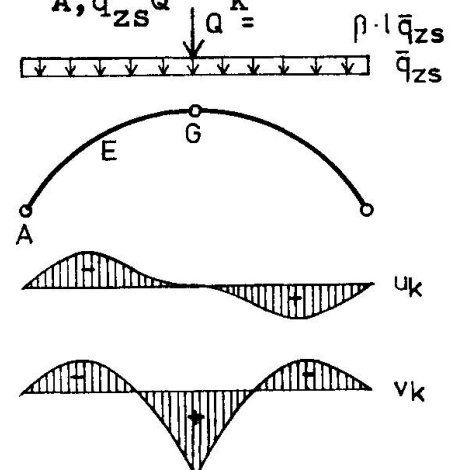


BILD 4  
3-GELENKBOGEN ( $f/l \leq 0,3$ )

Bei bekanntem Krümmungsverlauf  $\tilde{K}(x)$  können die Komponenten  $u_k$ ,  $v_k$  des Verschiebungsvektors berechnet werden, beispielsweise mit der Arbeitsgleichung:

$$\frac{u_k}{h} = - \int_0^1 \frac{\tilde{K}(x)}{\cos \varphi(x)} M_{H1}(x) dx = - C_{uk} \left(\frac{1}{h}\right)^2 \left(\frac{f}{l}\right) (\tilde{K}h)_E \quad (8a)$$

$$\frac{v_k}{h} = - \int_0^1 \frac{\tilde{K}(x)}{\cos \varphi(x)} M_{V1}(x) dx = - C_{vk} \left(\frac{1}{h}\right)^2 (\tilde{K}h)_E \quad (8b)$$

Dabei bedeuten:

$\tilde{K}_E = - \tilde{M}_E / (\tilde{EI})_E$  Stabkrümmung an der Stelle  $k = E$   
als Krümmungsparameter  
 $M_{H1}, M_{V1}$  Momente aus den virtuellen Einheitslasten  $H = 1$  und  $V = 1$  an der Stelle  $k$   
 $C_{uk}, C_{vk}$  Verschiebungskonstanten für die Stelle  $k$ , abhängig von  $f(x)$  Glchg. (9)

Tatsächlich ist der Krümmungsverlauf unbekannt, er wird deshalb möglichst zutreffend angenommen:

$$\tilde{K}(x) = \tilde{K}_E f(x) \quad (9)$$

Die Ansatzfunktion  $f(x)$  (Abschnitt 6.4) muß bei symmetrischer Ausweichform ebenfalls symmetrisch sein.

Mit dem angenommenen Krümmungsverlauf (9) kann das Gleichgewicht zwischen äußeren (e) und inneren (r) Schnittgrößen nur an einer Stelle  $k$  genau erfüllt werden. Dafür wird die Stelle  $k = E$  des Größtmoments gewählt:

$$\max \tilde{M}_{eE} = M_{rE}, \quad \tilde{N}_{eE} = N_{rE} \quad (10)$$

An allen übrigen Stellen wird das Gleichgewicht Fehler aufweisen, deren Größe davon abhängt, wie gut der angenommene Krümmungsverlauf mit dem tatsächlichen übereinstimmt. Die Stelle  $E$  könnte iteriert werden, es genügt jedoch

$$E = 1/4 \quad (11)$$

zu setzen. Damit werden aus (6) (7) (8) im 1/4-Punkt:

$$\tilde{M}_{eE} \approx - \frac{\bar{q}_{zs} l^2}{32} \left\{ 2\beta + 4(1+2\beta) \left(\frac{1}{h}\right) \left[ 2|C_{uE}| \left(\frac{f}{l}\right) + (|C_{vE}| + \frac{3}{4}|C_{vG}|) \left(\frac{1}{f}\right) \right] (\tilde{K}h)_E \right\} \quad (12a)$$

$$\tilde{N}_{eE} \approx - \frac{\bar{q}_{zs} l}{8} \frac{1+2\beta}{\cos \varphi_E} \left(\frac{1}{f}\right) \left[ 1 + |C_{vG}| \cos^2 \varphi_E \left(\frac{1}{f}\right) \left(\frac{1}{h}\right) (\tilde{K}h)_E \right] \quad (12b)$$

