

Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 16 (1974)

Rubrik: Theme III: Safety concept

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

III

Safety Index of Short Concrete Columns

Indice de sécurité pour des colonnes courtes en béton

Sicherheitskennwert für kurze Stahlbetonstützen

A.M. HASOFER R.G. SEXSMITH

Visiting Professors
Institute of Engineering
National University of Mexico
Mexico

The goal of consistent safety is hampered by the fact that it is difficult to measure safety and to define what we mean by consistency. An ideal situation might be to have explicit probabilities and explicit costs of consequences, and to design for minimum expected cost. Probabilities are not really attainable, however, and other measures of safety are needed as substitutes.

The use of up to second moment measures of variability (means and variances), and a determination of safety index β to represent degree of safety (1, 2, 3, 4), has proved to be an appropriate bridge between traditional design procedures and explicit probabilistic design. A recent second moment method proposed by Hasofer and Lind (4) permits computation of the safety index in terms of any number of basic variables, thus overcoming several shortcomings of earlier approaches.

The safety index is a measure of safety that can be related to probability of failure when distribution assumptions are made. In the absence of such assumptions, it is in itself a measure of safety. Consistent safety may then involve design to a chosen safety index. Choice of new design rules can be based in part on approaching constant safety index for particular kinds of structures or elements. When the safety index varies, as in current design rules, economy may be achieved by bringing it to a consistent level (for example, constant).

The Hasofer-Lind criterion is formulated herein for the column interaction problem (bending and axial force) and the computation of safety index is described. Cases of normal and lognormal basic variables are considered, and correlation of axial and flexural loading is included. A few selected results are presented to indicate the variation of β under current ACI design rules.

A. The Hasofer-Lind Criterion for Safety Index

The safety index proposed by Hasofer and Lind (4) is computed as follows:

Let $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ be the vector of basic random variables relevant to the design. Let the failure criterion for the design be $F(\underline{X}) \leq 0$. The criterion divides the space of \underline{X} into a safe region $G(\underline{X})$ and a failure region $G^*(\underline{X})$.

Now make an orthogonal transformation of the variables \underline{X} to a new set of variables $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, such that the new variables Y_i are uncorrelated. In addition, make suitable transformations such that the Y_i are approximately normally distributed.

Next introduce reduced variables $y_i = (Y_i - \bar{Y}_i) / \sigma_{Y_i}$. Let $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. To the failure criterion $F(\underline{X}) \leq 0$ there will correspond in the space of \underline{y} a safe region $G(\underline{y})$ and a failure region $G^*(\underline{y})$.

The safety index β is the minimum radius from the origin of \underline{y} to the failure region $G^*(\underline{y})$.

The short column interaction problem is an ideal one to demonstrate the power of this criterion, for the following reason: Previous attempts to formulate a second moment code format have required identification of the variables as load or resistance variables. The Cornell and Rosenblueth - Esteva formats (1 and 2) require the failure event to be expressed in terms of resistance R and load U . The Ditlevsen proposal (3), which handles more than two variables, requires identification of variables that increase safety and those that decrease safety. In the short column interaction problem the axial load P can play either role, depending on its value, because of the non-monotonic interaction curve.

B. Behavior of Short Concrete Columns

The model of physical behavior used in this study is the one commonly used in strength design of reinforced concrete, based on the Whitney rectangular stress block and linear strain variation across the section. Attention is restricted to symmetric tied columns with reinforcement only in the faces parallel to the axis of bending. Capacities and loads are treated in non-dimensional form by dividing axial quantities by $bt f_c'$ and flexural quantities by $bt^2 f_c'$. A single interaction diagram in non-dimensional form is defined by the variables listed in Table I.

TABLE I

Symbol	Definition	Typical value
ϵ_c / ϵ_s	Ratio of concrete strain at failure to steel yield strain	2.0
d/t	Depth from face of concrete to face of reinforcement/total depth of section	0.15
A_s/bt	Ratio of steel to concrete area	0.04
f_y/f_c'	Ratio of steel yield to concrete compressive strength	14
k_1 and k_2	Whitney stress block parameters	0.85

C. Application of the Criterion to Short Concrete Columns

The random variables relevant to the design are P , M , and V , where P is the non-dimensional axial load (actual force divided by $btfc'$), M the non-dimensional flexural load (actual moment divided by bt^2f_c'), and V a random variable, representing variability of flexural capacity on the interaction curve as a function of load P .

When P , M , and V are approximately normally distributed, the failure region is defined by

$$f(P) + V - M < 0 \quad (1)$$

where $f(P)$ is the flexural capacity on the interaction curve as a function of load P , $E(V) = 0$, $\sigma(V) = g(P)$, the standard deviation of flexural capacity as a function of P .

When P , M , and V are approximately lognormally distributed, the failure region is defined by

$$f(p) V - M < 0 \quad (2)$$

where $E(\log V) = 0$, $\sigma(\log V) = h(P) = g(P)/f(P)$, the coefficient of variation of flexural capacity as a function of P .

P and M may be correlated, while V is uncorrelated with both P and M .

1. Procedure for Normal Random Variables

Let R be the correlation coefficient of P and M , and write

$$P = \bar{P} + \sigma_P p \quad (3)$$

$$M = \bar{M} + \sigma_M (m \sqrt{1 - R^2} + p R) \quad (4)$$

$$V = g(P) \quad (5)$$

where p and m and v are uncorrelated variables with mean zero and unit standard deviation. It may be verified that $E(P) = \bar{P}$, $\sigma^2(P) = \sigma_P^2$, $E(M) = \bar{M}$, $\sigma^2(M) = \sigma_M^2$, $\text{Cov}(P, M) = \sigma_P \sigma_M R$, as required. Moreover, the safety index obtained with the basic variables P , M , V , is the same as that obtained with the reduced variables, p , m , v .

The failure surface is

$$F(p, m, v) = F(P) + V - M \quad (6)$$

and the safety index β is the distance from the origin to the surface $F(P, m, v) = 0$.

To calculate β we use the iteration technique described in Hasofer and Lind (4). The iteration formulae are:

$$p^{(n+1)} = \lambda F_1$$

$$v^{(n+1)} = \lambda F_2$$

$$m^{(n+1)} = \lambda F_3$$

$$\beta^{(n+1)} = \left[(p^{(n+1)})^2 + (v^{(n+1)})^2 + (m^{(n+1)})^2 \right]^{1/2}$$

where

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial p} (n)$$

$$F_2 = \frac{\partial F}{\partial v} (n)$$

$$F_3 = \frac{\partial F}{\partial m} (n)$$

$$\lambda = \frac{p^{(n)} F_1 + v^{(n)} F_2 + m^{(n)} F_3 - F}{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$$

$$F = F(p^{(n)}, v^{(n)}, m^{(n)})$$

and the partial derivatives of F can be shown to be

$$\frac{\partial F}{\partial p} = f'(P) \sigma_p + g'(P) v \sigma_p - \sigma_m R$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = g(P)$$

$$\frac{\partial F}{\partial m} = -\sigma_m \sqrt{1 - R^2}$$

A starting point $p^{(1)}, v^{(1)}, m^{(1)}$ must be chosen. There are a number of perpendiculars from the origin to the failure surface, and the iteration procedure may converge to any one of them, depending on the starting point of the iteration. It is necessary to choose several starting points and take the smallest of the β 's obtained.

2. Procedure for Lognormal Random Variables

In this case we write

$$P = \bar{P} \exp(V_p p)$$

$$M = \bar{M} \exp \left[V_m (m \sqrt{1 - R^2} + p R) \right]$$

$$V = \exp[h(P) v]$$

where p, m, v , and R are defined as before, and $E(\log P) = \log \bar{P}$, $\sigma^2(\log P) = V_p$, $E(\log M) = \log \bar{M}$, $\sigma^2(\log M) = V_m$, $\text{Cov}(\log P, \log M) = V_p V_M R$.

The failure surface is

$$F(p, m, v) = f(p) V - M$$

and the safety index β is the distance from the origin to the surface $F(p, m, v) = 0$.

The iteration formulae for computing the distance β is the same as for normal random variables, except that the partial derivatives are

$$\frac{\partial F}{\partial p} = VPV_p \left[f'(P) + f(P) h'(P) v \right] - MV_M R$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = V f(P) h(P)$$

$$\frac{\partial F}{\partial m} = - MV_M \sqrt{1 - R^2}$$

The choice of starting points again must be made with care to avoid missing convergence to the smallest β . The authors encountered this problem in some instances, especially in the lognormal case.

D. The Information Base

Current ACI design criteria is generally assumed to relate to load information by ANSI Committee A58. Recent studies have resulted in prediction of mean lifetime loadings for offices that differ substantially from ANSI. Because of this bias in design load, β varies considerably. In order to focus on strength consistency, we assume that the mean peak lifetime load from Mc Guire and Cornell (5) is used as the live load in the ACI design procedure. This means that the β values discussed subsequently are for the single design area at which ANSI and Ref 5 give the same loading (about 1000 ft²). The coefficient of variation of live load V_L is taken as 0.15. Mean dead load is taken as nominal dead load, and coefficient of variation of dead load is taken as 0.10. Current ACI load factors are used to relate design load to ultimate strength.

