

Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 16 (1974)

Artikel: Zur einfachen Bemessung schlanker Stahlbetonrahmen

Autor: Irle, Achim / Schäfer, Horst / Schäfer, Horst G.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-15726>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur einfachen Bemessung schlanker Stahlbetonrahmen

Contribution to a Simple Design of Slender Reinforced Concrete Frames

Vers un dimensionnement simple des cadres élancés en béton armé

Achim IRLE Horst SCHÄFER Horst G. SCHÄFER
Technische Hochschule Darmstadt
Darmstadt, BRD

1. EINLEITUNG

Die Traglast schlanker Stahlbetonrahmen läßt sich heute mit numerischen Berechnungsmethoden wirklichkeitsnah ermitteln, [1] bis [9]. Das nichtlineare Werkstoffverhalten von Beton und Stahl und das Aufreißen des Betons in der Zugzone erfordern jedoch einen großen numerischen Aufwand bei der Berechnung der Traglast. Deshalb benötigt der Ingenieur einfache Näherungsverfahren, die zuverlässige und wirtschaftliche Ergebnisse liefern.

In der Praxis steht der Ingenieur oft vor der Aufgabe, ein gewähltes Tragwerk für vorgegebene Lasten zu dimensionieren. Aufgrund seiner Erfahrung hat er i.a. die Betonquerschnittswerte bereits festgelegt, so daß er nur noch die erforderliche Bewehrung zu ermitteln hat. Nach einer überschläglichen Vorbemessung muß er die Tragfähigkeit am verformten System nachweisen. Viele der hierfür entwickelten Methoden scheiden jedoch oft für eine praktische Anwendung aus, weil entweder die erforderlichen Rechenzeiten und damit die Kosten zu hoch sind oder weil ein entsprechend leistungsfähiger Computer nicht zur Verfügung steht. Aus diesem Grunde enthalten die nationalen Normen in der Regel Näherungsvorschläge, vgl. z.B. [11] und [14].

Nachfolgend soll über zwei Näherungsverfahren berichtet werden, das Ersatzstabverfahren (Effective Length Method) und das Ersatzsteifigkeitsverfahren (Effective Stiffness Method). Die Güte der Übereinstimmung mit einer strengen Traglastberechnung auf der Basis der DIN 1045 [10] soll in Vergleichsrechnungen untersucht werden.

2. DAS ERSATZSTABVERFAHREN

2.1 Grundlage des Verfahrens

Mit dem "Ersatzstabverfahren" versucht man bei der Ermittlung der Schnittkräfte die Berechnung des Gesamtsystems nach Theorie II.

Ordnung zu umgehen, indem man einzelne Stäbe mit definierten Stablängen und Lagerungsbedingungen, die "Ersatzstäbe", herausgreift und diese einer strengen Berechnung unterwirft. In die deutschen Berechnungsvorschriften für Stabilitätsfälle im Stahlbau wurde dies auf Vorschlag von CHWALLA für die Traglastermittlung von Stahlkonstruktionen im Jahre 1952 eingeführt. Als "Ersatzstab" wird ein an beiden Enden gelenkig gelagerter Stab bezeichnet, dessen Länge s_K aus dem Vergleich der EULER-Last des Ersatzstabes mit der Verzweigungslast des idealisierten Gesamtsystems ermittelt wird. Im Prinzip war das Ersatzstabverfahren bereits in der alten deutschen Stahlbetonnorm des Jahres 1942 enthalten. Die Ersatzstäbe wurden damals für ω -fache Lasten nachgewiesen, wobei die ω -Werte in Abhängigkeit von der Schlankheit in Versuchen ermittelt worden waren.

Im folgenden soll kurz das Ersatzstabverfahren beschrieben werden, wie es nach der deutschen Stahlbetonnorm des Jahres 1972, DIN 1045 [10], zugelassen ist. Es basiert weitgehend auf den Empfehlungen von KORDINA [11].

2.2 Das "Ersatzstabverfahren" in der deutschen Stahlbetonnorm

Die deutsche Stahlbetonnorm fordert eine genauere Untersuchung von Stahlbetondruckgliedern mit einer Schlankheit $\lambda = s_K/i > 70$. Dafür werden zwei Verfahren vorgeschlagen:

- Eine Traglastuntersuchung am Gesamtsystem unter 1.75-fachen Gebrauchslasten nach der Theorie II. Ordnung mit wirklichkeitsnahen Steifigkeiten.
- Eine Näherungsberechnung mit Hilfe des "Ersatzstabverfahrens".