Das Zusammenfassen von (12a) und (12b) ergibt nach einigem Rechnen eine parametrisierte Iterationsgleichung für das Wertetripel  $(n, m, Kh)$ , wobei der Ortszeiger  $E$  nicht mehr angeschrieben ist, soweit keine Verwechslungsgefahr besteht ( $Kh \equiv \tilde{K}h$ ):

$$|n| = \frac{4|m|}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{f}\right) \left(\frac{h}{l}\right) \frac{1 + |C_{vG}| \cos^2 \varphi \left(\frac{1}{f}\right) \left(\frac{1}{h}\right) |Kh|}{1 + 2\beta \left\{ 1 + \frac{2(1+2\beta)}{\beta} \left(\frac{1}{h}\right) \left[ 2|C_{uE}| \left(\frac{f}{l}\right) + (|C_{vE}| + \frac{3}{4}|C_{vG}|) \left(\frac{1}{f}\right) \right] |Kh| \right\}} \quad (13)$$

Das Zählerglied mit  $C_{vG}$  ist vor allem bei flachen Bogen nicht mehr  $\ll 1$  und deshalb nicht vernachlässigbar.

Die kritische Last schließlich folgt aus:

$$\frac{\bar{q}_{zs,cr}}{b f c} = 8 \cos \varphi \left(\frac{f}{l}\right) \left(\frac{h}{l}\right) \frac{1}{1 + |C_{vG}| \cos^2 \varphi \left(\frac{1}{f}\right) \left(\frac{1}{h}\right) |Kh|} \frac{|n_{cr}|}{(1+2\beta)} \quad (14)$$

Dabei ist  $b = A_c/h$  unabhängig von der Querschnittsform die Breite eines flächengleichen Rechteckquerschnitts der Höhe  $h$ .

Der steile 3-Gelenkbogen versagt wie der 2-Gelenkbogen, es gelten die für diesen entwickelten Gleichungen.

## 6.2 Iterationsgleichung für den 2-Gelenkbogen

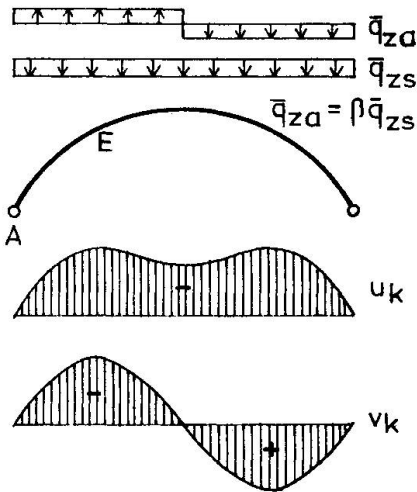


BILD 5  
2-GELENKBOGEN UND  
3-GELENKBOGEN ( $f/l > 0,3$ )

Die kritische Ausweichform ist antisymmetrisch (Bild 5). Zu betrachten sind demnach antisymmetrische Störmomente  $M_k$ . Bei der antisymmetrischen Biegelinie ( $u_k, v_k$ ) entstehen zusätzlich Verformungsmomente  $\Delta M_k$ , die aus  $\bar{q}_{zs}$  antisymmetrisch, aus  $\bar{q}_{za}$  symmetrisch verlaufen. Für das Tragvermögen entscheidend sind allein die antisymmetrischen Verformungsmomente, die sehr viel kleineren symmetrischen sind vernachlässigbar. Diese erreichen erst bei  $\bar{p}_{xa} \neq 0$  und größerem  $f/l$  merkliche Größe. Bleibt außerdem der ebenfalls sehr kleine

antisymmetrische Anteil  $\Delta V_A x_k + \int_0^{x_k} \bar{q}_{zs} u \, dx$  unberücksichtigt, so werden Momente  $\tilde{M}_{ek}$  erhalten, die etwas zu groß sind. Sie folgen aus (2a):

$$\tilde{M}_{ek} \approx M_{k, \bar{q}_{za}} + V_{k, \bar{q}_{zs}} \cdot u_k + H_{k, \bar{q}_{zs}} \cdot v_k \quad (15a)$$

Mit den beim 3-Gelenkbogen beschriebenen Vereinfachungen wird aus (2b):

$$\tilde{N}_{ek} \approx N_{k, \bar{q}_{zs} \bar{q}_{za}} - \Delta V_A, \bar{q}_{zs} \bar{q}_{za} \cdot \sin \varphi_k, \quad (15b)$$

wobei 
$$\Delta V_A, \bar{q}_{zs} \bar{q}_{za} = -\bar{q}_{zs} \int_0^1 \frac{u}{l} \, dx \text{ ist.} \quad (16)$$

Die Ansatzfunktion  $f(x)$  in (9) für die Stabkrümmung muß bei antisymmetrischer Ausweichform antisymmetrisch sein (Abschnitt 6.4). Sie genügt dann auch der Randbedingung  $\tilde{l} = 1$  mit  $\Delta H_A = 0$ .