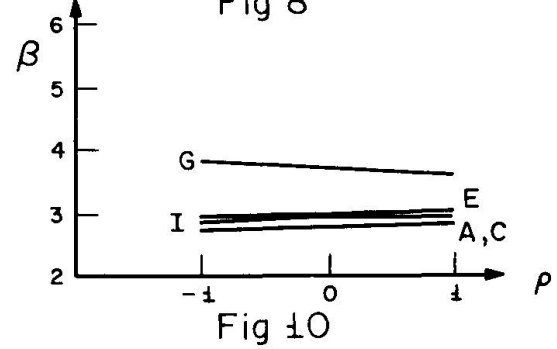
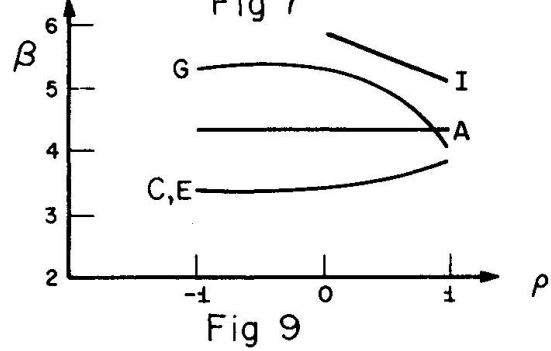
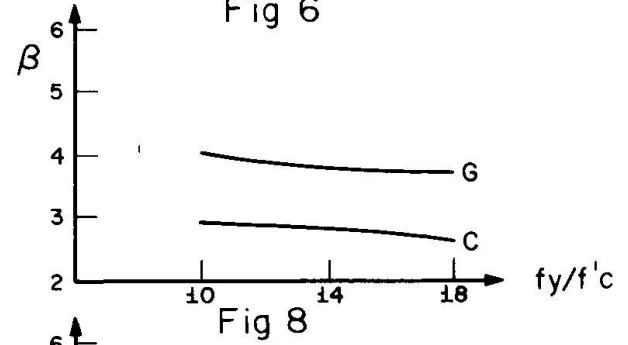
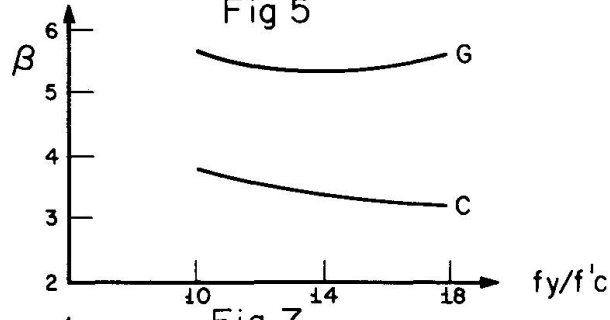
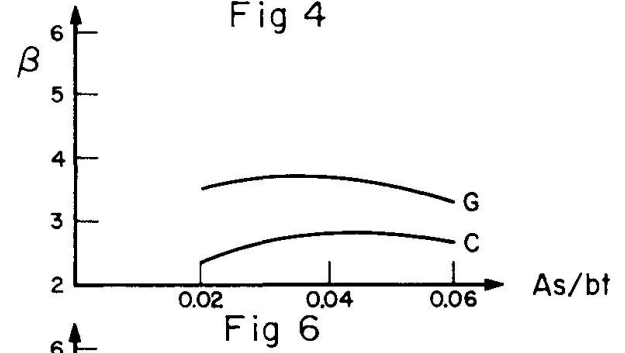
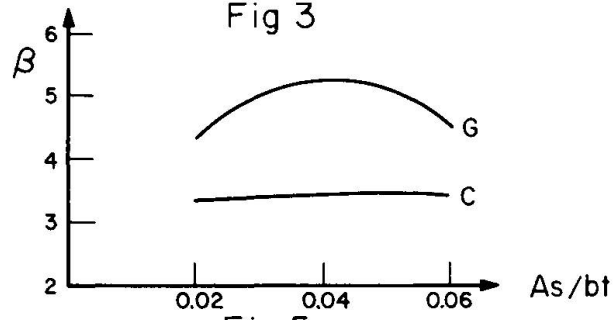
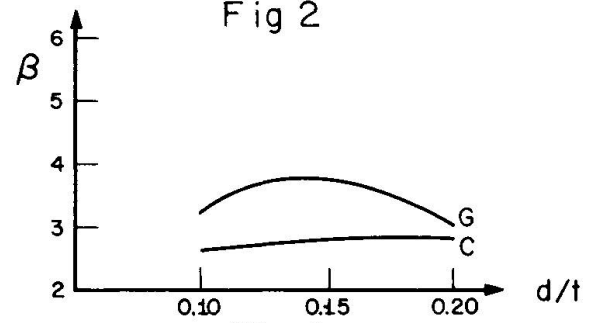
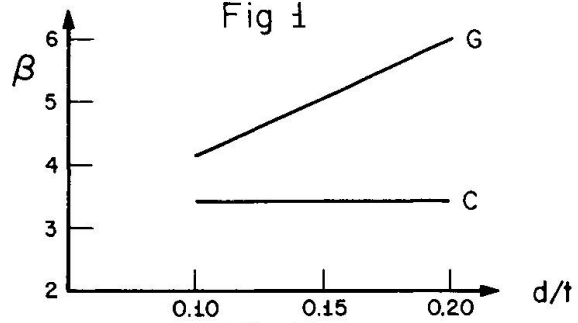
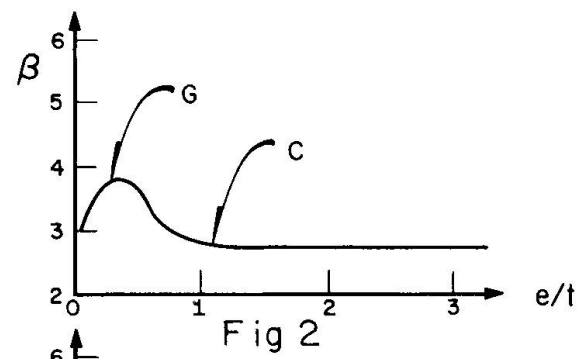
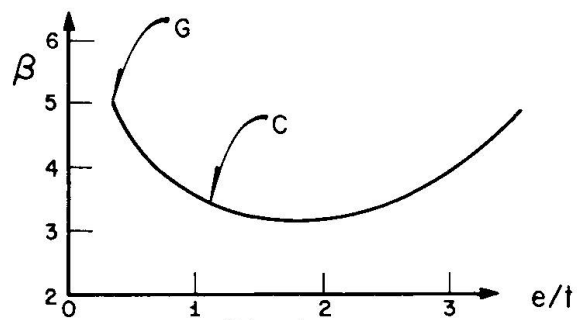
Strength of concrete columns is subject to prediction error due to model discrepancies, material and geometric variability, and professional uncertainty. Studies of these factors has led the authors to choose a bias on strength $b = 0.95$ as representative of ACI criteria, where $b = U/\bar{U}$, U is ACI predicted strength and \bar{U} is mean strength. The coefficient of variation of strength V_U was chosen as 0.20 on the strength as represented by radius to the interaction curve.

For a given "case" in this study, a dimensionless interaction curve is generated. For a particular ratio of nominal dead/live load intensity, a series of permissible ACI load cases (P , M) are generated and denoted by letters A to I to identify eccentricity. For each of these cases, β is computed as indicated in Section C. Dead/live ratio did not significantly affect β , and was taken as 0.5 in the calculations discussed here.

For any axial load P , the flexural capacity $f(P)$ is computed from the parameters and principles discussed in Section B. The standard deviation of flexural capacity, $g(P)$, is computed from the coefficient of variation of radius to the interaction curve (evaluated from studies of available data) and corrected to account for the fact that it must represent a "horizontal slice" through the interaction curve, rather than a "radial slice".

E. Selected Results

A large number of cases representing varying loading, geometry material strength, and correlation coefficient of axial and flexural load were evaluated, and sensitivity studies



were carried out by varying parameters in these cases. The results presented herein are selected to illustrate the main conclusions of the study.

A basic column design was chosen using ACI design rules with the parameter values as given in Table I. For this design, point C on the interaction curve represents an e/t ratio of 1.1, in the tension zone close to the balanced design. Point G has $e/t = 0.30$, in the compression zone. Other designs are A ($e/t = 3.3$), E ($e/t = 0.8$), F ($e/t = 0.52$), and I ($e/t = 0.05$). Parameter variations discussed below represent reasonable designs with the named parameters varying from the basic case and the others held constant at the basic values of Table I.

The safety index appears very sensitive to the e/t ratio, particularly for the lognormal case, where (fig 1) β is high in the compression failure zone (G), decreasing to a minimum near the balanced point C. The normal case of fig 2 shows a peak at point G in the compression zone, and a constant value in the tension zone.

The results show that β is not very sensitive to d/t . Fig 3, lognormal case, shows an extreme situation in which β became larger as d/t increased, but for the normal case, fig 4, β remains constant. Thus geometry is well accounted for in present design practice. The variation of β with steel percentage A_s/bt is pronounced in the lognormal case (fig 5) and insignificant in the normal case of fig 6.

The effect of steel strength appears in figs 7 and 8 for the lognormal and normal cases respectively. The strength ratio f_y/f_c' does not appear to alter β in an important way.

The effect of correlation between axial load and moment is indicated for the lognormal case in fig 9. Designs A through E show increasing β with increasing correlation coefficient. This occurs because negative correlation results in increased chance of tension failure. Designs G and I in the compression zone show the converse, as expected. Positive correlation for compressive zone designs decreases the safety. These trends occur in the normal case (fig 10) but the variation is so slight that it is almost indiscernible.

The safety index appears to be sensitive to most variables in the lognormal case, less so in the normal case. It is higher in the lognormal case, as should be expected due to the improved strength situation when strength is lognormally distributed.

β appears to approach 3.2 in a number of situations in the lognormal case, and this may be a reasonable calibration point. One possible consistency rule for column designs would be to alter design rules to give $\beta = 3.2$. This would result in slightly more economical columns in many cases, but would not decrease strength in the cases where β is already at this calibration point.

REFERENCES

1. Cornell, C. A., "A Proposal for a Probability - Based Code Suitable for Immediate Implementation", Memorandum to ASCE and ACI Committees on Structural Safety, August, 1967.
2. Rosenblueth, E. and L. Esteva, "Reliability Basis for some Mexican Codes", Paper SP 31-1, Probabilistic Design of Reinforced Concrete Buildings, ACI 348, American Concrete Institute, Detroit, 1972.

3. Ditlevsen, O., "Structural Reliability and the Invariance Problem". Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Report # 22, March 1973.
4. Hasofer, A. M. and N. C. Lind, "An Exact and Invariant Second Moment Code Format". Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Paper # 119, May 1973.
5. Mc Guire, R. K., and C. A. Cornell "Gravity Live Load Effects in Office Buildings", to be published.

ACKNOWLEDGMENT

The authors wish to acknowledge the support of the Institute of Engineering, National University of Mexico, for the conduct of this research.

SUMMARY

The Hasofer-Lind method of computing a second moment measure of safety called the safety index is applied to the case of short reinforced concrete columns. The variation of safety index with the usual parameters is discussed for current ACI (1974) design rules.

RESUME

On applique au cas de colonnes courtes en béton armé la méthode de Hasofer-Lind consistant à calculer un indice de sécurité d'après la méthode des moments des variables statistiques. La variation de l'indice de sécurité selon les valeurs des paramètres de dimensionnement usuels est étudiée pour les règles de dimensionnement ACI (1974).

ZUSAMMENFASSUNG

Die Hasofer/Lind-Methode für die Berechnung eines Sicherheits-Kennwertes mittels der Methode der zweiten Momente, wird auf den Fall kurzer Stahlbetonstützen angewendet. Die Variation des Sicherheits-Kennwertes mit den üblichen Parametern wird für die gültigen ACI (1974) Normen diskutiert.

Ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Konzept zur Ermittlung "bester" Bemessungswerte für schlanke Stahlbetondruckglieder

A Probability Theory Concept for the Determination of "Best" Design Values of Slender Reinforced Concrete Compression Members

Un concept basé sur la théorie de probabilité permettant d'obtenir les "meilleures" valeurs de dimensionnement pour les pièces comprimées élancées en béton armé

R. RACKWITZ O. KNAPPE
Wiss. Mitarbeiter am Institut für Massivbau
Technische Universität München
München, BRD

1. Einführung

Ein Versagen von schlanken Stahlbetondruckgliedern erfolgt ohne Vorankündigung und ist in der Regel mit hohen Schadensfolgen verbunden. Der "sicheren" Bemessung solcher Bauteile kommt daher besondere Bedeutung zu. Es ist dabei notwendig, die mechanische und geometrische Nichtlinearität des Tragverhaltens bei der Festlegung der Bemessungswerte zu berücksichtigen.

Die aktuelle Größe der Variablen ist im vorhinein unbekannt und vom Zufall beeinflusst. Eine sicherheitstheoretische Betrachtung des Problems der Sicherheit von Druckgliedern ist daher mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitslehre zu führen. Der Begriff "Sicherheit" ist durch Zuverlässigkeit zu ersetzen und z.B. durch den Wert der Versagenswahrscheinlichkeit zu beschreiben. Die Unsicherheit über eine Einflußgröße findet in Form eines Verteilungsgesetzes oder einer zufälligen Funktion quantitativ Ausdruck.

Genormte Bemessungsanweisungen müssen einfach sein. Sie sind so einzurichten, daß im gesamten Anwendungsbereich eine gleichmäßige, ausreichend kleine und wirtschaftlich vertretbare Versagenswahrscheinlichkeit gegeben ist.

Demnach ist zunächst die Versagenswahrscheinlichkeit für definierte Versagenskriterien zu berechnen /1/ und ihre Empfindlichkeit gegenüber den Einflußgrößen zu untersuchen /2/. Dann ist das Kriterium zu formulieren, welches die Ableitung von Bemessungsanweisungen erlaubt, welche den vorstehend genannten Bedingungen in bestmöglicher Weise entsprechen. Die Kenntnisse sind noch nicht ausreichend, Wirtschaftlichkeit und Zuverlässigkeit unmittelbar zu optimieren. Das Hauptaugenmerk ist vorerst auf Gleichmäßigkeit des Sicherheitsniveaus zu richten. Der Zielwert der Versagenswahrscheinlichkeit ist daher einstweilen in Übereinstimmung mit dem Sicherheitsniveau gewählt, welches durch die derzeit üblichen Bemessungsverfahren im Mittel garantiert wird.

