**Zeitschrift:** IABSE reports of the working commissions = Rapports des

commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

**Band:** 16 (1974)

**Artikel:** Zur wirklichkeitsnahen numerischen Bestimmung der zeitabhängigen

Krümmung von Stahlbetonstützen

Autor: Sparowitz, L.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-15718

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

# Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# Zur wirklichkeitsnahen numerischen Bestimmung der zeitabhängigen Krümmung von Stahlbetonstützen

A Realistic Numerical Computation of the time dependent Curvature of Reinforced Concrete Columns

Contribution à l'analyse numérique réaliste de la courbure de colonnes en béton en fonction du temps

#### L. SPAROWITZ

Dipl. Ing. Institut für Stahlbeton- und Massivbau Technische Hochschule Graz Graz, Oesterreich

## 1. EINFUEHRUNG

Als grundlegende Voraussetzung für eine wirklichkeitsnahe Traglastberechnung von Stahl- und Spannbetondruckstäben ist das zeitabhängige Verformungsverhalten des Verbundquerschnittes anzusehen.
Die vorliegende Methode ist durch ihren sehr allgemeinen Aufbau vor
allem für vergleichende theoretische Untersuchungen geeignet. Sie
wird hier für beliebige einfach symmetrische Querschnittsform und
gerade Biegung dargestellt, lässt sich jedoch auch auf unsymmetrische Querschnitte und zweiachsige Momentenbeanspruchung (schiefe
Biegung) erweitern. Das Bild 1 zeigt die zeitabhängige Spannungsumlagerung und die dadurch bedingte Aufteilung der Gesamtbetondehnungen in Langzeit- und die schraffierten Kurzzeitanteile.

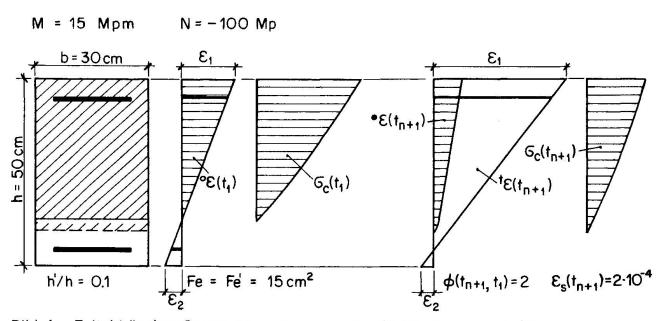
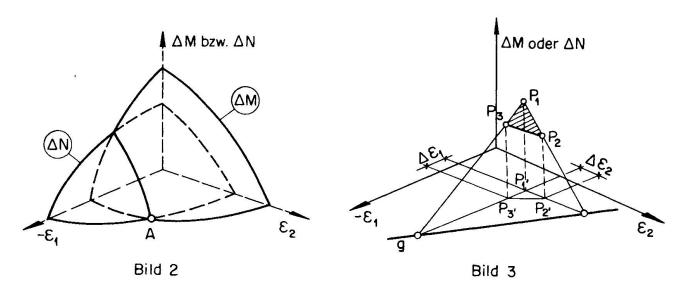