Für die Stelle  $k = E = 1/4$  des Größtmoments werden mit (8)

$$\tilde{M}_{eE} \approx - \frac{\bar{q}_{zs} l^2}{32} \left\{ \beta + 4 \left( \frac{1}{h} \right) \left[ 2 |C_{uE}| \left( \frac{f}{l} \right) + |C_{vE}| \left( \frac{1}{f} \right) \right] (\tilde{K}h)_E \right\} \quad (17a)$$

$$\tilde{N}_{eE} \approx - \frac{\bar{q}_{zs} l}{8 \cos \varphi_E} \left( \frac{1}{f} \right) \left[ 1 + 4 \frac{J}{l} \sin 2 \varphi_E \left( \frac{1}{h} \right) \left( \frac{f}{l} \right)^2 (\tilde{K}h)_E \right] \quad (17b)$$

In  $\tilde{N}_{eE}$  ist eingesetzt, mit  $J$  als Kürzel für das Integral:

$$\Delta V_A = \bar{q}_{zs} \left( \frac{1}{h} \right) \left( \frac{f}{l} \right) (\tilde{K}h)_E \int_0^1 C_u \, dx.$$

Die Iterationsgleichung wird nach einigem Rechnen ähnlich wie beim 3-Gelenkbogen erhalten:

$$|n| = \frac{4|m|}{\cos \varphi} \left( \frac{1}{f} \right) \left( \frac{h}{l} \right) \frac{1 + 4 \frac{J}{l} \sin 2 \varphi \left( \frac{1}{h} \right) \left( \frac{f}{l} \right)^2 |Kh|}{\beta + 4 \left( \frac{1}{h} \right) \left[ 2 |C_u| \left( \frac{f}{l} \right) + |C_v| \left( \frac{1}{f} \right) \right] |Kh|} \quad (18)$$

Der Ortszeiger  $E$  ist nicht mehr angeschrieben. Das Zählerglied mit  $J$  ist stets  $\ll 1$  und kann vernachlässigt werden. Dies bedeutet  $\Delta V_A = 0$  in (15b) und (17b). (Lösungen enthält Bild 8.) Die kritische Last wird mit dieser Vereinfachung

$$\frac{\bar{q}_{zs, cr}}{b f l_c} = 8 \cos \varphi \left( \frac{f}{l} \right) \left( \frac{h}{l} \right) |n_{cr}| \quad (19)$$



### 6.3 Die Iterationsgleichungen für den gelenklosen Bogen

Wie beim 2-Gelenkbogen ist die Ausweichform antimetrisch (Bild 6). Die Momente und Normalkräfte lassen sich deshalb in gleicher Weise vereinfachen. Aus (2a) wird für die Momente:

$$\tilde{M}_{ek} \approx M_{k, \bar{q}_{za}}^0 + \tilde{M}_{A, \bar{q}_{za}} (1 - 2\frac{x}{l}) + V_{k, \bar{q}_{zs}} \cdot u_k + H_{k, \bar{q}_{zs}} \cdot v_k \quad (20a)$$

(Der zu  $\Delta M_A$  gehörende  $\Delta V_A$ -Anteil ist nicht vernachlässigbar, weil beide zusammen das Glied  $\Delta M_A + \Delta V_A \cdot x_k = \Delta M_A (1 - 2\frac{x}{l})$  bilden).

Die Normalkraft folgt aus (2b):

$$\tilde{N}_{ek} \approx N_{k, \bar{q}_{zs}}^0 + \frac{2\tilde{M}_{A, \bar{q}_{za}}}{l} \sin \varphi_k \quad (20b)$$

Dabei sind  $M^0$ ,  $N^0$ ,  $V^0$  und  $H^0$  Werte des 2-Gelenkbogens, der als Hauptssystem benutzt wird, wobei  $V \equiv V^0$  und  $H \equiv H^0$ , weil  $M_{A, \bar{q}_{zs}} \equiv 0$ .