Das "Ersatzstabverfahren" erfordert drei Berechnungsschritte:

Im ersten Schritt wird die Länge des Ersatzstabes ermittelt. Sie ergibt sich bei unverschieblichen Systemen als Abstand der Wendepunkte der Knickbiegeline, bei verschieblichen aus dem Vergleich der zur Verzweigungslast des Gesamtsystems gehörenden Stabnormalkraft mit der EULER-Last des untersuchten Stabes. Dabei wird angenommen, daß die Lasten in den Knoten angreifen und die Stäbe ideal gerade sind. Für deren Steifigkeit können die reinen Betonquerschnittswerte angesetzt und als E-Modul kann der Anfangsmodul des Betons verwendet werden.

Im zweiten Schritt werden die Schnittkräfte nach der Theorie I. Ordnung ermittelt. Dabei wird ebenfalls ein linear-elastisches Verhalten der Struktur vorausgesetzt. Die Exzentrizität der Normalkraft wird in den einzelnen Stäben aus dem größten, im mittleren Drittel der Knickbiegeline ermittelten Biegemoment berechnet ($e = \max M/N$) und dann für die Ersatzstäbe als konstant angenommen.

Im dritten Schritt wird der Ersatzstab losgelöst vom Gesamtsystem nach der Theorie II. Ordnung berechnet. Dabei wird eine Verformung des Systems oder eine ungewollte Exzentrizität von $e_u = s_K/300$ berücksichtigt. Für die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen werden die auch für die Ermittlung der Bruchschnittgrößen maßgebenden Verläufe entsprechend Abb. 1 vorausgesetzt. Hierdurch wird eine zusätzliche Sicherheit eingebaut, die durch die erhöhte Ausnutzung der Stützen gegenüber der alten Vorschrift angebracht erschien.

Betonzugspannungen werden nicht berücksichtigt. Die Ergebnisse der Berechnung der Ersatzstäbe wurden für die praktische Anwendung in Nomogrammen aufbereitet [11]. Diese gestatten eine schnelle Ermittlung der erforderlichen Bewehrung.

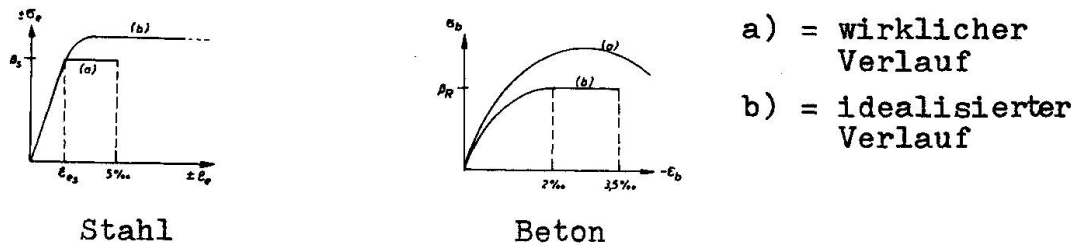


Abb. 1 Werkstoffgesetze für Stahl und Beton

2.3 Systematische Überprüfung der Güte des Ersatzstabverfahrens

2.3.1 Klassische Form des Ersatzstabverfahrens

Zur systematischen Überprüfung der Güte eines Näherungsverfahrens muß die Zahl der Parameter überschaubar bleiben. Es ist deshalb erforderlich, ein möglichst einfaches System zu wählen, an dem jedoch alle Eigenschaften eines komplexen Tragwerks simuliert werden können. Es wurde deshalb ein Einfeldstab gewählt, der an den Enden elastisch gelagert ist und exzentrisch angreifende Normalkräfte aufweist (Abb. 2).

