Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des

commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 16 (1974)

Artikel: Stabilität von Stahlbetonstützen und Stahlbetonrahmen

Autor: Oberndorfer, Wolfgang J. / Fischer, Dieter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15723

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Stabilität von Stahlbetonstützen und Stahlbetonrahmen

Stability of Reinforced Concrete Columns and Frames
Stabilité des colonnes et des cadres en béton armé

Wolfgang J. OBERNDORFER
Dipl.-Ing., Dr., M.S.
Firma Ing. Mayreder, Kraus & Co
Linz, Oesterreich

Dieter FISCHER
Koautor, Dipl.-Ing., Dr.
Linz, Oesterreich

1. Einleitung

Der Stabilitätsnachweis für außermittig gedrückte Stahlbetondruckglieder wird unter anderem nach den Vorschriften der einschlägigen Normen in den einzelnen Ländern geführt. In der Regel wird dabei das Verfahren der Ausweichzahlen ω_{kr} vorgeschrieben. Dieses Vefahren ist aber äußerst unbefriedigend, weil das tatsächliche Verhalten des Betondruckgliedes nicht in die Rechnung eingeht. Das Verformungsverhalten des Stahlbetons wird nicht richtig wiedergegeben. Der Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für den Ausdruck für die Krümmung bei der Ableitung der Differentialgleichung steht bekanntlich entgegen:

- die beschränkte Zugfähigkeit des Betons
- die nichtlineare Arbeitslinie des Betons
- die elastoplastische Arbeitslinie des Bewehrungsstahles
- die Abhängigkeit der Krümmung vom Bewehrungsgehalt

Im folgenden Beitrag wird nun ein programmiertes Verfahren gebracht, das unter Berücksichtigung aller dieser Eigenarten von Stahlbetonquerschnitten den Nachweis der Stabilität von beliebig gelagerten und belasteten Stahlbetonstützen mit gleichzeitiger Ermittlung der erforderlichen Bewehrung ermöglicht.

2. Das Rechenverfahren und die getroffenen Annahmen

2.1. Grundsätzliches

Das nachstehend beschriebene Verfahren beruht auf der numerischen Lösung der Integraldarstellung der Gleichgewichtsbedingungen einer beliebig gelagerten und belasteten Stütze unter Verwendung einer wirklichkeitsnahen Momenten-Krümmungsbeziehung. Die Verformungen werden als klein angenommen, die Schubverformung wird nicht berück-

sichtigt und es wird drillfreie Biegung in einer Ebene vorausgesetzt. Die Steifigkeit der Stütze kann beliebig variieren (Abb. 1).

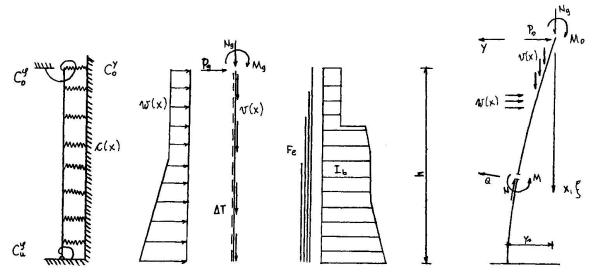


Abb.1: Art der Lagerung, Art der Belastung und Verteilung des Bewehrungsstahles und der Betonträgheitsmomente des Stabmodelles

Abb.2: Schnittkräfte und Koordinationssystem

2.2. Ausgangsgleichungen und Lösungsverfahren

Es existieren die 2 Gleichgewichtsbedingungen (Abb.2):

$$N(x) = \int_{0}^{x} v(\xi) d\xi + N_{5} - y' \cdot \{P_{0} + \int_{0}^{x} [w(\xi) - \kappa(\xi) \cdot (y_{0} - y(\xi))] d\xi\}$$

$$M(x) = M_{0} + P_{0} \cdot x + N_{5} \cdot y + \int_{0}^{x} (x - \xi) \cdot \{w(\xi) - \kappa(\xi) \cdot [y_{0} - y(\xi)]\} d\xi + \int_{0}^{x} w(\xi) \cdot [y(x) - y(\xi)] d\xi$$

$$+ \int_{0}^{x} w(\xi) \cdot [y(x) - y(\xi)] d\xi$$
(2)

und die allgemeine Momenten-Krümmungsbeziehung:

$$y'' = f(M(x),N(x)) = \psi(x)$$
 (3)