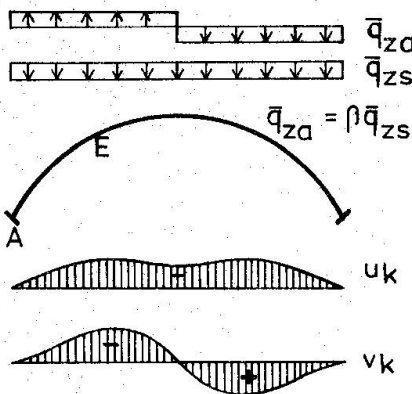


BILD 6  
GELENKLOSER BOGEN

Die Ansatzfunktion für die Krümmung muß antimetrisch und durch wenigstens zwei Parameter festgelegt sein (s. Bild 7):

$$\tilde{K}(x) = \tilde{K}_A f_1(x) + \tilde{K}_E f(\tilde{K}_A / \tilde{K}_E) f_2(x) \quad (21)$$

Sie erfüllt die Randbedingung  $\tilde{l} = 1$ .  $\tilde{K}_A$  ist die Krümmung an der Einspannstelle  $k = A$ ,  $\tilde{K}_E$  an der Stelle  $k = E$  des Größtmoments im Feld. Beide,  $\tilde{K}_A$  und  $\tilde{K}_E$ , sind durch die Randbedingung "volle Einspannung" miteinander verknüpft:

$$\int_0^l \frac{K(x)}{\cos \varphi(x)} M_{M1}(x) dx = 0 \quad (22a)$$

Die Integration liefert  $(\tilde{K}h)_E = -c(\tilde{K}h)_A$ . (22b)

$M_{M1} = 1(1 - 2\frac{x}{l})$  ist das virtuelle Moment.

Mit den Krümmungsparametern  $\tilde{K}_A$  und  $\tilde{K}_E$  kann das Gleichgewicht an den beiden Bogenstellen A und E genau erfüllt werden. Dementsprechend wird ein System von zwei gekoppelten Iterationsgleichungen erhalten. Auch hier wird  $E = 1/4$  gesetzt.

Aus (20) folgen mit (8) die Schnittgrößen:

$$\tilde{M}_{eA} = -\tilde{K}_A (E\tilde{I})_A \quad (23a)$$

$$\tilde{N}_{eA} \approx -\frac{\bar{q}_{zs}}{8\cos\varphi_A} \left(\frac{l}{f}\right) \left[1 - \beta\left(\frac{f}{l}\right) \sin 2\varphi_A\right] + \frac{2\tilde{M}_A}{l} \sin\varphi_A \quad (23b)$$

$$\tilde{M}_{eE} \approx -\frac{\bar{q}_{zs} l^2}{32} \left\{ \beta + 4\left(\frac{l}{h}\right) \left[2|C_{uE}|\left(\frac{f}{l}\right) + |C_{vE}|\left(\frac{l}{f}\right)\right] (\tilde{K}h)_E \right\} + \frac{\tilde{M}_A}{2} \quad (24a)$$

$$\tilde{N}_{eE} \approx -\frac{\bar{q}_{zs}}{8\cos\varphi_E} \left(\frac{l}{f}\right) + \frac{2\tilde{M}_A}{l} \sin\varphi_E \quad (24b)$$

Die Verknüpfung von (23) und (24) ergibt nach einiger Rechnung zusammen mit (22b) das System der Iterationsgleichungen: (25a)

$$|n_E| = \frac{2}{\cos\varphi_E} \left(\frac{l}{f}\right) \left(\frac{h}{l}\right) \frac{2|m_E| + |m_A|}{\beta + 4\left(\frac{l}{h}\right) \left[2|C_{uE}|\left(\frac{f}{l}\right) + |C_{vE}|\left(\frac{l}{f}\right)\right] |Kh|_E} \pm 2|m_A| \left(\frac{h}{l}\right) \sin\varphi_E \quad (25b)$$

$$|n_A| = \frac{\cos\varphi_E}{\cos\varphi_A} \left[|n_E| \mp 2|m_A| \left(\frac{h}{l}\right) \sin\varphi_E\right] \left[1 \pm \beta\left(\frac{f}{l}\right) \sin 2\varphi_A\right] \pm 2|m_A| \left(\frac{h}{l}\right) \sin\varphi_A$$

Die kritische Last wird:

$$\frac{\bar{q}_{zs, cr}}{b f_c} = 8 \cos\varphi_E \left(\frac{f}{l}\right) \left(\frac{h}{l}\right) \left[|n_E| \mp 2|m_A| \left(\frac{h}{l}\right) \sin\varphi_E\right]_{cr} \quad (26)$$

Aus (23) und (24) ergeben sich in den Iterationsgleichungen die unteren Vorzeichen. Sie entsprechen der Untersuchung der linken Bogenhälfte (s. Bild 6), oder anders gesagt, der Kombination der Momente mit den kleinsten Bogendruckkräften. Die oberen Vorzeichen gehören zur Untersuchung der rechten Bogenhälfte in der die Momente zusammen mit den größten Druckkräften auftreten. Maßgebend ist die Bogenhälfte, die das kleinste  $\bar{q}_{zs,cr}$  liefert.