2. Mechanisch-physikalische Grundlagen

Gegeben sei eine Kragstütze mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt, welche durch eine Normalkraft $N = N_a$ und ein Biegemoment $M = M_a$

belastet wird (Abb. 1). Ihre Schlankheit sei $\lambda = 2 \cdot l/i$ (l = Stützhöhe, i = Trägheitsradius des Betonquerschnitts). Für die Werkstoffe gelten folgende wirklichkeitsnahen Annahmen:

- Beton - die Spannungsdehnungslinie folgt dem Parabelrechteckgesetz (Abb. 2). Die Rechenfestigkeit σ_R beträgt bei kurzzeitiger Belastung 85 % der Würfelfestigkeit σ_w und sinkt bei andauernder Belastung auf 0,72 σ_w ab. (Siehe /1/).
- Betonstahl - zugrundegelegt wird die Verwendung eines naturharten Betonstahls, dessen Spannungsdehnungslinie bilinear verläuft (Abb. 3).

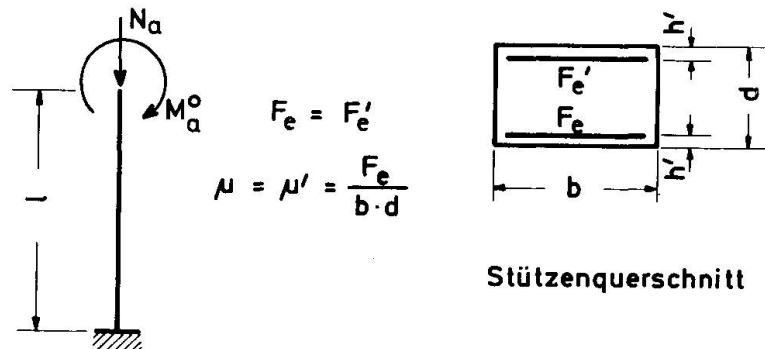


Abb. 1: Statisches System und Stützenquerschnitt

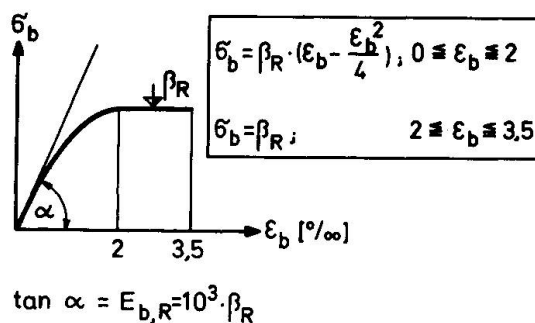


Abb. 2

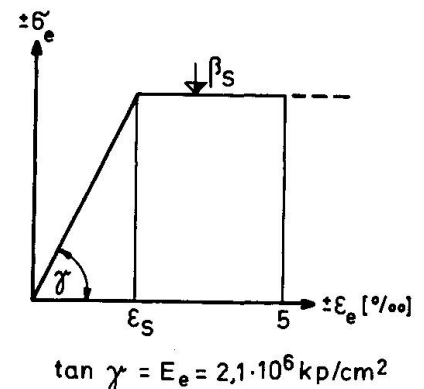


Abb. 3

Im übrigen gelten die üblichen Voraussetzungen der Tragwerksberechnung nach Theorie II.Ordnung (z.B. /3/).

Das Versagen einer Stahlbetonstütze kann auf drei Arten (Grenzstände) erfolgen, die sich gegenseitig ausschließen:

- Bruch der Betondruckzone durch Überschreiten der Bruchstauchungen; dieser Zustand wird im folgenden als Versagensart A bezeichnet.
- Überschreiten einer plastischen Verformungsgrenze der auf der Zugseite liegenden Bewehrung - Versagensart B.
- Instabilität der Stütze, bevor die Grenzdehnungen des Betons oder Betonstahls erreicht werden - Versagensart C.

Versagensart B kennzeichnet kein Versagen durch Verlust des Gleichgewichtes, sondern ist durch Überlegungen zur Gebrauchsfähigkeit und Dauerhaftigkeit des Bauteils festzulegen. Ein Versagen durch Zerreißen der Bewehrung kann wegen der großen Bruchdehnungen der üblichen Betonstäh-

le außeracht gelassen werden.

Zur Berechnung der möglichen Grenzzustände wird die inhomogene Differentialgleichung der Biegelinie der Stütze (siehe Abb. 4 bzw. Abb. 5)

$$y''(x) = - \frac{M(x)}{[EJ](x)} = - \frac{\Delta \varepsilon(x)}{d} \quad (1)$$

in zwei gekoppelte Differentialgleichungen I. Ordnung zerlegt,

$$y_1(x) = y'(x) \text{ mit } y_1'(x) = y''(x); \quad y_2(x) = y(x) \text{ mit } y_2'(x) = y_1(x); \quad (2)$$

welche durch eine Extrapolationsmethode /4/, ausgehend von den Anfangswerten am Stützenfuß, schrittweise gelöst werden.

Die Stütze ist labil, wenn das Moment M^0 für gegebene Normalkraft zu einem Maximum wird, also

$$M_C^0 = \max M^0(N, y(l)) \quad (3)$$

Die Gleichgewichtsbedingung liefert das zugehörige Fußmoment M_C^u .

Die Stütze versagt im Zustand B, wenn die Dehnung der Zugbewehrung im Stützenfuß $\varepsilon_e = 5 \text{ ‰}$ überschreitet und im Zustand A, wenn an der gleichen Stelle die Betonstauchung $\varepsilon_b = -3,5 \text{ ‰}$ unterschreitet.

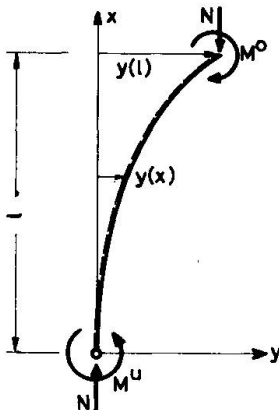


Abb. 4: Verformtes System

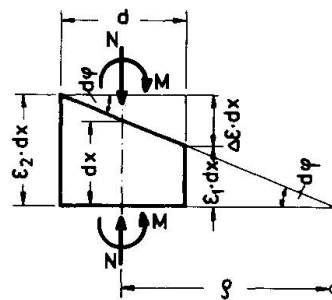


Abb. 5: Beziehungen am verformten Stützelement

Per Definition versagt die Stütze, wenn einer der genannten Grenzzustände erreicht wird. Mithin gilt für alle N das folgende Versagenskriterium

$$V = \{ M_a^u | N > M_A^u | N \cup M_a^u | N > M_B^u | N \cup M_a^0 | N > M_C^0 | N \} \quad (4)$$

worin vereinfachend angenommen wird, daß die mechanischen und geometrischen Eigenschaften längs der Stütze konstant sind.

3. Zuverlässigkeitsanalyse

Die wichtigsten Einflußgrößen auf den Tragzustand der Kragstütze sind die Querschnittsbreite b , die Querschnittshöhe d , die Betonüberdeckung h' , die Betonfestigkeit β_R , die Stahlstreckgrenze β_s sowie die angreifende Last $N = N_a$ und das angreifende Kopfmoment M_a^0 . Deren stochastisches Verhalten sei durch die Wahrscheinlichkeitsdichten $f(\cdot)$ beschrieben. Die Variablen seien bis auf die Querschnittshöhe und -breite, welche streng korreliert angenommen werden, stochastisch paarweise voneinander unabhängig.

Wir berechnen zunächst die Versagenswahrscheinlichkeit am Ort des Versagens (Fuß der Stütze). Die Lösungen der in Abschnitt 2 erläuterten Differentialgleichungen stellen den Zusammenhang zwischen M_a^0 und M_a^u bzw. M_A^u , M_B^u , M_C^u für jede Kombination der Variablen her. Sowohl angreifendes Moment M_a^u , als auch die widerstehenden Momente M_U^u , $U = A, B, C$ sind dann Funktionen der Einflußvariablen und stochastisch voneinander abhängig. Demnach sind durch Anwendung der Transformationsregeln für Funktionen von Zufallsvariablen die zweidimensionalen Randdichten $f(M_a^u, M_U^u)$ für alle N zu bilden /5/. Bei gegebenem N ist dann mit (siehe auch Abb. 6)

$$P_{f,U} = \int \int_{(M_a^u > M_U^u)} f(M_a^u, M_U^u) dM_a^u dM_U^u \quad (5)$$

die Versagenswahrscheinlichkeit wegen Gl. (4)

$$\begin{aligned} P_f(N) &= P_{f,A}(N) \cup P_{f,B}(N) \cup P_{f,C}(N) \\ &= P_{f,A}(N) + P_{f,B}(N) + P_{f,C}(N) - P_{f,A}(N) \cdot P_{f,B}(N) - P_{f,A}(N) \cdot P_{f,C}(N) \\ &\quad - P_{f,B}(N) \cdot P_{f,C}(N) + P_{f,A}(N) \cdot P_{f,B}(N) \cdot P_{f,C}(N) \quad (6) \end{aligned}$$

und nach Integration über alle N schließlich

$$P_f = \int_{(N)} f(N) \cdot P_f(N) dN \quad (7)$$

Eine exakte numerische Lösung erfordert bei Einsatz großer Rechenanlagen bereits bei Berechnung von M_a^u und M_U^u und weiter bei der Bildung der gemeinsamen Dichten $f(M_a^u, M_U^u)$ erheblichen Aufwand, so daß Näherungslösungen gesucht werden.

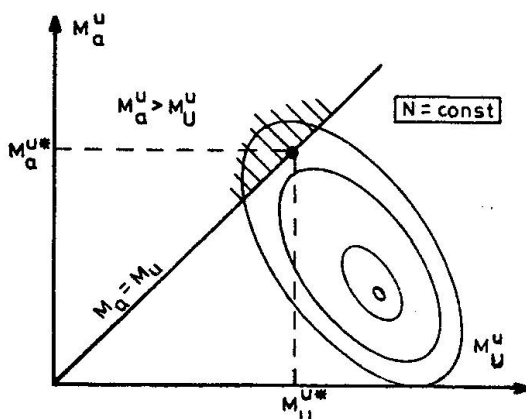


Abb. 6

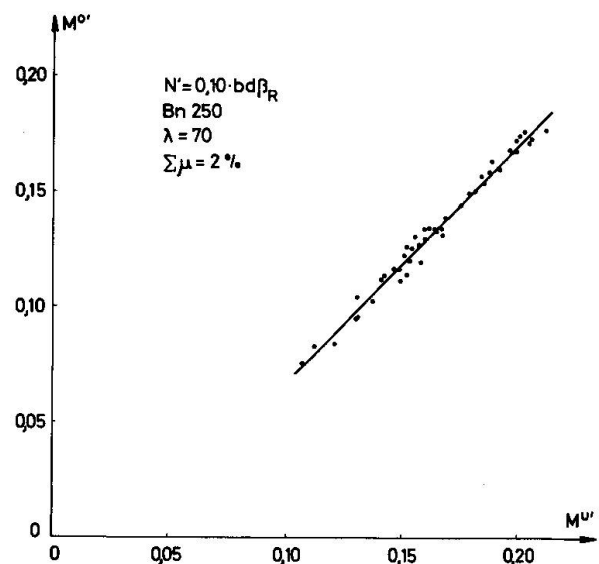


Abb. 7: Zusammenhang zwischen M_U^0 und M_U^u

Zunächst kann man das Versagenskriterium derart transformieren, daß Beanspruchung und Beanspruchbarkeit näherungsweise stochastisch voneinander unabhängig werden. Dies gelingt durch Formulierung des Versagenskriteriums am Stützenkopf. Zwischen dem Moment am Stützenfuß und am Stützenkopf existiert nämlich in jedem Versagenszustand ein relativ straffer, positiver in guter Näherung linearer Zusammenhang, wie das Beispiel von Abb. 7 zeigt /1/. Damit können die Verteilungsdichten von Beanspruchung und Beanspruchbarkeit vorab und unabhängig berechnet werden.