Die Randbedingungen lauten:

$$x=0: y=0$$
 $x=h: Mu = Cu'. yu'$
 $P_0 = P_g - Co'. yo'$ (4)
 $M_0 = M_g - C_0'. yo'$

Über die Überführung dieser Gleichungen in ein Differenzenschema mit weitgehender Integraldarstellung wird auf [7] verwiesen.

2.3. Die Krümmungs-Momentenbeziehung

An Stelle der bekannten Beziehung

$$y'' \neq \rho = -M/EI \tag{5}$$

bei Materialien mit linearem Elastizitätsgesetz tritt in diesem Falle die Funktion

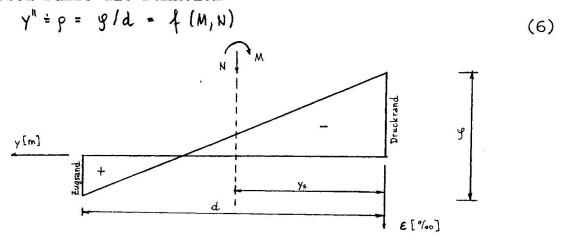


Abb.3: Schnittkräfte und Verteilung der Dehnung über dem Querschnitt

Das hier beschriebene Verfahren erfordert die Aufteilung der geometrischen Form in lauter Trapeze (Abb.4).

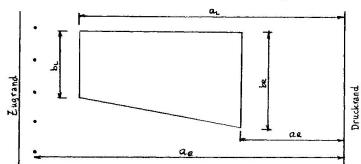


Abb.4: Örtliche Koordinaten eines Teiltrapezes

Für jedes Teiltrapez kann nun die Normalkraft und das Moment um den Druckrand wie folgt berechnet werden:

$$N_b = \int_{a_R}^{a_L} \sigma_b \cdot b(y) dy , \quad M_b = -\int_{a_R}^{a_L} \sigma_b \cdot b(y) \cdot y dy , \qquad (7)$$

worin

$$b(y) = b_R + \frac{b_R - b_L}{a_R - a_L} \cdot (y - a_R)$$
 ist. (8)

Für die Betonarbeitslinie wird nun der Ansatz so gemacht, daß den CEB-Empfehlungen [4] entsprochen werden kann:

$$\sigma_b = \sigma_p \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot (2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}) \quad \text{for} \quad 0 \ge \varepsilon \ge \varepsilon_1$$
 (9)

$$\delta_b = \delta_p \qquad \qquad \text{fur} \quad \xi_1 \geqslant \xi \geqslant \xi_2 \,. \tag{10}$$

Für ε_1 = -2 o/oo, ε_2 = -3,5 o/oo und ε_P = 0,8 x Rechenwert für die Betondruckfestigkeit folgt das Parabel-Rechteck-Diagramm; für ε_A = ε_2 $\varepsilon_{b_{max}}$ und ε_P = Rechenwert für die Betondruckfestigkeit folgt das Parabel-Diagramm. In ähnlicher Weise wird für den Bewehrungsstahl angesetzt:

mit
$$\epsilon_e = \alpha \cdot \epsilon(y)^2 + \beta \cdot \epsilon(y) + \gamma$$
. (12)

Durch geeignete Wahl von α,β und γ läßt sich abschnittsweise eine ausreichend genaue Anpassung an jede Stahlarbeitslinie finden. (Abb.5)