#### 6.4 Ansatzfunktionen $f(x)$ für die Stabkrümmung

Bei 3-Gelenk- und 2-Gelenkbogen liefert eine quadratische Ansatzfunktion (Bild 7)

$$f(x) = 8 \frac{x}{l} (1 - 2 \frac{x}{l}) \text{ mit } (x \leq l/2) \quad (27) \quad a$$

meist sehr genaue Traglasten, die fast ausnahmslos etwas kleiner als die exakten Werte sind.

Bei gelenklosen Bogen gibt es dagegen keine einigermaßen einheitliche Ansatzfunktion, die den gesamten  $\beta$ - und  $f/l$ -Bereich erfassen würde. Sieht man aber von sehr kleinen Störungen - die meist nicht mehr im baupraktischen Bereich liegen - bei Bogen mit sehr kleinem  $f/l$  ab, so sind

$$f_1(x) = 1 - 2 \frac{x}{l}, \quad f_2(x) = 8 \frac{x}{l} (1 - 2 \frac{x}{l}) \quad (28)$$

$$f(\tilde{K}_A/\tilde{K}_E) = 1 + |\tilde{K}_A| / 2 |\tilde{K}_E| \text{ für } (x \leq l/2)$$

brauchbare Ansätze (Bild 7).

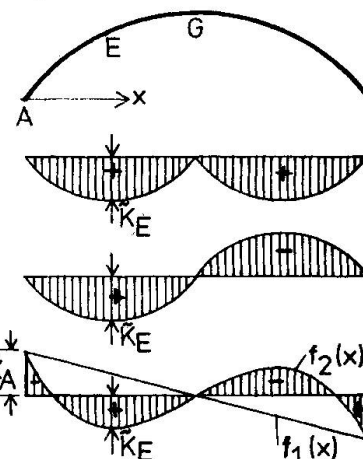


BILD 7  
ANSATZFUNKTIONEN  $f(x)$   
a: 3-GELENKBOGEN  
b: 2-GELENKBOGEN  
c: GELENKLOSER BOGEN

Stetig gekrümmte Ansatzfunktionen wie (27) (28) vermögen die Stabkrümmung nur so lange zutreffend zu beschreiben, als Fließzonen fehlen, die auftreten, wenn die Stahldehnung auf der Zugseite die Streckgrenze überschreitet. Bei 3-Gelenk- und 2-Gelenkbogen sind solche Zonen nicht bedeutsam, weil deren Tragvermögen mit dem Erreichen der Streckgrenze der Zugbewehrung praktisch erschöpft ist. Bei gelenklosen Bogen aber, kann, besonders wenn sie gedrun-gen sind, die Last vielfach noch beträchtlich gesteigert werden, wenn an der Einspannstelle die Streckgrenzendehnung überschritten wird. Es breiten sich Fließzonen aus, im Grenzfall fließt die Zugbewehrung auch in den Viertelpunktbereichen. Mit den Ansätzen (28) lassen sich diese Tragreserven nicht erfassen. Das gelingt erst, wenn der Krümmungsverlauf iterativ verbessert und so den auftretenden Fließzonen angepaßt wird (Abschnitt 7).

#### 6.5 Lösen der Iterationsgleichungen

Die Gleichungen werden für die einzelnen Leitdehnungszustände  $\epsilon_{c1} = \text{konst.}$  gelöst, mit denen das  $n$ - $m$ -Diagramm gerastert ist. Auf jeder Rasterlinie gibt es nur ein zusammengehöriges Wertetripel  $(n, m, Kh)$ , das die Iterationsgleichung erfüllt. Dieses Tripel stellt einen Gleichgewichtszustand dar, der stabil, indifferent oder labil sein kann (s. Bild 8). Das Maximum der Verbindungslinie aller Gleichgewichtszustände ist die kritische Normalkraft  $n_{cr}$ , aus der die Traglast  $\bar{q}_{zs,cr}$  berechnet werden kann.

Der Iterationsvorgang beim 3-Gelenk- und 2-Gelenkbogen bedarf keiner weiteren Erläuterung. Beim gelenklosen Bogen sind folgende Iterationsschritte nötig:

1. Leitdehnungszustand für Querschnitt A wählen
2.  $n_A$  schätzen, der Leitdehnungszustand liefert  $m_A, (Kh)_A$
3.  $n_E$  aus (25b) rechnen,  $(Kh)_E$  aus (22b)



4.  $n_E$  und  $(Kh)_E$  zusammen ergeben  $m_E$
5.  $n_E$  aus (25a) rechnen mit  $m_E$ ,  $m_A$  und  $(Kh)_E$
6.  $n_E$ -Identität prüfen

Iteration wiederholen bis die Identität erreicht ist.