Transformiert man also die Momente M_U^u in Kopfmomente M_U^o (vgl. Abb. 8) bei bereits ermitteltem M_a^u so, daß

$$M_U^o | N = F^{-1}(p_U) \text{ mit } p_U = \int_0^{M_a^u | N} f_U(M_U^u | N) dM_U^u = F_U(M_a^u | N), \quad (8)$$

so vereinfacht sich die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit nach Einführung des Gl. (5) entsprechenden Ausdrucks

$$P_{f,U}(N) = \int_0^\infty f(M_a^o) \cdot F_U(M_a^o | N) dM_a^o \quad (9)$$

wenn

$$F_U = F_U(M_a^o | N) = \int_0^{M_a^o | N} f_U(M_U^o | N) dM_U^o \quad (10)$$

und unter Beachtung von Gl. (6) zu

$$P_f = \int_0^\infty f(N) \left\{ \int_0^\infty f(M_a^o) [F_A + F_B + F_C - F_A \cdot F_B - F_A \cdot F_C - F_B \cdot F_C + F_A \cdot F_B \cdot F_C] dM_a^o \right\} dN \quad (11)$$

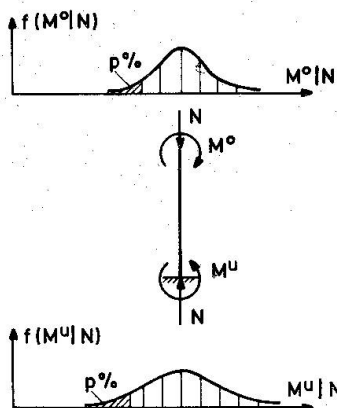


Abb. 8

Weitere Näherungen sind bei Berechnung der

Dichten $f_U^o(M_U^o | N)$ notwendig. Um erste Anhalts-

punkte über die Form dieser Verteilungsdichte

zu erhalten - daß immer die Bedingung N gilt,

wird im folgenden nicht mehr gesondert bezeich-

net - wurde zunächst mit Hilfe der Monte-Carlo-

Methode unter Zugrundelegung der Angaben von

Tabelle 1 die Beanspruchbarkeit simuliert.

Statistische Anpassungstests ergaben, daß die

Hypothese zugrundeliegender Normalverteilungen

mit einer statistischen Sicherheit von 95 %

nicht verworfen werden muß. Betrachtet man das

Modell einer bei Null gestutzten Normalverteilung

als hinreichend genau, so kann man sich

im weiteren mit der Berechnung der ersten bei-

den Momente der Verteilung der Beanspruchbarkeit begnügen /6/:

$$E(M_U) \approx g_U(E(x_i)) \quad (12)$$

$$\text{Var}(M_U) \approx \sum_{(i)} \left(\frac{\partial g_U}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \text{Var}(x_i) \quad (13)$$

Hierin ist $g_U(\cdot)$ das in Abschnitt 2 beschriebene Berechnungsverfahren

zur Bestimmung der Grenzzustände und x_i die Zufallsvariablen nach Tab. 1.

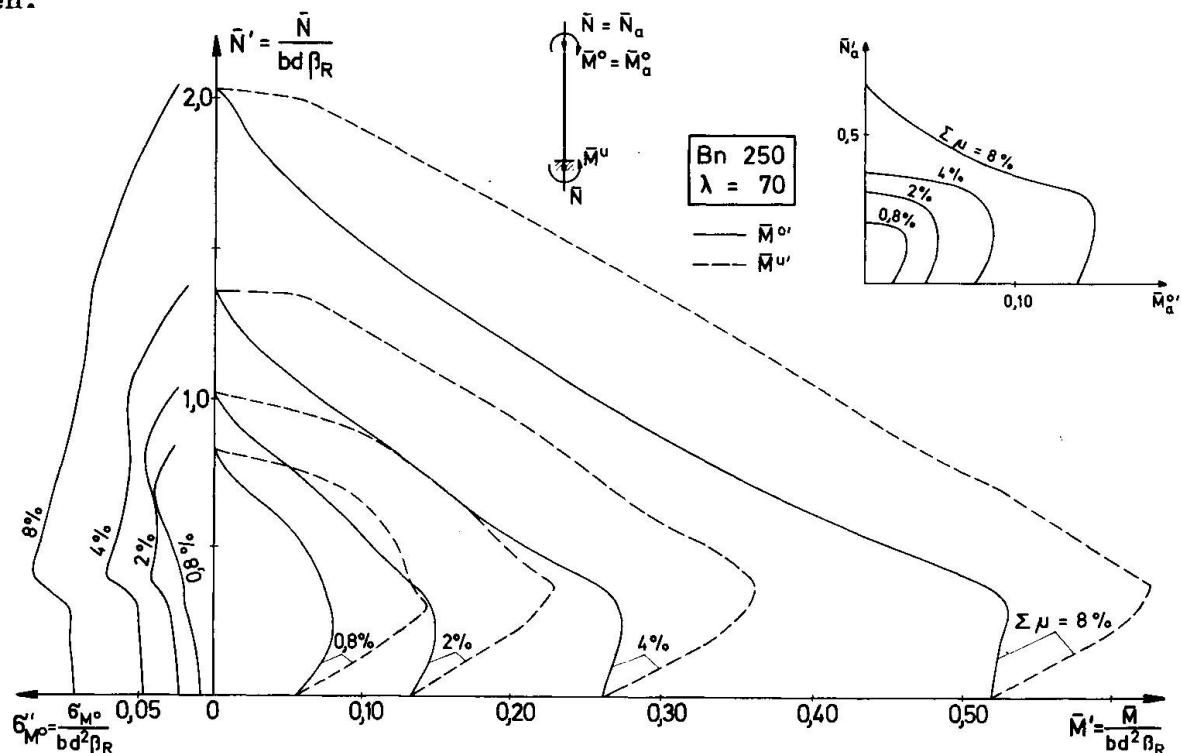
Tabelle 1

Zufallsvariable +)	Mittelwert	Streuung
Querschnittsabmessungen b, d	-	$V_b = V_d = 0,05$
Betonüberdeckung h'	$0,1 \cdot \bar{d}^{++})$	$V_{h'} = 0,30$
Betonfestigkeit β_w	330 kp/cm^2	$\sigma = 50 \text{ kp/cm}^2$
Betonstahlstreckgrenze β_s	4600 kp/cm^2	$\sigma = 243 \text{ kp/cm}^2$
Normalkraft N_a	-	$V_N = 0,10$
Moment M_a^0	-	$V_M = 0,20$

+) Sämtliche Variablen werden normalverteilt angenommen

++) Der Querstrich kennzeichnet Mittelwerte (Erwartungswerte).

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist nunmehr näherungsweise berechenbar. Umgekehrt können bei vorgegebener Versagenswahrscheinlichkeit und bekannten Verteilungsgesetzen der die Beanspruchbarkeit beeinflussenden Variablen die Verteilungsparameter der zugehörigen Beanspruchung iterativ ermittelt werden.



In Abb. 8 sind für die Stützenschlankheit $\lambda = 70$ und mehrere Bewehrungsgehalte die Ergebnisse einer Rechnung für $P_f = 10^{-4}$ aufgetragen. Auf der linken Seite des Bildes ist die Größe der Standardabweichung des Kopfmomentes für die Versagensart C dargestellt, im Diagramm selbst finden sich die Interaktionsbeziehungen der mittleren Grenztragfähigkeit und im Diagramm oben rechts sind die Mittelwerte der zugehörigen Beanspruchung angegeben. Der Wert β_R ist die 5 %-Fraktile des zu $0,85 \cdot \beta_w$ gehörigen Kollektivs nach Tabelle 1.

Abb. 9 zeigt für $\lambda = 70$ und $\sum \mu = 2\%$ den geometrischen Ort der 95%-Fraktile der Komponenten N_a und M_a^0 für die Versagenswahrscheinlichkeiten $P_f = 10^{-3}$, 10^{-4} und 10^{-5} . Zusätzlich sind die zulässigen Werte bei der Bemessung nach DIN 1045 /7/, den CEB-Empfehlungen /8/ und den ACI Vorschriften /9/ eingezeichnet.

Die im linken Teil der Abbildung aufgetragene bezogene Streuung des Kopfmoments ändert sich spürbar mit zunehmender Normalkraft. Dabei überwiegen die Streuungen der Querschnittsabmessungen und der Betonfestigkeit für die nach Tabelle 1 getroffenen Annahmen.

Man erkennt weiter, daß keine dieser Bemessungsanweisungen ein gleichmäßiges Sicherheitsniveau gewährleistet. Diese Feststellung bleibt auch bei anderen Annahmen für die Verteilungsgesetze sowie für andere Betongüten, Stahlgüten, Querschnittsformen, Schlankheiten etc. im Prinzip gültig /1/. Anzumerken ist, daß die jeweilige Größe der Versagenswahrscheinlichkeit als operativer Rechenwert zu verstehen ist, welcher nur in Verbindung mit den getroffenen Annahmen und Vereinfachungen Aussagekraft besitzt.

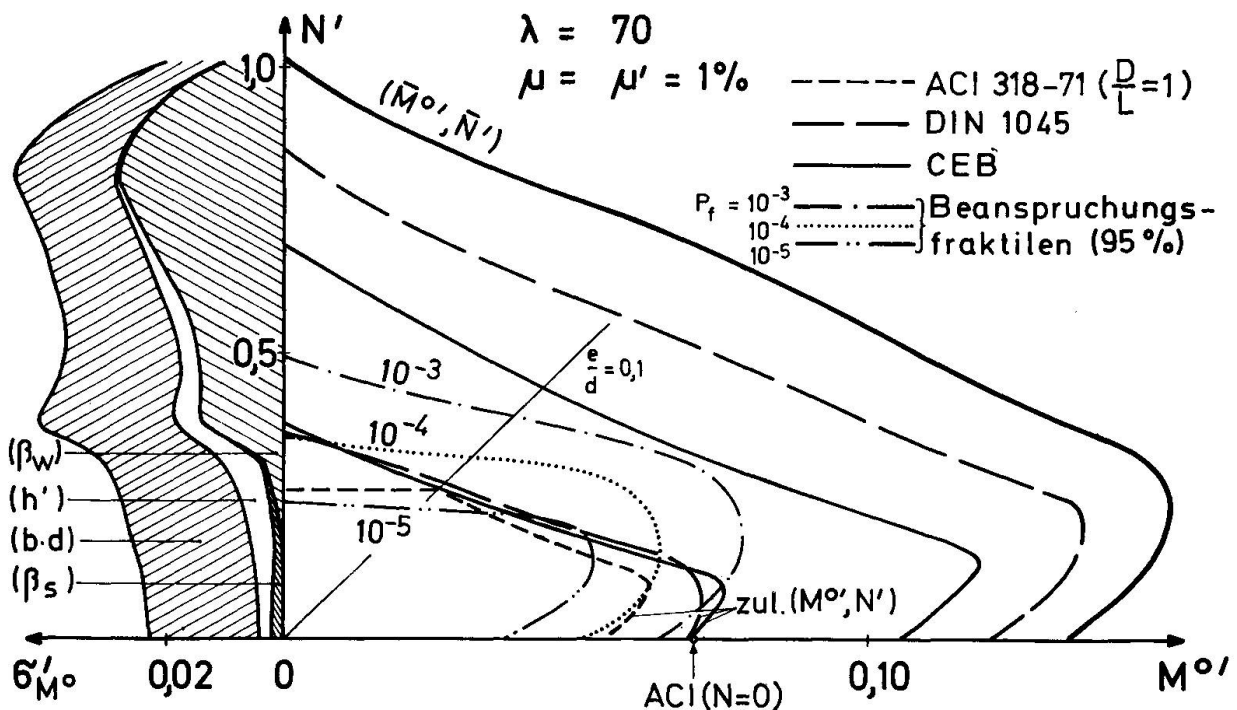


Abb. 9

4. Bestimmung von "besten" Bemessungswerten

Vom praktischen Standpunkt aus kann die Forderung nach Einfachheit und Durchsichtigkeit von Bemessungsregeln nicht genug hervorgehoben werden. Es ist z.B. wünschenswert, jede Einflußgröße darin durch einen einzigen Bemessungswert zu charakterisieren, welcher allerdings als Funktion der Verteilungsparameter angebbare sein sollte. Eine praktikable Bemessungsanweisung kann im vorliegenden Fall etwa wie folgt aussehen:

$$M_a^0 | N^* \leq M_U^0 | N^* = g^*(b^*, d^*, h^*, B_w^*, B_g^*, N^*) \quad (14)$$

Im Falle der Gleichheit ist $M_a^0 = M_a^{0*}$, $g^*(\dots)$ die vorgeschriebene, u.U.

vereinfachte Berechnungsanweisung.