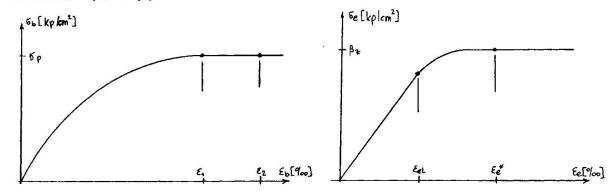


Abb.5: Arbeitslinien von Beton und Stahl

Nach Summierung der Normalkräfte und Momente über alle Teiltrapeze und Stahleinlagen und nach Gleichsetzung dieser Werte den äußeren Schnittkräften werden 2 quadratische Gleichungen mit den 2 Unbekannten g und & erhalten. Elimination von & liefert eine Gleichung 4. Grades für g von der Form:

$$f_0 g^4 + f_1 g^3 + f_2 g^2 + f_3 g + f_4 = 0$$
 (13)

Bei der Auswahl der maßgebenden Lösung aus den vier Ergebnissen wird wie folgt vorgegangen: bei gegebenem negativen Vorzeichen der Schnittkräfte M und N muß & positiv sein (Abb.3). Die Lösungskurven können daher nur die in Abb. 6 gezeigten Formen annehmen.

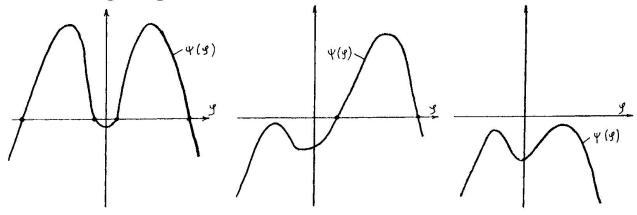
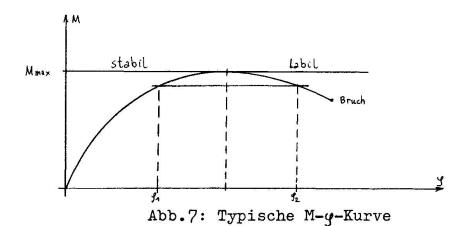


Abb.6: Varianten der Nullstellen von w (y)

Wenn nur die zu stabilen inneren Spannungszuständen gehörigen Verdrehungen gesucht werden - wenn man daher in der Kurve, wie eine solche in Abb. 7 typisch dargestellt wurde,



nur den Bereich bis zum Maximum verfolgt -, ist die kleinere der beiden positiven Lösungen die gesuchte. Tritt einmal
die in Abb. 8 ersichtliche dritte Variante der Lösung auf,
so bedeutet dies, daß kein Gleichgewicht zwischen den äußeren Schnittkräften und dem Integral der inneren Spannungen
mehr möglich ist. Das Verfahren wurde nun derart programmiert, daß die Bewehrungsflächen solange vergrößert werden,
bis ein Gleichgewicht im Querschnitt möglich ist.

Das Vergrößern der Bewehrungsfläche wird mit einer eingegebenen Schrittweite η in Prozenten des Anfangswertes für die Bewehrung vorgenommen. Allgemein gilt, daß die erforderliche Stahlbewehrung umso genauer ermittelt wird, je kleiner die Schrittweite η gewählt wird. Andererseits sinkt mit der Vergrößerung der Schrittweite natürlich die Rechenzeit und man liegt außerdem auf der sicheren Seite (Abb.8).

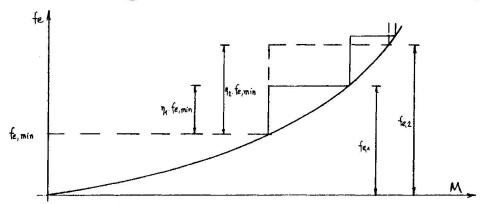


Abb.8: Zusammenhang Schrittweite - theoretisch erforderliche Bewehrung

3. EDV-Programm

Zur numerischen Durchrechnung einer Stahlbetonstütze

wurde ein Rechenprogramm in FORTRAN erstellt. Die Eingabe wurde so gestaltet, daß hinsichtlich der Sicherheitsphilosophie und hinsichtlich der Generierung von zusätzlichen Verformungen zufolge Kriechen, Fundamentschiefstellung und ungewollter Exzentrizität der Normalkraft voll der DIN [5] entsprochen werden kann.