Verzweigungslasten müssen mit sehr kleinem  $(Kh)$  berechnet werden, weil sie für infinitesimal kleine Verschiebungen definiert sind. Mit größerem  $(Kh)$  ist ein Lastabfall verbunden (s. Bild 8).

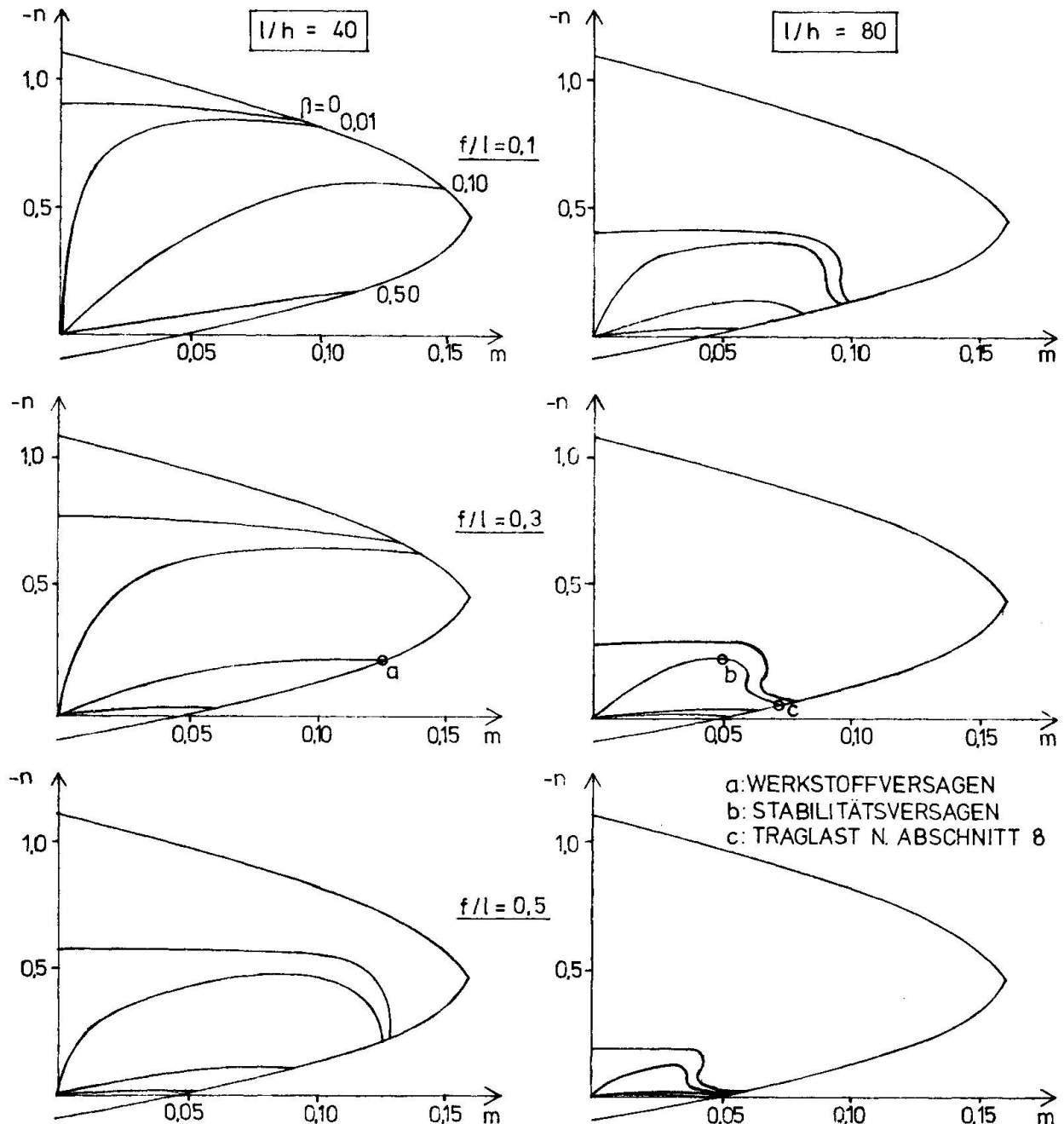


BILD 8 LÖSUNGEN DER ITERATIONSGLEICHUNG FÜR DEN 2-GELENKBOGEN MIT KONST. QUERSCHNITT UND  $\omega = \omega_0 = 0,494$  FÜR DIE STÖRPARAMETER  $\beta = 0/0,01/0,10/0,50$ .  $\sigma$ - $\epsilon$ -DIAGRAMME BETON U. STAHL [1] BILD 13, 14, 15