Unendlich viele Kombinationen von Bemessungswerten erfüllen diese Ungleichung, wenn ein vorgegebener Rechenwert der Versagenswahrscheinlichkeit angezielt werden soll. So wird z.B. in einigen Vorschriften N bzw. M_a^0 sehr ungünstig angesetzt; die anderen Bemessungswerte weichen nicht spürbar von den mittleren Werten ab. Es wird also unterstellt, daß Stützen dann versagen, wenn die Belastung extrem groß wird. Damit wird den Verformungsmomenten Übergewichtiger Einfluß eingeräumt, obwohl Versagen ebenso gut durch ein spürbares Absinken der Betonfestigkeit ausgelöst werden kann.

Um die Verhältnisse in einem Grenzzustand so wirklichkeitsnah wie möglich zu erfassen, ist es daher sinnvoll, als Bemessungswerte jene Realisationen der Variablen auszuwählen, für die Versagen, sofern es eintritt, am wahrscheinlichsten ist (vgl. Abb. 6). Nur dann wird der Einfluß der einzelnen Unsicherheiten auf die Sicherheit der Stütze in bestmöglicher Weise eingeschätzt. Wir suchen also das Maximum der bedingten Dichte der Versagenswahrscheinlichkeit. Die Bemessungswerte N_a^* und M_a^{0*} ergeben sich z.B. als Lösungen der Gleichungen:

$$\frac{\partial f_p(M^0, N)}{\partial M^0} = 0 \quad \frac{\partial f_p(M^0, N)}{\partial N} = 0 \quad (15a, b)$$

worin

$$f_p(M^0, N) = \frac{\partial^2 \left\{ \frac{1}{P_f} \cdot \int_0^N f(N_a) \cdot \left[\int_0^{M^0} f(M_a^0) \cdot F_U(M_a^0 | N_a) dM_a^0 \right] dN_a \right\}}{\partial M^0 \cdot \partial N} \quad (16)$$

die bedingte Dichte der Versagenswahrscheinlichkeit ist. Die Lösungen N_a und M_a^0 können als Fraktilen der Randdichten $f(N_a)$ und $f(M_a)$ gedeutet werden.

Bild 10 veranschaulicht die Ergebnisse einer Rechnung in Form von Höhenschichtlinien der Dichte der Beanspruchung $f(M_a, N)$, der bedingten Dichte der Beanspruchbarkeit $f(M_U | N)$ sowie der Dichte $f_p(M, N)$ am Stützenkopf.

Eine Anwendung dieses Prinzips auf die übrigen Variablen führt zu n Gleichungen vom Typ (15) mit den Lösungen x_i^* , wenn n die Anzahl der berücksichtigten Zufallsvariablen ist.

Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß die Lösungen $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ bei Vorliegen von Normalverteilungen für die Variablen als Fraktilen in der Form

$$x_i^* = \bar{x}_i + \alpha_i \cdot \beta_i \cdot \sigma_i \quad (17)$$

dargestellt werden können. Hierbei ist \bar{x}_i der Erwartungswert, σ_i die Standardabweichung, α_i ein Korrekturfaktor, der eine Funktion der Ableitung des Versagenskriteriums nach der Variablen X_i an der Stelle x_i^* und β_i die standardisierte Variable der Verteilungen zur Wahrscheinlichkeit P_f ist. Zu dem gleichen Ergebnis kommt Paloheimo — allerdings auf anderem Wege /10/.

Das Maximum der bedingten Dichte der Versagenswahrscheinlichkeit ist wenig ausgeprägt, wie auch Abb. 10 veranschaulicht. Eine exakte Bestimmung der α -Werte ist daher nicht notwendig — ein Umstand, der der Normungsarbeit sehr entgegen kommen dürfte.

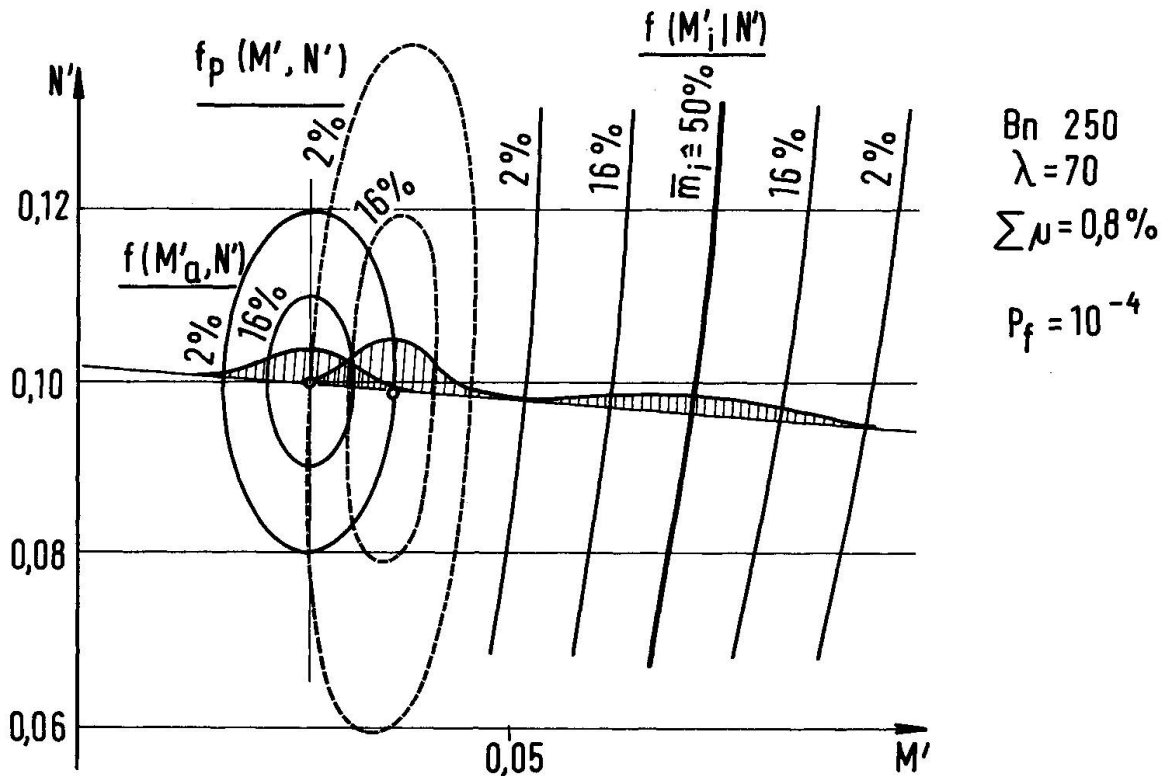


Abb. 10

Natürlich können von (17) ausgehend auch die traditionellen Sicherheitselemente, wie z.B. Teilsicherheitsfaktoren, abgeleitet werden:

$$\gamma_i = \frac{x_{i,c}}{x_i^*} = \frac{\bar{x}_i \pm k \cdot \sigma_i}{\bar{x}_i \pm \alpha_i \cdot \beta_i \cdot \sigma_i} \quad (18)$$

$x_{i,c}$ ist der charakteristische Wert.

5. Numerische Ergebnisse und Folgerungen

Für den betrachteten Knickstab wurden bislang folgende Werte berechnet:

$$\alpha_{M_a}^0 = \alpha_{N_a} \approx 0,3 \text{ bis } 0,5; \alpha_{M_U}^0 \approx 1;$$

Setzt man insbesondere $\alpha_b = \alpha_h = \alpha_{h'} = 0$, eine Maßnahme die aus praktischen Gründen angemessen erscheint, so ergibt sich bei Analyse $\alpha_{M_U}^0$

$$\alpha_{\beta_w} = 0,95 \text{ ./} . 1,0; \alpha_{\beta_s} = 0,9 \text{ ./} . 1,0$$

Ist weiter $\beta = 3,7$ — ein Wert, der im Mittel dem Rechenwert der Versagenswahrscheinlichkeit bei Anwendung der bisher üblichen Bemessungsverfahren entspricht (siehe Abb. 9), ergeben sich in erster Näherung die folgenden Formeln zur Bestimmung der Rechenwerte.

$$\begin{aligned}
 b^* &= E(b); \quad d^* = E(d); \quad h'^* = E(h') \\
 \beta_w^* &\approx E(\beta_w) - 3,7 \cdot \sigma_{\beta_w}; \quad \beta_s^* \approx E(\beta_s) - 3,7 \cdot \sigma_{\beta_s} \\
 N_a^* &\approx E(N_a) + 1,5 \cdot \sigma_{N_a}; \quad M_a^{o*} \approx E(M_a) + 1,5 \cdot \sigma_{M_a}
 \end{aligned}$$

Entsprechend Gl. (18) eingeführte Teilsicherheitsfaktoren werden daraus für die in Tabelle 1 angegebenen Streuungen der Variablen zu

$$\gamma_{\beta_w} = \frac{1}{1,6}; \quad \gamma_{\beta_s} = \frac{1}{1,2}; \quad \gamma_{N_a} = \gamma_{M_a} \approx 1,0$$

berechnet, wobei in Übereinstimmung mit den CEB-Empfehlungen $k = /1,65/$ gesetzt wurde.

Die numerischen Untersuchungen sind noch nicht abgeschlossen, so daß die mitgeteilten Ergebnisse vorerst nur als Anhaltswerte gelten können. Nachstehende Folgerungen lassen sich jedoch bereits jetzt ziehen.

- Globale Sicherheitsbeiwerte, gegebenenfalls im Verein mit vorgeschriebenen zusätzlichen oder Mindestausmitten, vermögen den erforderlichen Abstand zwischen Beanspruchbarkeit und Beanspruchung nicht in allen Bemessungssituationen gleichmäßig gut herzustellen.
- Am zweckmäßigsten scheint eine Festlegung der Bemessungswerte aufgrund des in Abschnitt 4 erläuterten Prinzips entsprechend Gleichung (17) oder die Verwendung partieller Sicherheitsfaktoren in Verbindung mit definierten Nennwerten entsprechend Gl. (18) zu sein.

6. Literaturhinweise

- /1/ KNAPPE, O., RACKWITZ, R.: Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchung der Knicksicherheit von schlanken Stahlbetonstützen, Arbeitsberichte zur Sicherheit von Bauwerken, Laboratorium für den Konstruktiven Ingenieurbau, Techn.Universität München, Heft 4, 1973.
- /2/ KNAPPE, O.: Einführung in die Sicherheit schlanker Stahlbetondruckglieder, HEUNISCH, M.: Bemessung u. Sicherheit von Stahlbetondruckgliedern Deutscher Beton-Verein e.V., Arbeitstagung 1973 in Berlin. "Sicherheit von Betonbauten" - Berichtsband, Wiesbaden, 1973
- /3/ WARNER, R.F.: Physical-Mathematical Models and Theoretical Considerations, IABSE Symposium "Design and Safety of Reinforced Concrete Compression Members", Quebec, Canada, Introductory Report, 1974
- /4/ BULIRSCH, R., STOER, J.: "Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods", Numerische Mathematik 8, 1966.
- /5/ HEINOLD, J., GAEDE, K.: Ingenieurstatistik, Oldenbourg, München, 1968
- /6/ BENJAMIN, J.R., CORNELL, C.A.: Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers, Mc Graw-Hill, New York, 1970.
- /7/ DIN 1045, Beton-und Stahlbeton - Bemessung und Ausführung, 1972
- /8/ CEB/FIP: Internationale Empfehlungen zur Berechnung und Ausführung von Betonbauwerken, Prag, 1970
- /9/ ACI-Standard, Requirements for Reinforced Concrete, 318-71, 1971
- /10/ PALOHEIMO, E.: "Eine Bemessungsmethode, die sich auf variierende Fraktilen gründet", siehe /2/

ZUSAMMENFASSUNG

Die Theorie zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit einer schlanken Stahlbetonstütze wird erläutert. Die numerische Rechnung gelingt durch Einführung von Näherungen für einige Beispiele. Es zeigt sich, dass die derzeitigen Berechnungsverfahren kaum gleichmässige Zuverlässigkeit der Bauteile gewährleisten. Ein Verfahren, "beste" Bemessungswerte aufzusuchen, wird angegeben. Erste numerische Ergebnisse werden mitgeteilt.