In umfangreichen Vergleichsrechnungen wurden die Ergebnisse des Iterationsalgorithmus, der Bemessungsroutine und der endgültigen Verformungsberechnung mit in der Literatur bekannten Ergebnissen auf Übereinstimmung verglichen.

4. Stabilität von Stahlbetonrahmen

Das eben beschriebene Verfahren zur Untersuchung der Stabilität von Stahlbetonstützen läßt sich erweitern zur Untersuchung der Stabilität von eingeschossigen Rahmen. Die Vorgangsweise beruht darauf, daß für einen vorgegebenen Lastzustand

$$P = \sum_{i} Y_{i} P_{i}$$
 (14)

(Summe aller mit den Sicherheitsfaktoren vervielfachten Lastfällen) die Kopfverschiebungen der Rahmenstützen kompatibel gemacht werden. Die Einspannung der Rahmenstützen in den Riegel wird durch eine linearelastische Drehfeder simuliert. Aus der Verträglichkeitsbedingung für die Stützenkopfverschiebungen ergeben sich Änderungsquerkräfte am Stützenkopf gegenüber der Berechnung nach der Theorie 1. Ordnung. Die Dehnungen, die diese Änderungskräfte im Riegel hervorrufen, werden vernachlässigt, was bedeutet, daß der Rahmenriegel unter den Änderungskräften inkompressibel ist.

Die gesamte Kopfverschiebung ist:

$$y = y_{el,1} + y_{el,2} + y_{\Delta,0}$$
 (15)

yel,1 ist die Horizontalverschiebung im betrachteten Lastzustand nach der linear-elastischen Theorie 1. Ordnung:

$$y_{el,1} = y_{el,1}^{d} + y_{el,1}^{p+z}$$
 (16)

yel.1 = Verformung aus Dauerlasten

 $y_{e1,1}^{p+z} = Verformung aus Verkehrs- und Zusatzlasten$

jan, o ist die Horizontalverformung zufolge Abweichung der Stielachse von der lotrechten Wirkungslinie der Normalkraft

$$y_{\Delta,o} = y_{e,o} + y_{pl,o} + y_{f,o}$$
 (17)

y_{e,o} = Verformung zufolge ungewollter Exzentrizität der Normalkraft ypl,o = plastische Verformung (= %. yel,1)
yf,o = Verformung zufolge Fertigungsfehler
der Stabachse

y_{el,2} ist die zusätzliche Verschiebung zufolge Berücksichtigung des Gleichgewichtes am verformten Element und zufolge des nichtlinearen Werkstoffverhaltens

Besteht die Verbindung zwischen den Stützen und dem Rahmenriegel aus einem Gummilager, dann setzen sich die Verformungen yel,1, yel,1 und yel,2 aus den Verformungen der Stütze und aus jener des Gummilagers

$$y^{\text{Lager}} = \frac{Q}{F \cdot G} \cdot h \tag{18}$$

(Q = Querkraft, F = Lagerfläche, G = Schubmodul, h = Lagerhöhe) zusammen.

$$\bar{\gamma} = \gamma - [(1+g_0)_{\gamma el_1} + \gamma_{el_1}] = \gamma_{e,0} + \gamma_{f,0} + \gamma_{el_2}.$$
 (19)

Die Änderungskräfte werden mit H. bezeichnet, n sei die Anzahl der Stützen. Die Verträglichkeitsbedingung lautet dann:

$$\bar{y}_i = \text{konst}; \quad i=1,...n$$
 (20)

und das Gleichungssystem für die Änderungskräfte:

$$f(H_i) = 7$$
, $i-1,...n$ (21)

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = 0. \tag{22}$$

Dies sind n+1 Gleichungen für die n Unbekannten H, und \bar{y} . Die Lösungen können nicht analytisch gefunden werden. Errechnet man für mehrere Werte von H, die Verformungen \bar{y}_i und trägt diese Kurven für jede Stütze in einem Diagramm (H- \bar{y}) auf, dann kann graphisch die lotrechte Schlußlinie so gezogen werden, daß Σ H, = 0 wird. Die zur Schlußlinie gehörige Abszisse \bar{y} ist die Lösung und liefert die Änderungskräfte H;.