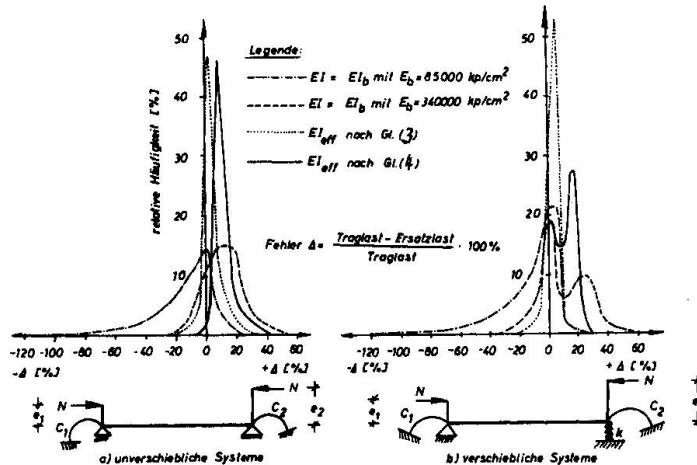


Abb. 2 Fehlercharakteristik des Ersatzstabverfahrens

Für je 1800 verschiebliche und unverschiebliche repräsentative Einfeldstäbe wurden bei systematisch variierten Exzentrizitäten, Bewehrungsverhältnissen ($\mu = \mu' = 0,4\% \div 4,5\%$) und Federsteifigkeiten ($c = 0 \div \infty$) Traglasten nach dem Ersatzstabverfahren berechnet und mit der strengen Lösung nach einem in [6] beschriebenen Verfahren verglichen. Die relative Häufigkeit der prozentualen Abweichungen der Näherungslösungen von der strengen Lösung ist in Abb. 2 für verschiebliche und unverschiebliche Systeme aufgetragen. Negative Abweichungen zeigen eine zu geringe Sicherheit an.

Für die Steifigkeit EI des Einfeldstabes wurde bei der Ermittlung der Knicklänge und bei der Verteilung des Stabendmomentes auf Stab und Feder zunächst mit linear-elastischen Werten $EI = E_b I_b$ gerechnet, wobei nacheinander für $E_b = 85.000/170.000/350.000 \text{ kg/cm}^2$ angesetzt wurde. Wie Abb. 2 zeigt, sind die Fehlercharakteristiken unbefriedigend, weil insbesondere die Abweichungen zur unsicheren Seite hin zu groß sind.

Es war zu vermuten, daß die Hauptfehlerquelle im Ansatz falscher Stabsteifigkeiten liegt. Im folgenden soll daher die Untersuchung auf die Verwendung "effektiver Steifigkeiten" ausgedehnt werden.

2.3.2 Verwendung effektiver Steifigkeiten beim Ersatzstabverfahren

Für die Anwendung "effektiver Steifigkeiten" EI_{eff} gibt es eine Reihe von Vorschlägen, von denen hier genannt seien:

ACI BUILDING CODE [15] (für Kurzzeitlast)

$$EI_{\text{eff}} = E_b I_b \left(0.2 + \frac{E_e I_e}{E_b I_b} \right) \quad (1)$$

KORDINA/QUAST [11]

$$EI_{\text{eff}} = E_b I_b [0.2 + 15 (\mu + \mu')] \quad (2)$$

Gl. (2) ist mit Gl. (1) im wesentlichen identisch. Diese wurde als Ergebnis von ca. 100 Vergleichsrechnungen aus Momenten-Krümmungs-Beziehungen gewonnen und an einer Reihe von Beispielen überprüft [14].

JANKÓ [7]

$$EI_{\text{eff}} = E_b I_b [0.6 - 2 \cdot (\bar{n} - 0.5)^2 + (1 - 0.25 \cdot \bar{n}^2) \cdot (\bar{\mu}_{\text{ges}} - 0.05)] \quad (3)$$

$$\text{mit } \bar{n} = \frac{N}{b \cdot d \cdot \beta_R} \cdot \frac{1}{(1 + \bar{\mu}_{\text{ges}})} ; \quad \bar{\mu}_{\text{ges}} = \frac{\sum F_e}{b \cdot d} \cdot \frac{\beta_s}{\beta_R}$$

Gl. (3) wurde von JANKÓ an einem beidseits gelenkig gelagerten Stab unter der Wirkung einer exzentrisch wirkenden Normalkraft und eines einseitig angreifenden Bruchmomentes aus der Bedingung gleicher Randverdrehung von Ersatzstab und wirklichem Stab abgeleitet.