#### 7. Traglastberechnung mit iterativ verbessertem Krümmungsverlauf

Durch iteratives Verbessern des Krümmungsverlaufs kann das Traglastproblem exakt gelöst werden. Nachdem  $(Kh)_{E,cr}$  und  $n_{cr}$  nach Abschnitt 6 bestimmt sind, ist eine Iteration mit folgenden Schritten nötig:

1. Biegelinien  $u$  und  $v$  rechnen.
2. mit den Biegelinienwerten  $\tilde{M}_e$ - und  $\tilde{N}_e$ -Verlauf rechnen.

3. aus  $\tilde{M}_e = M_r$  und  $\tilde{N}_e = N_r$  verbesserten  $\tilde{K}$ -Verlauf bestimmen
4. Einhalten der Randbedingungen prüfen. Wenn nötig  $\tilde{M}_e$ -,  $\tilde{N}_e$ - und  $\tilde{K}$ -Verlauf durch stat. unbest. Rechnung berichtigen.
5. Iterationsgleichung an den verbesserten und mit den Randbedingungen verträglichen  $\tilde{K}$ -Verlauf anpassen (C-Werte und ggf. verbesserte Stelle E) und lösen.

Iteration mit den verbesserten  $n_{cr}$ - und  $(Kh)_{E,cr}$ -Werten wiederholen, bis die Ergebnisse zweier Durchgänge ausreichend übereinstimmen. Die Konvergenz ist gut, meist reichen ein bis zwei Durchgänge aus.

Normalerweise genügen auch für diese Rechnung die Näherungsausdrücke des Abschnitts 6 für  $\tilde{M}_{ek}$  und  $\tilde{N}_{ek}$ . Es wäre nicht schwierig, nur mühsam, die genauen Gleichungen (2) zu benutzen. Ebenso könnte die Achsdehnung  $\varepsilon_0$  in die Iteration einbezogen werden, was vor allem bei 3-Gelenkbogen mit  $f/l < 0,1$  nötig sein kann.

Das Verfahren der iterativen Verbesserung soll nicht die Regel sein. Es ist vielmehr besonders zum Nachprüfen der Güte der  $\tilde{K}$ -Ansatzfunktion gedacht, wenn Querschnitt und Bewehrung veränderlich sind. Dazu genügt schon ein Iterationsdurchgang.

## 8. Traglastberechnung mit Grenzdehnungszuständen

Das ist die einfachste Art der Traglastrechnung. Sie arbeitet mit einem angenommenen Krümmungsverlauf (Abschnitt 6), verzichtet aber auf die Rasterung des  $n$ - $m$ -Diagramms durch Leitdehnungszustände (Abschnitt 5) und löst die Iterationsgleichung nur für die Begrenzungsline des Diagramms, also für Grenzdehnungszustände. Damit ist zwar die Bruchlast erfaßbar, nicht aber die vielfach beträchtlich höhere Traglast bei Stabilitätsversagen, das durch  $dn/dm = 0$  gekennzeichnet ist (s. Bild 8).

## 9. Verallgemeinern der Ergebnisse

Die für einen bestimmten Bogen gewonnenen Ergebnisse gelten für alle Bogen gleichen statischen Systems mit gleichen Geometrie-, Bewehrungs-, Werkstoff- und Lastparametern (Bild 9). Beispielsweise sind die Verschiebungen (8)  $u/h$  und  $v/h$  parametrisierte Verschiebungswerte und die krit. Lasten (14) (19)  $q/bf'_c$  parametrisierte Lasten. Parametrisiert sind sie für konst. Querschnitt. Bei veränderlicher Querschnittshöhe und -fläche wäre grundsätzlich  $h$  durch  $h_0$  zu ersetzen, wenn  $h_0$  als Höhenparameter eingeführt wird, und außerdem in (8)  $(Kh)_E$  durch  $(Kh)_E h_0/h_E$  und in (14) (19)  $b$  durch  $b_E h_E/h_0$ , um einige Beispiele zu nennen.