Beispiel

Gegeben ist ein statisches System gem. Abb. 9:

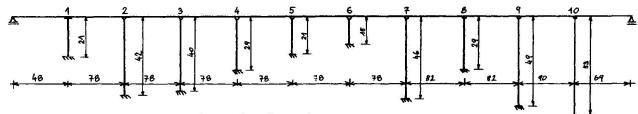
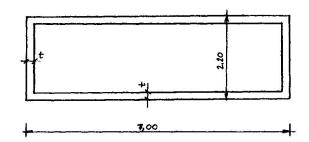


Abb.9: Statisches System

und die Baustoffe B 450 Tragwerk B 300 Pfeiler RT 50

mit dem Kriechbeiwert $y_{\infty} = 1,8.$ Für den Pfeilerquerschnitt (Abb.10)



Pfeiler 1-8: t = 25 cm Pfeiler 9,10: t = 35 cm

Abb.10: Pfeilerquerschnitt

wurde die Mindestbewehrung nach ÖNorm B 4200, 9. Teil vorgesehen (=1,4 o/oo). [6] Gesucht ist der Nachweis der Tragsicherheit für folgende 5 Lastkombinationen:

- I) Leere Brücke, voller Wind, kein Erdbeben zur Zeit t = O mit dem Sicherheitsfaktor v = 1,7
- II) Leere Brücke, voller Wind, mit Erdbeben zur Zeit t = 0 mit dem Sicherheitsfaktor y = 1,1
- III) Volle Brücke, halber Wind, ohne Erdbeben zur Zeit t = ∞ mit dem Sicherheitsfaktor v = 1,7
 - IV) Stabilitätsnachweis für zentrische Belastung des Rahmensystems mit dem Sicherheitsfaktor v = 2,5
 - V) wie Lastkombination I, sämtliche Horizontalkräfte wirken jedoch von der anderen Seite

Die Normal- und Querkräfte am Stützenkopf (die Momente sind identisch Null wegen der Gelenke am Pfeilerkopf) als Ergebnis der Rahmenrechnung nach der linearelastischen Theorie 1. Ordnung sind bekannt. Es wurde jede Lastkombination mit mehreren Ansätzen für die Änderungskräfte Himit dem EDV-Programm durchgerechnet. Die Kopfverschiebungen \overline{y} wurden tabellarisch zusammengestellt und graphisch aufgetragen (Abb. 11 für Lastkombination II). Die Lösun-

gen wurden durch heuristisches Auffinden jener Kopfauslenkung \bar{y} ermittelt, für die die Summe der positiven Änderungskräfte gleich der Summe der negativen Änderungskräfte ist.

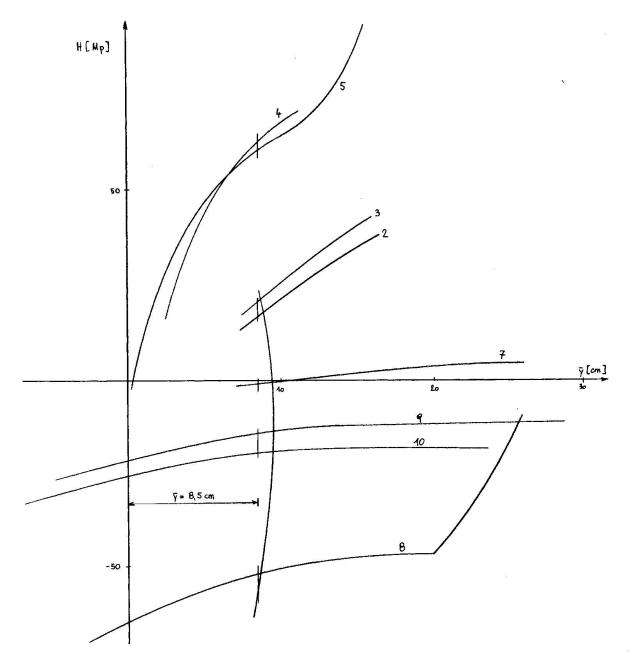


Abb.11: Pfeilercharakteristika Beispiel

Bemerkungen zu den Pfeilercharakteristiken:

Die Steigung der Kurven ist ein Maß für die Steifigkeit der Pfeiler. Aus den Abb. 11 sieht man deutlich, daß die Pfeiler 5 und 6 die steifsten und die Pfeiler 7,9 und 10 die weichsten sind.