IRLE [9]

$$EI_{\text{eff}} = E_b I_b [a + b (\mu + \mu')] \quad (4)$$

IRLE erweitert die Gl. (1) von KORDINA/QUAST, indem er anstelle von konstanten Größen a und b veränderliche einführt. Zu deren Bestimmung wird eine Ersatzsteifigkeit EI_{eff} so festgelegt, daß der Stab mit der konstanten Ersatzsteifigkeit und ein Stahlbetonstab mit konstanter Endausmitte unter der zur Traglast gehörenden Momentenfläche die gleiche Durchbiegung in Feldmitte aufweisen.

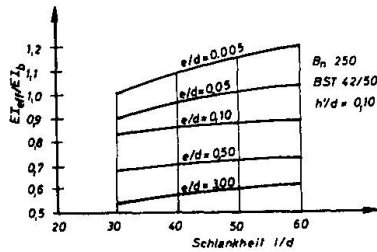


Abb. 3 Ersatzsteifigkeit in Abhängigkeit von Schlankheit und Ausmitte

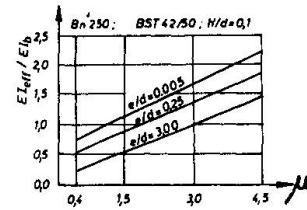


Abb. 4 Ersatzsteifigkeit in Abhängigkeit von Bewehrungsgrad und Ausmitte

Der Einfluß der Schlankheit kann in erster Näherung vernachlässigt werden (Abb. 3). Für eine mittlere Schlankheit $e/d = 40$ läßt sich stellvertretend für alle Werte e/d die Ersatzsteifigkeit als Geradenschar gemäß Gl. (4) beschreiben (Abb. 4). Die Parameter a und b kann man nun in Abhängigkeit vom Verhältnis h'/d , der Beton- und Stahlgüte ein für alle mal bestimmen. Für Werkstoffe der deutschen Stahlbetonnorm DIN 1045 [10] erhält man z.B. die in der Abb. 5 dargestellten Werte.

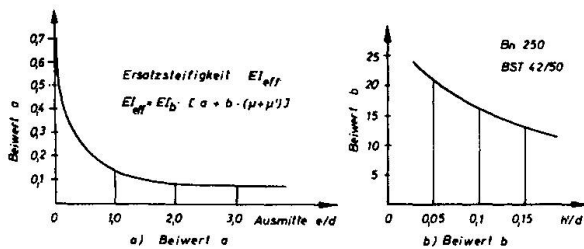


Abb. 5 Beiwerte zur Berechnung der Ersatzsteifigkeit EI_{eff}

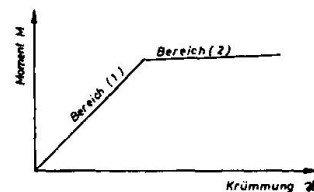


Abb. 6 Momenten-Krümmungs-Zusammenhang für normalkraftfreie Stäbe

Für die normalkraftarmen Rahmenriegel verwendet IRLE [9] nur den nahezu linearen Ast des Biegemomenten-Krümmungs-Zusammenhanges eines normalkraftfreien Stabes (Abb. 6). Linearisiert man den Bereich (1), so erhält man für die Verdrehsteifigkeit den in Abb. 7 angegebenen Zusammenhang für eine häufig vorkommende Werkstoffkombination gemäß DIN 1045 [10].

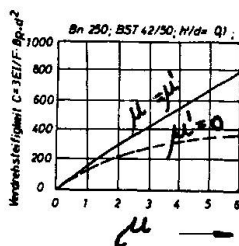


Abb. 7 Verdrehsteifigkeit normalkraftfreier Stäbe

Die Verwendung effektiver Steifigkeiten beim Ersatzstabverfahren führt i.a. zu wesentlich besseren Ergebnissen. Gl. (1) und (2) wurden jedoch nach ca. 50 Tastrechnungen nicht weiter ausgetestet, weil in Grenzfällen Abweichungen von über 100 % aufgetreten waren und sie gegenüber dem Ansatz hoher E_b -Werte keine Verbesserung ergaben. Die Anwendung von Gl. (3) führt – wie Abb. 2 zeigt – im