SUMMARY

A theory for the computation of failure probabilities for slender reinforced concrete columns is presented. Approximate numerical solutions for some examples are given. It turns out that present design methods cannot guarantee an uniform safety level. A method to evaluate "best" design values is derived and illustrated by some numerical results.

RESUME

On expose une théorie pour le calcul de la probabilité de ruine d'une colonne élancée en béton armé. On procède au calcul numérique pour quelques exemples en introduisant des approximations. On constate que les méthodes de calcul actuelles ne conduisent pas à une sécurité uniforme. On indique un procédé permettant d'obtenir les "meilleures" valeurs de dimensionnement. On communique les premiers résultats numériques.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Zur zuverlässigen Bemessung von Bauteilen mit Hilfe der ersten und zweiten Momente der Zufallsvariablen von Last und Festigkeit

For a Reliable Design of Structural Elements by Means of the First and Second Moments of the Random Variables of Load and Strength

Vers un dimensionnement sûr des éléments de construction à l'aide des premiers et deuxièmes moments des variables statistiques de la charge et de la résistance

Horst SCHÄFER
TH Darmstadt, BRD

1. Einleitung

Aufgabe des Ingenieurs ist es, Bauwerke wirtschaftlich und zuverlässig zu erstellen, so daß sie die ihnen zugeordneten Funktionen erfüllen können und nur mit einer sehr kleinen, akzeptierten Wahrscheinlichkeit versagen. Für den entwerfenden Ingenieur ist der Teil der Versagenswahrscheinlichkeit, der aus den Streuungen der Beanspruchungs- und Beanspruchbarkeitsparameter herrührt, für die Bemessung ausschlaggebend. Wenn auch bisher noch keine befriedigende Philosophie für die Ermittlung von Grenzwerten für die zulässigen Versagenswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von den Versagensfolgen besteht, so sind sich doch alle Beteiligten einig in der Forderung nach gleicher Versagenswahrscheinlichkeit für vergleichbare Bauwerke und Bauteile. Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit als Maß für die Sicherheit einer Konstruktion hat die Schwächen bisheriger Bemessungsverfahren zutage gefördert, und es besteht der dringende Wunsch nach einem praktikablen neuen Bemessungsverfahren, das die Mängel des auf Nennwerten basierenden Verfahrens mit stark schwankenden Versagenswahrscheinlichkeiten vermeidet. Die Standardabweichung σ ist ein brauchbares Maß für die Streuung der Zufallsvariablen. Ist neben dem Mittelwert \bar{x} auch die Standardabweichung σ einer Zufallsvariablen mit einer gewissen Aussagewahrscheinlichkeit bekannt, dann führt die Berücksichtigung dieser zusätzlichen Information, auch wenn die genaue Form der Dichtefunktion der Zufallsvariablen unbekannt ist, zu viel ausgeglicheneren Sicherheiten (Versagenswahrscheinlichkeiten) als wenn man nur mit dem Mittelwert \bar{x} oder einem Fraktilewert x_p rechnet.

Das Bestreben, dimensionslose Größen zu verwenden, führte auf die bevorzugte Verwendung der Variationskoeffizienten $V_S = \sigma_S / \bar{x}_S$ und $V_R = \sigma_R / \bar{x}_R$ der Beanspruchungs- und Beanspruchbarkeitsparameter in den bisher vorgeschlagenen Bemessungsgleichungen, z. B. [1] bis [6]. Dabei wurde zum Teil übersehen oder in Kauf genommen, daß die Variationskoeffizienten der meisten Parameter nicht konstant, sondern eine Funktion des Mittelwertes sind. Aus der Definitionsgleichung des Variationskoeffizienten $V = \sigma / \bar{x}$ erkennt man, daß bei konstantem Variationskoeffizienten V_0 die Standard-

abweichung eine lineare Funktion vom Mittelwert ist, die für kleine Mittelwerte die Streuung der Parameter unterschätzt.

Dies sei am Beispiel der Lastexzentrizität einer Stahlbetonstütze näher erläutert. Erwartet man bei einer Stütze für die Last die Exzentrizität $\bar{e} = 0$, dann bedeutet dies noch nicht, daß die Stütze wirklich mittig belastet wird. In Abhängigkeit von der Streuung der Exzentrizität e , charakterisiert durch die Standardabweichung σ_e , wird die einzelne Stütze in Wirklichkeit mehr oder weniger exzentrisch belastet. Rechnet man mit konstantem Variationskoeffizienten V_{0e} , dann erhält man für $\bar{e} \rightarrow 0$ auch $\sigma_e = V_{0e} \cdot \bar{e} \rightarrow 0$. Die Beanspruchung der Stütze wird unterschätzt. Da schlanke Stützen aber sehr empfindlich gegen exzentrische Beanspruchungen sind, erhält man eine große Schein-Sicherheit [18]. Durch die Vorgabe einer konstanten, ungewollten Exzentrizität e_u wurde das Problem in der deterministischen Sicherheitsanalyse gelöst. Eine stochastische Analyse erfordert jedoch eine Berücksichtigung der streuenden Eigenschaften der Lasten und der Exzentrizität. Bei anderen Parametern wie Lage der Bewehrung, Querschnittsabmessungen und den Festigkeiten von Beton und Stahl liegen die Verhältnisse ähnlich. Deshalb wird nachfolgend ein Vorschlag für eine bessere Erfassung der Streuungen der Parameter unterbreitet.

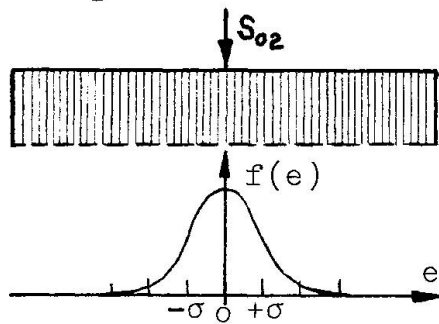


Abb. 1: "Mittig"belastete Stahlbetonstütze

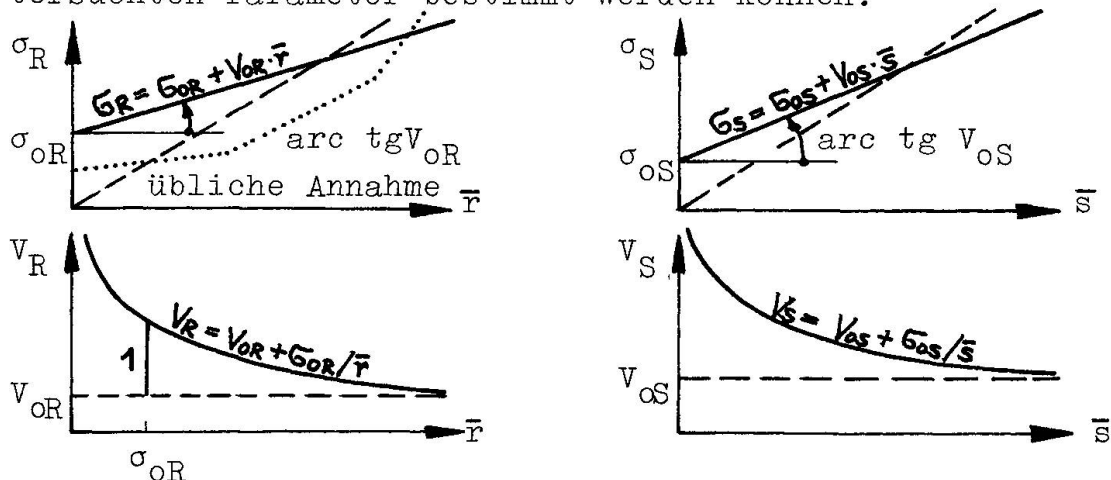
Um die Abhängigkeit der Standardabweichung vom Mittelwert zu erfassen, werden die folgenden linearen Funktionen angenommen mit denen die Streuungen der meisten Parameter ausreichend genau beschrieben werden können:

2. Vorschlag für eine wirklichkeitsnahe Erfassung der Streuungen von Beanspruchungs- und Beanspruchbarkeitsparametern

Um die Abhängigkeit der Standardabweichung vom Mittelwert zu erfassen, werden die folgenden linearen Funktionen angenommen mit denen die Streuungen der meisten Parameter ausreichend genau beschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \text{Festigkeit: } \sigma_R &= \sigma_{0R} + V_{0R} \cdot \bar{r}, & V_R &= V_{0R} + \sigma_{0R}/\bar{r} \\ \text{Last: } \sigma_S &= \sigma_{0S} + V_{0S} \cdot \bar{s}, & V_S &= V_{0S} + \sigma_{0S}/\bar{s} \end{aligned} \quad (1)$$

Darin sind σ_{0R} , V_{0R} , σ_{0S} , V_{0S} konstante Werte, die mit Hilfe der linearen Regressionsanalyse in Abhängigkeit vom Mittelwert der untersuchten Parameter bestimmt werden können.



a) Beanspruchbarkeit (R)

b) Beanspruchung (S)

Abb. 2: Standardabweichung und Variationskoeffizient in Abhängigkeit vom Mittelwert.

Die bei konstanten Variationskoeffizienten V_{OR} , V_{OS} bisher stillschweigend vorausgesetzten Beziehungen sind gestrichelt in Abb. 2 eingetragen. Sollte eine lineare Beziehung nach Gl. (1) bei der Beschreibung der Streuung für einen Einzelparameter einmal nicht ausreichen, dann kann durch eine bereichsweise Linearisierung (punktierter Linienzug in Abb. 2a) eine gute Annäherung erzielt werden. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß die Variationskoeffizienten V_R, V_S für kleine Mittelwerte \bar{r}, \bar{s} über alle Grenzen anwachsen. In diesen Bereichen darf das bei der Ermittlung der Streuung von Funktionen $Z=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ von unkorrelierten Zufallsgrößen X_i aus der TAYLOR-Entwicklung gewonnene GAUSS'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\sigma_Z^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \quad (2)$$

das nur für kleine Werte von $\sigma_x \ll \bar{x}$ oder $\frac{\sigma_x}{\bar{x}} \equiv V_x \ll 1$

(in praxi $\frac{\sigma_x}{\bar{x}} \equiv V_x < 0,3$) gilt, nicht angewendet werden.

2.1 Ermittlung der Standardabweichung σ_{ox} und des Variationskoeffizienten V_{ox} einer Zufallsgröße \bar{x}

Vorausgesetzt wird die Auswertung einer großen Zahl von Zufallsexperimenten (Versuchen), wobei jeweils für einen erwarteten Mittelwert \bar{x} die Standardabweichung σ_x bestimmt worden sei. Trägt man die σ_x über \bar{x} auf (Abb. 3), dann läßt sich meist mit guter Näherung eine Ausgleichsgerade durch diese Punkte zeichnen. Numerisch gewinnt man Schätzwerte für die Regressionskoeffizienten σ_{ox} und V_{ox} mit den Mitteln der linearen Regressionsanalyse (Fehlerquadratminimum, Maximum-Likelihood-Methode), die der Fachliteratur entnommen werden können.

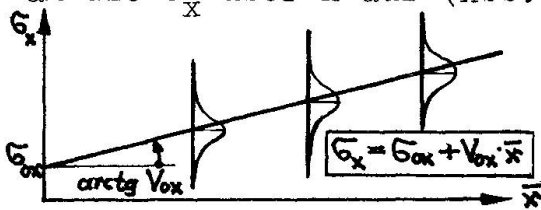


Abb. 3 zur Ermittlung einer Ausgleichsgeraden

Nachfolgend soll versucht werden, die Standardabweichung der für die Stützenbemessung wesentlichen Parameter anzugeben. Hierzu sind weitere Untersuchungen erforderlich.