Knickpunkte:

Sie können an 2 Stellen entstehen: dort, wo die Nulllinie beginnt, in den Querschnitt hineinzuwandern, und dort, wo Gleichgewicht des Pfeilers nur mehr bei Vergrößerung der Bewehrungsfläche möglich ist (z.B. Pfeiler 5 und 8).

Asymptoten:

Sie treten dort auf, wo eine endlich kleine Vergrößerung der Horizontal(Änderungs)-Kraft eine unendlich große
Verschiebung verursacht (z.B. Pfeiler 9 und 10). Bei dieser
Art der Labilität hilft ein Vergrößern der Bewehrungsfläche nicht mehr (im Gegensatz zu Pfeiler 8, der sich durch
Vergrößerung der Bewehrungsfläche noch retten läßt). Die
Grenze für die Möglichkeit, einen Pfeiler durch Vergrößern
der Bewehrungsfläche stabil zu machen, hängt einzig und
allein von seiner Schlankheit und die in die Schlankheit
eingehenden Materialkonstanten ab (Abb.12).

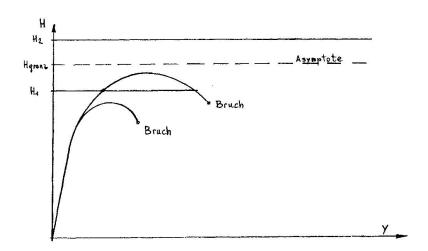


Abb.12: Verhalten einer Stahlbetonsäule unter seitlicher Horizontallast und Druck:

 $H_1 < H_{grenz}$: Bewehrungsfläche vergrößern bewirkt Stabilität $H_2 > H_{grenz}$: Keine Stabilität mehr möglich

Zick-Zack-Charakteristik:

Bei Pfeilern, deren Bewehrungsflächen sehr stark vergrößert werden bei den einzelnen Ansätzen für die Änderungskraft, kann das Auftragen der Ergebnispunkte zu einer wenig sinnvollen Zickzackkurve führen, wenn der Faktor der Eisenflächenvergrößerung groß gewählt wurde (z.B. η = 1,0). In diesem Fall muß dieser Pfeiler mit einem wesentlich kleineren η (z.B. 0,2) wiederholt werden, um eine möglichst glatte Kurve zu bekommen. In Abb. 13 wurde dieses Phänomen prinzipiell dargestellt.

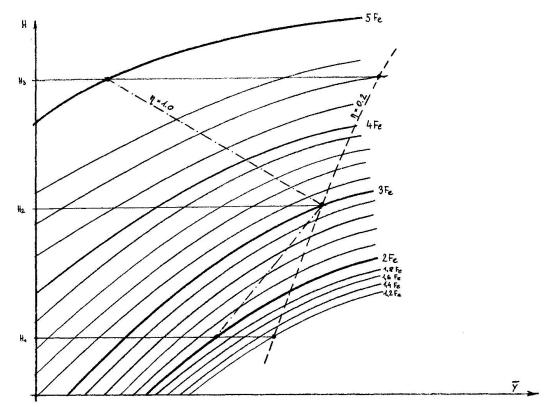


Abb. 13: Abhängigkeit der Charakteristik vom Faktor für die Bewehrungsflächenvergrößerung

Stabilitätsuntersuchung LK IV:

Für eine Stahlbetonstütze gibt es prinzipiell 2 Verhaltensarten: den Verzweigungsfall bei zentrischem Druck und den Traglastfall bei exzentrischem Druck.