Mittel zu geringen Abweichungen. Bedenklich ist lediglich, daß die Abweichungen z.T. auf der unsicheren Seite liegen, insbesondere dann, wenn für den Traglastnachweis des Standardstabes auf die Tafeln von KASPAREK/HAILER [12] zurückgegriffen wird, mit denen verschränkte Exzentrizitäten berücksichtigt werden können. Die Verwendung von Gl. (4) führt im Vergleich zu Gl. (3) zu etwas größeren Abweichungen, die jedoch durchweg auf der sicheren Seite liegen; die Übereinstimmung mit der strengen Rechnung wird im Gegensatz zu Gl. (3) durch die Verwendung der Tafeln KASPAREK/HAILER [12] noch besser. In der Abb. 2 sind in beiden Fällen nur die Abweichungen dargestellt, die sich auf der Basis des "klassischen" Standardstabes mit konstanten Exzentrizitäten ergaben.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß das Ersatzstabverfahren bei statisch bestimmten Systemen gute Ergebnisse liefert. Bei statisch unbestimmten Systemen ist es immer dann brauchbar, wenn man die effektiven Stabsteifigkeiten und die Knicklängen gut abschätzt. Die Ermittlung der Knicklängen in komplexeren Systemen ist jedoch i.a. sehr aufwendig; es erhebt sich daher die Frage, ob es nicht sinnvoller ist, in solchen Fällen das Ersatzstabverfahren durch eine direkte Berechnung des Systems nach Theorie II. Ordnung unter Benutzung der bereits genannten "effektiven Steifigkeiten" zu ersetzen.

3. DAS ERSATZSTEIFIGKEITSVERFAHREN

Da die Berechnung von Rahmen mit linear-elastischem Werkstoffgesetz nach der Theorie II. Ordnung auch von mittelgroßen Rechenanlagen gut bewältigt wird, bietet es sich an, mit einer effektiven Ersatzsteifigkeit EI_{eff} , die über die Länge eines ganzen Rahmensegments konstant ist, in herkömmliche Rechenverfahren einzugehen. Der Rechengang läuft dann nach folgendem Schema ab:

- (a) Ermittlung der Schnittkräfte eines Rahmens nach der Theorie II. Ordnung unter Annahme reiner Betonsteifigkeiten EI_b (elastische Rechnung).
- (b) Bemessung des Rahmens für die Schnittkräfte nach (a).
- (c) Berechnung von wirksamen Steifigkeiten EI_{eff} .
- (d) Ermittlung der Schnittkräfte nach der Theorie II. Ordnung unter Annahme wirksamer Stabsteifigkeiten EI_{eff} .
- (e) Überprüfung der Bewehrung nach (b); falls erforderlich, iterative Verbesserung nach (d).

Konvergenz ist gegeben, wenn in zwei aufeinanderfolgenden Schritten die Schnittkräfte genügend genau übereinstimmen.

Die systematische Überprüfung der Brauchbarkeit analog zu Abschnitt 2 war zur Zeit der Drucklegung (März 1970) noch nicht abgeschlossen. Alle bisher durchgerechneten Beispiele unter Verwendung von Gl. (4) zeigten jedoch gute Ergebnisse. Es ist zu vermuten, daß dies bei verschieblichen Systemen auch auf Gl. (3) zutrifft.

Im gewählten Zahlenbeispiel (Abb. 8) wurden zunächst die Schnittkräfte unter 1.75-fachen Lasten mit $EI = EI_b$ nach der Theorie II. Ordnung ermittelt. Damit wurde dann eine Bemessung durchgeführt und das Tragwerk mit verschiedenen Ersatzsteifigkeiten neu

berechnet. Nach jedem Schritt wurde die Bewehrung den veränderten Schnittgrößen angepaßt bis diese sich in zwei aufeinanderfolgenden Schritten nicht mehr wesentlich änderten. Dies war bereits im dritten Schritt der Fall.

Die anschließende strenge Traglastrechnung ergab mit EI_{eff} nach Gl. (4) eine Tragwerksicherheit $\gamma = 1.82$, die damit nur geringfügig über dem geforderten Wert $\gamma = 1.75$ liegt. Das Ersatzstabverfahren lieferte $\gamma = 2.05$, im vorliegenden Falle einen auf der sicheren Seite liegenden Wert. Das Ersatzsteifigkeitsverfahren hat sich in allen bisher behandelten Fällen ähnlich gut bewährt.