2.2 Standardabweichung der Last

Während die Streuung des Eigengewichts im allgemeinen vernachlässigbar sein wird, kommt einer richtigen Einschätzung der Streuung der Verkehrslast eine große Bedeutung zu. Größe, Verteilung und Streuung der Verkehrslast ist für die verschiedenen Lastarten sehr verschieden [7]. Ihre Transformation zu den Schnittgrößen, z. B. zum Biegemoment S_1 und zur Normalkraft S_2 exzentrisch belasteter Stützen kann bei linearen Systemen durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden [5]:

$$S_1 = \sum_{i=1}^m a_{1i} \cdot S_{oi}, \quad S_2 = \sum_{i=1}^m a_{2i} \cdot S_{oi} \quad (3)$$

Darin sind die S_{oi} die einzelnen Lasten und die a_{1i}, a_{2i} system- und steifigkeitsabhängige Zufallsgrößen, die aber infolge der dabei durchgeführten Integrationen meist deterministisch angenommen werden können. Da die Lasten oft mehr oder weniger streng korreliert sind, ist die Ermittlung der Streuungen der Schnittgrößen

aufwendig [5]. Die Lasten sind am wenigsten erforscht. Ihrer besseren Erfassung kommt daher eine große Bedeutung zu.

2.3 Standardabweichung der Lastexzentrizität

Die Exzentrizität der Stützenlast setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, der Lastexzentrizität an der Lasteinleitungsstelle und den geometrischen Imperfektionen der Stütze. Der erste Anteil hängt mit den im vorigen Abschnitt besprochenen Problemen zusammen. Der zweite Anteil, bisher ebenfalls wenig untersucht, kann näherungsweise aus den Neigungen der Stützen ermittelt werden. Angaben über Fertigteilstützen finden sich in [8], mit deren Hilfe die in Abb. 4

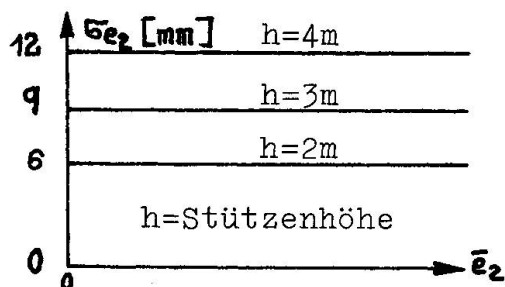


Abb. 4: Geometrische Imperfektionen von Fertigteilstützen

dargestellten Standardabweichungen ermittelt wurden. Die geometrischen Imperfektionen sind unabhängig von \bar{e} . Die Gesamt-Standardabweichung ergibt sich zu $\sigma_e = \sqrt{\sigma_{e1}^2 + \sigma_{e2}^2}$.

Bei Ortbetonstützen ergeben sich wahrscheinlich größere Werte. Die Stahlbetonnorm der BRD schreibt eine ungewollte Exzentrizität $e_u = s_k/300$ (s_k = Abstand der Wendepunkte der Knickbiegeline) vor. Dieser Wert ist sehr gering; er darf aber nicht separat, sondern

muß im Rahmen des gesamten Sicherheitssystems der Norm betrachtet werden. $e_u = 1\text{cm} + 0,03 \cdot d \leq 5\text{cm}$ [18] entspricht der Wirklichkeit wahrscheinlich besser.

2.4 Standardabweichung der Betonfestigkeit

Die Abhängigkeit der Standardabweichung von der Betondruckfestigkeit wurde in [9] für Normalbetone eingehend untersucht. Im interessierenden Festigkeitsbereich kann eine konstante Standardabweichung von $\sigma_{\beta b} \approx 50 \text{ kp/cm}^2$ angenommen werden.

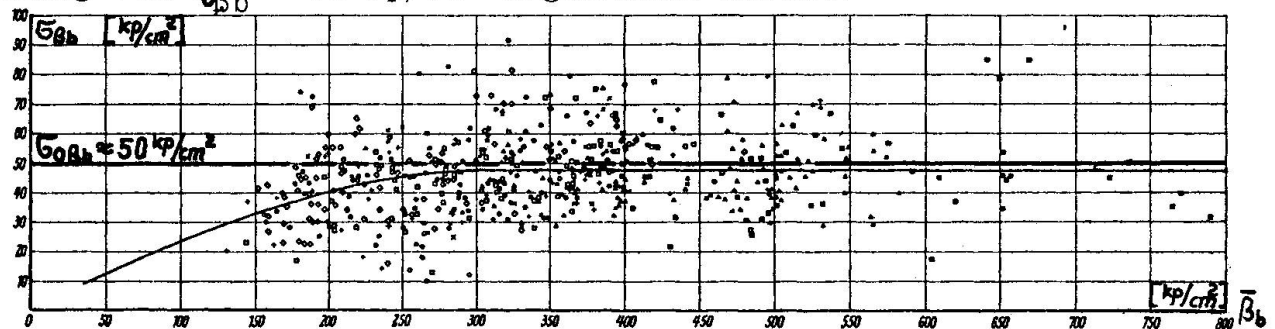


Abb. 5: Standardabweichung der Betondruckfestigkeit

Die Standardabweichung des Betons hängt sehr stark von der Sorgfalt bei der Herstellung, Verdichtung und Nachbehandlung des Betons ab. Aus Abb. 5 erkennt man auch, daß jede Aussage über die zu erwartenden statistischen Kennzahlen nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit möglich ist.

Die Betonzugfestigkeit streut noch stärker als die Druckfestigkeit. In Abb. 6 sind die Standardabweichungen über den Mittelwerten aus 648 unter Laborbedingungen durchgeführten reinen Zugversuchen aufgetragen [10]. Die relativ geringe Zahl erlaubt noch keine endgültigen Schlüsse. Im Gegensatz zur Druckfestigkeit scheint bei der Zugfestigkeit eine lineare Abhängigkeit der Stan-

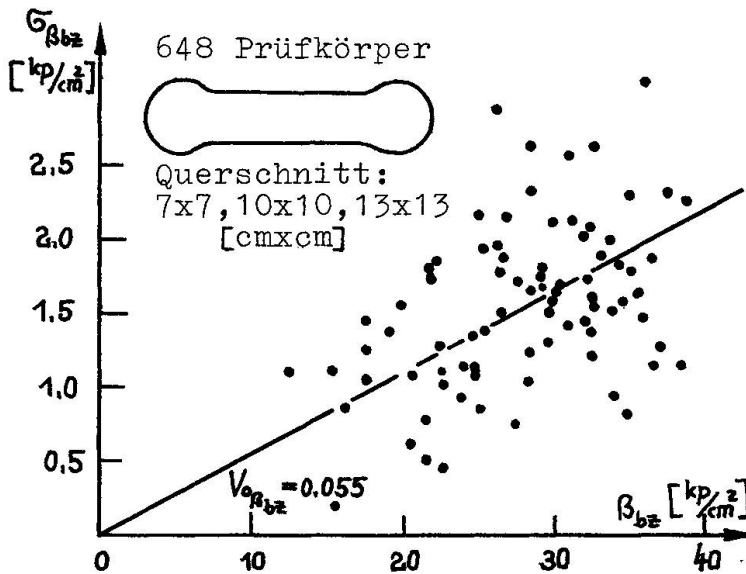


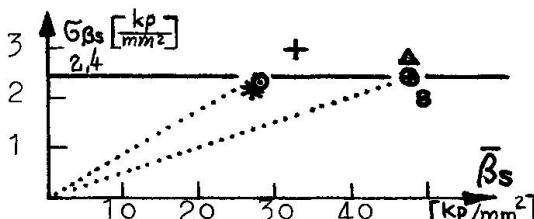
Abb. 6: Standardabweichung der Betonzugfestigkeit (Labor)

dardabweichung vom Mittelwert gegeben zu sein.

2.5 Standardabweichung der Stahlstreckgrenze

Der Stahl kann bei Druckgliedern infolge der geringen Betongrenzstauchung und bei biegebeanspruchten Bauteilen wegen der erforderlichen Begrenzung der Rißweiten meist nur bis zur Streckgrenze ausgenutzt werden. Die Streuung der Streckgrenze ist relativ gut erforscht. Aus Abb. 7 geht hervor, daß die Standardabweichung nur wenig von der Stahlgüte abhängt ($\sigma_{\beta s} \approx 2,4 \text{ kp/mm}^2$). Natürlich kann man für die einzelnen Stahlgüten auch Variationskoeffizienten festlegen und damit rechnen (punktuierte Linien in Abb. 7).

Man erkennt jedoch, daß diese Vorgehensweise nur bei Größen mit diskreten Mittelwerten sinnvoll ist.



Stahl	n	β_s	$\sigma_{\beta s}$	Lit.
St37	4000	28,1	2,34	[11]
BSt42/50		48	2,40	[6]
"		47,3	2,84	[12]
FEE22	1367	28,9	2,37	[13]
Caron	11373	49,6	2,00	[13]
ASTM A7	3124	27,7	2,20	[14]
B.S.785	1050	33,0	3,01	[15]

Abb. 7: Standardabweichung der Stahlstreckgrenze

2.6 Standardabweichung der Querschnittswerte

Die Streuungen der Betonquerschnitte können aus den Streuungen der Querschnittsabmessungen ermittelt werden. An 1068 Fertigteilstützen wurden die in Abb. 8 dargestellten Streuungen der Stützenabmessungen gemessen [8]. Ortbetonstützen dürften erheblich stärker streuende Querschnittsabmessungen besitzen. Die geringen Streuungen der Querschnittsfläche der Bewehrungsstäbe wird man meist vernachlässigen können. Je nach Prüfvorschrift sind sie auch in den Streuungen der Stahlstreckgrenze enthalten.

Bei den Querschnittswerten ist die Lage der Bewehrung im Querschnitt bei biegebeanspruchten Bauteilen von großem Einfluß auf die Traglast. Hierbei muß mit noch größeren Streuungen gerechnet werden, als bei den Querschnittsabmessungen von Ortbetonstützen.

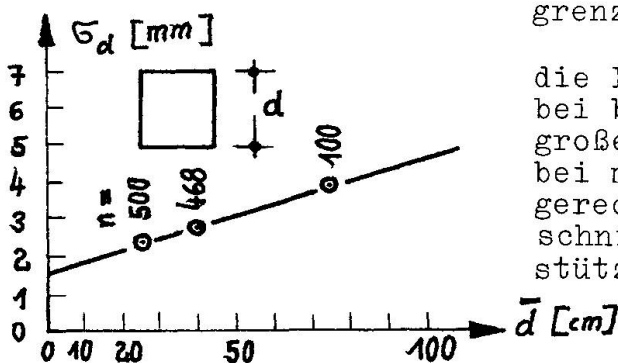


Abb. 8: Standardabweichungen der Querschnittsabmessungen

3. Bemessungsgleichungen für normalverteilte Lasten und Festigkeiten

Für die folgenden Bemessungsgleichungen sei vorausgesetzt, daß die Beanspruchungen und Beanspruchbarkeiten durch jeweils eine eindimensionale, normalverteilte Zufallsgröße ausreichend genau beschrieben werden können. Diese Voraussetzung ist oft nur näherungsweise erfüllt.