Bei der Stabilitätsuntersuchung nach diesem Verfahren wird der Verzweigungsfall (der über die Ermittlung der Eigenwerte zu lösen wäre) auf den Traglastfall übergeführt dadurch, daß eine seitliche Störlast (ca. P/100) an dem Rahmentragwerk angebracht wird. Stellt sich unter der Störlast ein Gleichgewicht ein, so hat der Lastzustand noch nicht die kritische Last des Verzweigungszustandes erreicht. Im allgemeinen genügt wegen der Kleinheit der Verformungen unter der Störlast 1 Versuch und lineare Extra- und Interpolation.

Als Ergebnis konnte bei diesem Beispiel festgestellt werden, daß das Rahmentragwerk unter allen untersuchten Lastkombinationen stabil ist und daß mit der normenmäßigen Mindestbewehrung das Auslangen gefunden werden kann. Die nach diesem Verfahren ermittelten Änderungskräfte am Stützenkopf sind von der gleichen Größenordnung wie die Kopfquerkräfte aus der linear-elastischen Rechnung und haben daher ausschlaggebende Bedeutung für die Stabilität und Bemessung des Rahmentragwerkes.

Literaturverzeichnis:

- [1] Luchner, H.: "Stabilitätsberechnung hoher Brückenpfeiler am Beispiel der Siegtalbrücke Eiserfeld", BETON- u. STAHLBETONBAU, Jg. 1967, Heft 2
- [2] Ziegler, H.: "Principles of Structural Stability".
 Waltham: Blaisdell Publishing Company.
 1968
- [3] Zurmühl, R.: "Praktische Mathematik", 3. Auf., Springer: Berlin. 1961
- [4] CEB: "Empfehlungen zur Berechnung und Ausführung von Stahlbetontragwerken", Deutscher Betonverein, Werner: Düsseldorf.
- [5] DIN 1045, Ausgabe 1972 "Bemessung von Stahlbetontragwerken"
- [6] ÖNORM 4200 "Bemessung von Stahlbetontragwerken", 9. Teil
- [7] Fischer, D., Oberndorfer, W.: "Stabilität von Stahlbetonstützen", ÖST. INGENIEURZEITSCHRIFT, Jg. 1974, Heft 1

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein Verfahren zur Untersuchung der Stabilität von Stahlbetonstützen und Stahlbetonrahmen beschrieben. Das Verformungsverhalten der Bauglieder wird von normgemässen Annahmen für die Arbeitslinien von Beton und Stahl abgeleitet. Bei Versagen der Stützen wird in einem Algorithmus untersucht, ob Vergrössern der Stahleinlagen stabiles Tragverhalten ergibt. Rahmentragwerke zeigen eine überraschend grosse Aenderung der Kopfquerkräfte gegenüber der Berechnung nach der linear-elastischen Theorie. Das Ergebnis ist eine Mobilisierung von Tragreserven. Die Berechnungen werden mit einem elektronischen Rechenprogramm durchgeführt.

SUMMARY

A method for the investigation of the stability of reinforced columns and frames is described. The load deformation behaviour of the structural members is derived from the standard assumptions for the stress-strain relations of steel and concrete. A special algorithm investigates whether stable structural behaviour can be reached by enlarging of the reinforcement if the columns fails. Reinforced concrete frameworks show an astonishing change in the shear forces at the top of the columns resulting in a mobilisation of unused structural capacities. The calculations are carried out with the aid of a computer program.

RESUME

On décrit un procédé pour l'étude de la stabilité des colonnes et des cadres en béton armé. Le comportement charge - déformation des éléments de construction est dérivé des hypothèses faites pour les diagrammes tension - déformation du béton et de l'acier. On étudie un algorithme permettant, en cas de rupture des colonnes, de déterminer si le renforcement de l'armature conduit à un comportement stable. Les efforts tranchants au sommet des colonnes des cadres présentent des différences d'une ampleur étonnante par rapport à la théorie élastique linéaire, ce qui donne une "mobilisation" des capacités de charge, normalment négligées. Les calculs sont effectués à l'aide d'un programme d'ordinateur.

Leere Seite Blank page Page vide