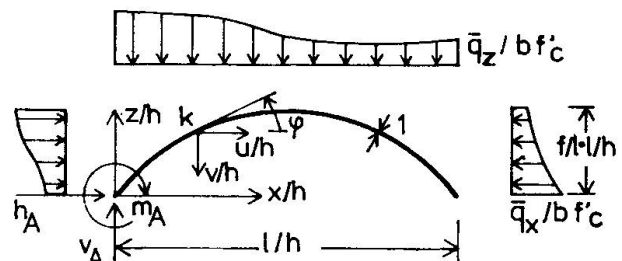


BILD 9 PARAMETRISIERTER BOGEN FÜR KONSTANTES  $A_c$  UND  $h$ .  
 $h_A = H_A / A_c f'_c$ ,  $v_A = V_A / A_c f'_c$

## 10. Berücksichtigen des Einflusses nichtlinearer Geometrieglieder

Der Einfluß der nichtlinearen Geometrieglieder läßt sich durch Korrekturen  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  der Biegelinien  $u, v$  nach dem Gesetz

$$\Delta u' - \Delta v' z' + \left( \frac{1}{2} v'^2 + \varepsilon_0 v' z' \right) (1 + z'^2) = 0 \quad (29)$$

abschätzen. Der Vergleich mit der linearisierten Verschiebungsbeziehung:

$$u' - v' z' - \varepsilon_0 (1 + z'^2) = 0$$

zeigt, daß  $(1/2 v'^2 + \varepsilon_0 v' z')$  als fiktive Achsdehnung gedeutet werden kann. Die Biegelinienkorrekturen  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  sind demnach in 1. Näherung nichts anderes als die horizontale bzw. vertikale Biegelinie aus einer fiktiven Dehnung

$$\varepsilon_0 \text{ fikt} = - \left( \frac{1}{2} v'^2 + \varepsilon_0 v' z' \right) \quad (30)$$

Auch sie sind demnach mit baustatischen Mitteln berechenbar.

Der Einfluß ist nur für den Grenzfall äußerst schlanker Bogen bedeutsam. Die Rechnung vermag lediglich das Einleiten des Durchschlags zu erfassen.

In Glchg.(2) sind die Glieder vernachlässigt, die Produkte von Verschiebungsgrößen enthalten, bei  $M_{ek}$ :  $\Delta V_A u_k$  und  $\Delta H_A v_k$ .

## SCHRIFTTUM

- [1] DIN 1045, Ausgabe 1972
- [2] Internationale CEB-FIP-Richtlinien, Ausgabe Juni 1970
- [3] Bomhard, H.: "Verfahren zur Traglastberechnung ebener Druckbogen mit nichtlinear-elastischem Werkstoffgesetz und nicht-linearen Geometriebeziehungen". Dissertation TU München, 1974
- [4] Bomhard, H.: "Versagensformen und -größen der Druck- und Zugbogen des Hallenbaus". Sicherheit von Betonbauten, Beiträge zur Arbeitstagung, Berlin 1973. Wiesbaden: Deutscher Beton-Verein E.V.

## ZUSAMMENFASSUNG

Für ebene Druckbogen wird ein leistungsfähiges Handrechnungsverfahren beschrieben, das im gesamten Ausmittenbereich mit geringem Arbeitsaufwand sehr genaue Traglasten liefert. Das Verfahren arbeitet auf deterministischer Basis und kann mit unterschiedlichen Genauigkeitsansprüchen betrieben werden. Es führt bei iterativ verbesserter Stabkrümmung zur genauen Lösung des geometrisch linearisierten Traglastproblems. Das Problem wird so parametrisiert, dass die Ergebnisse bei gleichen Parametern allgemein gelten.

## SUMMARY

An efficient manual computation method for plane compression arches is presented by which very accurate load carrying capacities can be evaluated for the whole eccentricity range with a comparatively small effort. The method works on a deterministic basis and can be applied to varying demands of accuracy. By iteratively improving the bar-curvature, it eventually leads to the accurate solution of the geometrically linearized problem. The problem is parametrized thus that the results are generally applicable.

## RESUME

Pour les arcs comprimés plans, on décrit un procédé pratique de calcul à la main, qui fournit en peu de temps les charges ultimes très précises dans toute la zone d'excentricité. Le procédé fonctionne sur une base déterministe et peut être appliqué avec n'importe quel degré de précision. En améliorant itérativement la courbure des barres, il peut conduire à la solution exacte du problème de charge ultime géométriquement linéarisé. Le problème repose sur des paramètres tels que les résultats sont toujours valables quand les paramètres sont égaux.