Nach [2], [3], erhält man die Versagenswahrscheinlichkeit P_f als Funktion der ersten und zweiten Momente von Beanspruchung und Beanspruchbarkeit

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\bar{z}/\sigma_z} \exp \left[-\xi^2/2 \right] d\xi = \phi(\bar{z}/\sigma_z) = \phi(\beta) \quad (4)$$

mit $\beta = \frac{\bar{z}}{\sigma_z} = \frac{\bar{r} - \bar{s}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$

Bei einer maximal zulässigen Versagenswahrscheinlichkeit von zul. P_f muß $\beta = \beta_{\text{zul}}^{-1}$ (zul. P_f) sein. Die erforderlichen β -Werte können

Abb. 9 entnommen werden. Damit ergibt sich die Bemessung in der Form

$$\bar{r} \geq \bar{s} + \beta \cdot \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (5)$$

Werden die Ansätze für die Standardabweichungen (1) eingesetzt, erhält man

$$\bar{r} \geq \bar{s} + \beta \cdot \sqrt{(\sigma_{oR} + V_{oR} \cdot \bar{r})^2 + (\sigma_{oS} + V_{oS} \cdot \bar{s})^2} \quad (6)$$

Für die Ermittlung der erforderlichen Beanspruchbarkeit \bar{r} ist diese Gleichung ungeeignet, weil \bar{r} links und rechts vom Gleichheitszeichen steht. Das Bemessungsproblem ist auf verschiedenen Wegen lösbar:

a. Geschlossene Lösung

$$\bar{r} \geq \bar{s} \left\{ \frac{1 + \beta^2 V_{oR} \cdot \sigma_{oR} / \bar{s} + \beta \cdot \sqrt{V_{oR} \left[2 \frac{\sigma_{oR}}{\bar{s}} + V_{oR} \left(1 + \beta^2 \frac{\sigma_{oR}^2}{\bar{s}^2} \right) \right] + \left[V_{oS}^2 + 2 V_{oS} \frac{\sigma_{oS}}{\bar{s}} + \left(\frac{\sigma_{oS}}{\bar{s}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{oR}}{\bar{s}} \right)^2 \right] \cdot [1 - \beta^2 V_{oR}^2]}{1 - \beta^2 V_{oR}^2} \right\} \quad (7)$$

b. Iterative Lösung

Man setzt in erster Näherung auf der rechten Seite von Gl. (6) $\bar{r} = \bar{s}$ und ermittelt \bar{r} aus Gl. (6) neu; usw.

c. Näherungslösung

Setzt man $\bar{r} = \bar{s} / (1 - \beta \cdot V_{oR})$ in die Lösung des ersten Iterationsschrittes nach b. und diese in Gleichung (6), dann erhält man als Bemessungsgleichung

$$\bar{r} \geq \bar{s} + \beta \cdot \sqrt{[\sigma_{oR} + V_{oR} (\bar{s} + \beta \cdot \sqrt{(\sigma_{oR} + V_{oR} \bar{s} / (1 - \beta V_{oR}))^2 + (\sigma_{oS} + V_{oS} \bar{s})^2}]^2 + [\sigma_{oS} + V_{oS} \bar{s}]^2} \quad (8)$$

Diese Näherung liefert ausreichend genaue Ergebnisse. Für konstante Standardabweichungen, d. h. $V_{oR} = 0$, $V_{oS} = 0$, erhält man folgende einfache Bemessungsgleichung

$$\bar{r} \geq \bar{s} + \beta \sqrt{\sigma_{oR}^2 + \sigma_{oS}^2} \quad (9)$$

In dieser Form ist die Gleichung invariant gegen Koordinatentransformationen. Hängen die Standardabweichungen linear vom Mittelwert ab und ist $\sigma_{oR} = 0$, $\sigma_{oS} = 0$, dann erhält man die Bemessungsgleichung in der von CORNELL [3] angegebenen Form.

$$\bar{r} \geq \bar{s} \cdot \left\{ \frac{[1 + \beta \sqrt{V_{oR}^2 + V_{oS}^2 - \beta^2 V_{oR}^2 V_{oS}^2}]}{[1 - \beta^2 V_{oR}^2]} \right\} \quad (10)$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer kann als Sicherheitsfaktor gedeutet werden. Diese Schreibweise kommt der Vorstellung entgegen, daß eine Last mit einem konstanten Faktor zu erhöhen sei, um ausreichende Sicherheit zu erhalten. KIRCHNER [16] schlug vor, bei kleinen Mittelwerten die Streuung direkt additiv zu berücksichtigen.

sichtigen, wie es in Gl. (9) zum Ausdruck kommt. Die vorangehenden Beziehungen lassen die Zusammenhänge von additiven oder multiplikativen Sicherheitszuschlägen gut erkennen. Ein Sicherheitssystem mit ausgeglichenen Versagenswahrscheinlichkeiten erfordert eine unterschiedliche Beaufschlagung der streuenden Parameter:

Parameter mit $\sigma_0 \neq 0$, $V_0 = 0$: additiver Zuschlag

Parameter mit $\sigma_0 = 0$, $V_0 \neq 0$: multiplikative Erhöhung

Parameter mit $\sigma_0 \approx V_0 \cdot \bar{x}$: kombinierter Zuschlag

Ein solches System wird für die praktische Anwendung recht kompliziert. Demgegenüber erscheint die direkte Anwendung der Bemessungsgleichungen (5)÷(10) als eine mögliche Alternative. Wenn die Standardabweichungen σ_R und σ_S aus den Streuungen weniger Parameter relativ mühelos ermittelt werden können, kann für eine gegebene Last \bar{S} die erforderliche Beanspruchbarkeit r bestimmt und damit z. B. die Bemessung der Bewehrung vorgenommen werden. Für das anzustrebende Sicherheitssystem ist es von untergeordneter Bedeutung, ob mit Erwartungswerten oder Fraktilwerten gerechnet wird, wenn der Informationsgehalt der verwendeten Größen gleich ist.

4. Ermittlung der Kenngrößen von Beanspruchungen und Beanspruchbarkeiten

Beanspruchung und Beanspruchbarkeit sind meist Funktionen einer großen Zahl von Zufallsvariablen. Wird der Vergleich von Beanspruchung und Beanspruchbarkeit auf der Basis von Spannungsergebnissen der Koordinatenspannungen durchgeführt, dann handelt es sich zudem meist um mehrdimensionale Probleme, deren einfache rechnerische Handhabung nur möglich ist, wenn ihre Reduktion auf ein eindimensionales Problem gelingt [5].

Nachfolgend sollen einige Transformationsgleichungen mitgeteilt werden, die für normalverteilte Zufallsvariable X_i meist streng und für Variable mit anderen Dichtefunktionen näherungsweise gelten.

Summe von Zufallsvariablen X_i : $Z = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i, \quad \sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 \quad (11)$$

Produkt von Zufallsvariablen X_i [17] : $Z = \prod_{i=1}^n X_i$

$$\bar{z} = \prod_{i=1}^n \bar{x}_i, \quad \bar{z}^2 + \sigma_z^2 = \prod_{i=1}^n (\bar{x}_i^2 + \sigma_{x_i}^2) \quad (12)$$

5. Vergleich mit Bemessungsverfahren von BASLER oder CORNELL

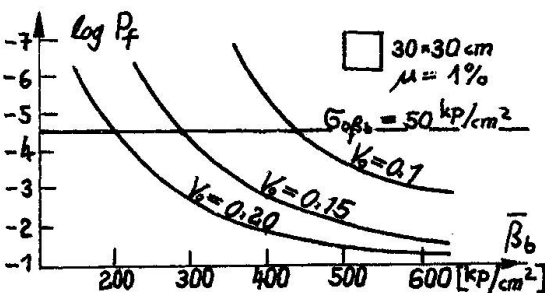


Abb. 10: P_f in Abhängigkeit von der Betongüte

An einem einfachen Beispiel sei ein Vergleich durchgeführt. Eine mittig belastete Stütze wurde mit dem vorgeschlagenen Verfahren Gl. (7) für eine Versagenswahrscheinlichkeit $P_f = 3 \cdot 10^{-5}$ bemessen. Für verschiedene Variationskoeff. V_S , V_R wurde nun die Versagenswahrscheinlichkeit nach [2], [3] ermittelt. Abb. 10 zeigt die starke Abhängigkeit von P_f von der Betongüte bei einer Bemessung mit konstanten Variationskoeffizienten. Natürlich kann man Übereinstimmung erzielen, wenn man die Variationskoeffizienten in Abhängigkeit von der Betongüte festlegt

Literaturverzeichnis

- [1] Freudenthal, A. M.: Safety and the Probability of Structural Failure, Proceedings of ASCE, Separate No. 468, 1954.
- [2] Basler, E.: Untersuchungen über den Sicherheitsbegriff von Bauwerken. Dissertation, ETH, Zürich, 1960.
- [3] Cornell, C. A.: A Probability-Based Structural Code. Journal of the ACI, 1969, S. 974.
- [4] Ang, A. H.-S., Amin, M.: Safety Factors and Probability in Structural Design. Journal of the Struct. Div., Proc. of the ASCE, Vol. 95, 1968, S. 1389.
- [5] Ferry Borges, J., Castanheta, M.: Structural Safety. 2nd edition - Lisbon, 1971.
- [6] König, G., Heunisch, M.: Zur statistischen Sicherheitstheorie im Stahlbetonbau. Berlin, 1972.
- [7] König, G., Marten, K.; Linse, D.; Müller, K. F., Rackwitz, R.; Davenport, G., Zilch, K. in: Sicherheit von Betonbauten, Wiesbaden, 1973.
- [8] Rudersdorf, F. A.: Maßtoleranzen im Bauwesen. betonfertigteilforum 5/72, S. 3
- [9] Rüschi, H., Sell, R., Rackwitz, R.: Statistische Analyse der Betonfestigkeit. DAFStb, H. 206, Berlin, 1969.
- [10] Komloš, K.: Über den Einfluß der Querschnittsfläche auf die Festigkeits- und Verformungseigenschaften des Betons im unmittelbaren Zugversuch. beton, 8/70, S. 345.
- [11] Rüschi, H.: Betrachtungen zur Prüfung der Betonfestigkeit. Beton und Stahlbetonbau 51, 1956, S. 135.
- [12] Jäniche, W.: Werkstoffprüfung im Dienst der Qualitätssicherung und -verbesserung. Berg- und Hüttenmännische Monatshefte, Heft 3, 1968.
- [13] Leclerc, J.: Inventaire des causes possibles de dispersions des caractéristiques exigées pour les produits siderurgiques prêts à l'emploi. In: IVBH Ber. der Arbeitskomm., Vol. 3, London, 1969.
- [14] Tall, L., Alpsten, G. A.: On the Scatter in Yield Strength and Residual Stresses in Steel Members. In: IVBH Symposium, London 1969, Schlußbericht, S. 151 - 163.
- [15] Baker, M. J.: Variations in the Mechanical Properties of Structural Steels. In: IVBH Symposium, London, 1969, Schlußbericht, S. 165 - 174.
- [16] Kirchner, G.: Wo als Sicherheitsmasstab nicht ausreicht. In: Sicherheit von Betonbauten, Wiesbaden, 1973.
- [17] Haugen, E. B.: Probabilistic Approaches To Design. John Wiley & Sons, Inc., London - New York - Sydney, 1968.
- [18] MacGregor, J. G.: Simple Design Procedures for Concrete Columns. IVBH Symposium, Quebec - 1974, Einführungsbericht, Zürich, 1973.

ZUSAMMENFASSUNG

Für eine zuverlässige Bemessung von Bauteilen mit Hilfe der ersten und zweiten Momente der Zufallsvariablen von Last und Festigkeit werden Bemessungsgleichungen angegeben. Die Streuung der Zufallsvariablen wird durch eine lineare Funktion vom Erwartungswert beschrieben. Für einige Parameter werden Streuungen mitgeteilt. Die angegebenen Transformationsgleichungen erlauben die Ermittlung der Momente von Funktionen. Am Beispiel der mit-

tig belasteten Stütze wird eine Vergleichsuntersuchung durchgeführt.

SUMMARY

Design equations are given for a reliable design of structural elements by the means of the first and second moments of the random variables of load and resistance. The standard deviation of the random variable was chosen a linear function of the expected value. For some parameters the standard deviations are given. The presented transformation equations allow the computation of the moments of random functions. A comparison is made by an example of a centrally loaded column.

RESUME

Pour un dimensionnement sûr des éléments de construction à l'aide des premiers et deuxièmes moments des variables statistiques de la charge et de la résistance, on indique des équations de dimensionnement. La dispersion des variables statistiques est écrite par une fonction linéaire à partir de la valeur probable. Pour quelques paramètres, on indique les dispersions. Les équations de transformation indiquées permettent d'obtenir les moments des fonctions statistiques. On effectue un calcul comparatif pour l'exemple d'une colonne soumise à une charge centrée.

Leere Seite
Blank page
Page vide