LITERATUR:

- [1] Breen, J.E.: The Restrained Long Concrete Column as a Part of a Rectangular Frame. Diss., Austin, Texas, 1962.
- [2] Cranston, W.B.: A Computer Method for Inelastic Analysis of Plane Frames. Techn. Report, Cement and Concrete Association, London, 1965, TRA 402.
- [3] Chang, W.F.: Inelastic Buckling and Sidesway of Concrete Frames. ASCE Proceedings, Vol. 193, 4/1967, S. 287-299.
- [4] Bubenheim, H.-J.: Ein Beitrag zur Berechnung von Rahmensystemen mit nichtlinear-elastischem Werkstoffgesetz. Diss. D. 17, TH Darmstadt, 1969.
- [5] Beck, H., Bubenheim, H.-J.: Ein Verfahren zur optimalen Bemessung ebener Stahlbetonrahmen. DER BAUINGENIEUR, 6/1972, S. 194-200.
- [6] Schäfer, H., Irle, A., Hasse, E.: Die Berechnung stabförmiger Stahlbetonbauteile nach dem Reduktionsverfahren mit Berücksichtigung eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens Beton- und Stahlbetonbau, 7/1972, S. 154-159.
- [7] Jankó, B.: Zum Trag- und Verformungsverhalten ebener Stockwerkrahmen aus Stahlbeton. Diss., TU Braunschweig, 1972.
- [8] Aas-Jakobsen et al.: CEB, Bulletin d'information, Nr. 93, 1973.
- [9] Irle, A.: Zum vereinfachten Stabilitätsnachweis ebener Stahlbetonrahmen. Diss., TH Darmstadt, voraussichtlich 1974.
- [10] DIN 1045: Beton- und Stahlbetonbau, Bemessung und Ausführung. Ausgabe Januar 1972, Beuth-Vertrieb GmbH, Berlin und Köln, 1972.
- [11] Kordina, K., Quast, U.: Bemessung von schlanken Bauteilen - Knicksicherheitsnachweis. In: Beton-Kalender 1974, Verlag Wilh. Ernst & Sohn, Berlin, 1974, S. 593-708 und in: Bemessung von Beton- und Stahlbetonbauteilen. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 220, Berlin, 1972.
- [12] Kasperek, K.-H., Hailer, W.: Nachweis- und Bemessungsverfahren zum Stabilitätsnachweis nach der neuen DIN 1045. Werner-Verlag, Düsseldorf, 1973.
- [13] Parme, A.L.: Capacity of Restrained Excentrically Loaded Long Columns. Symposium on Reinforced Concrete Columns, ACI Public. SP-13, Detroit, 1966.
- [14] Mac Gregor, J., Breen, J.E., Pfrang, E.O.: Design of Slender Concrete Columns. ACI-Journal, Januar 1970, S.6-28.
- [15] ACI-Standard 318-71. Building Code Requirements for Reinforced Concrete. Detroit, Michigan 1971.

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden zwei einfache Näherungsverfahren zum Traglastnachweis schlanker Stahlbetonrahmen beschrieben: das "Ersatzstabverfahren" und das "Ersatzsteifigkeitsverfahren". Das Ersatzstabverfahren wird in umfangreichen Serienrechnungen in einigen Varianten ausgetestet. Es ist bei statisch unbestimmten Systemen i.a. nur unter Verwendung "effektiver Steifigkeiten" brauchbar. Beim "Ersatzsteifigkeitsverfahren" wird vorgeschlagen, den Traglastnachweis mit stabweise konstanten "effektiven Steifigkeiten" unter Benutzung herkömmlicher Computer-Programme zu führen.

SUMMARY

Two simple approximation methods for the ultimate limit state analysis of slender reinforced frames are described: the "Effective-Length-Method" (ELM), and the "Effective-Stiffness-Method" (ESM). The ELM is checked in numerous series computations. For statically indetermined systems it is only usable by applying "effective stiffnesses". For the ESM it is suggested to check the ultimate limit state with "effective stiffnesses" using conventional computer programs.

RESUME

On décrit deux méthodes simples d'approximation pour déterminer la charge ultime des cadres élancés en béton armé: le procédé des "barres équivalentes" et le procédé des "rigidités équivalentes". Le procédé des barres équivalentes est contrôlé par de nombreux calculs pour quelques variantes; dans le cas de systèmes hyperstatiques, il n'est utilisable qu'en employant les "rigidités effectives". Pour le procédé des rigidités équivalentes, on propose d'effectuer le calcul de la charge ultime avec des programmes courants d'ordinateur en admettant des "rigidités effectives" constantes pour chaque barre.

Leere Seite
Blank page
Page vide