Bild 1: Zeitabhängige Spannungsumlagerung im Stahlbetonquerschnitt

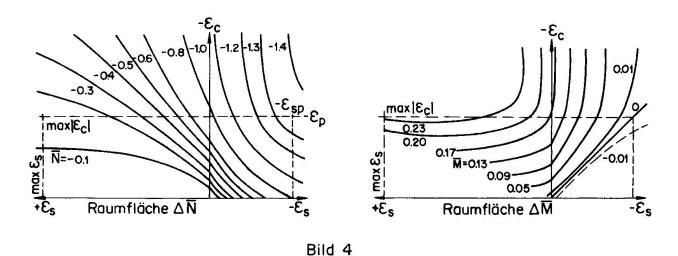
#### 2. GENERELLES VORGEHEN ZUR ERMITTLUNG DER KRUEMMUNG

Die iterative numerische Ermittlung der Krümmung K erfolgt mittels einer "räumlichen Regula Falsi" [1]. In den Achsrichtungen der Grundrissebene seien die beiden unbekannten Randdehnungen  $-\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ ,in der dritten Richtung die Differenz aus äusserem (aktivem) und innerem (reaktivem) Biegemoment aufgetragen (Bild 2). Dadurch entsteht eine räumliche Fläche, da jedem Wertepaar  $-\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  ein Wert  $\Delta M = M_a - M_r$  zugeordnet ist. Trägt man weiters an Stelle von  $\Delta M$  die Differenz aus äusserer und innerer Normalkraft auf, so entsteht eine zweite räumliche Fläche  $\Delta N$ . Das Bild 4 zeigt eine Schichtenliniendarstellung derartiger Raumflächen  $\Delta N$  und  $\Delta M$ . Die Spuren dieser Flächen in der Grundrissebene  $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$  schneiden sich in einem Punkt A, dessen Koordinaten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  die gesuchten Randdehnungen darstellen, für die sowohl  $\Delta M = M_a - M_r = 0$  als auch  $\Delta N = N_a - N_r = 0$  ist, für die also Gleichgewicht zwischen inneren und äusseren Schnittlasten besteht.



Ausgehend von Näherungswerten für  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ , erhält man durch deren Variation je drei Punkte P1, P2, P3 für AM bzw. AN, durch die je eine Ebene gelegt werden kann (Bild 3). Diese Ebenen ersetzen näherungsweise Tangentialebenen an die beiden Raumflächen ΔM und ΔN. Jede der beiden Tangentialebenen schneidet die Grundrissebene  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  in einer Geraden g. Der Schnittpunkt der beiden Geraden liefert ein verbessertes Wertepaar  $arepsilon_1$  und  $arepsilon_2$ . Dieses ersetzt die Grundrisskoordinaten jenes Punktes P, für den die relative Abweichung ΔM/Ma oder ΔN/Na am grössten ist. Nun kann ein neues Tangentialebenenpaar aufgespannt werden, das einen verbesserten Schnittpunkt A in der  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ -Ebene liefert. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis die absoluten Werte ΔM und ΔN (innerhalb der Abbruchgenauigkeit) genügend gegen Null gehen. Damit sind zu den vorgegebenen Schnittlasten Ma und Na jene beiden Randdehnungen ει und ε₂ gefunden, für die sich innere und äussere Schnittkräfte im Gleichgewicht befinden. Die gesuchte Querschnittskrümmung ergibt sich zu  $K = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/h.$ 

L. SPAROWITZ 39

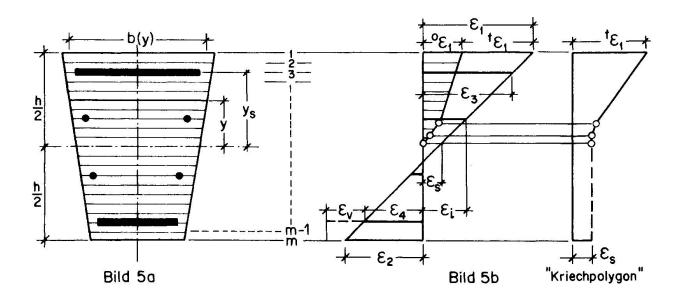


# 3. BERECHNUNG DER INNEREN SCHNITTLASTEN

Bei der Krümmungsberechnung nach Abschnitt 2 sind für ein bestimmtes Wertepaar  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  die inneren Schnittgrössen  $N_\Gamma$  und  $M_\Gamma$  erforderlich:

$$N_{\Gamma} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{c} \cdot b \cdot dy + \sum A_{s} \cdot \sigma_{s}, \quad M_{\Gamma} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{c} \cdot b \cdot y \cdot dy + \sum A_{s} \cdot \sigma_{s} \cdot y_{s}$$
 (1)

Zur numerischen Berechnung der Integrale in (1) nach Simpson wird der Betonquerschnitt diskretisiert (Bild 5a). Unter der Voraussetzung eben bleibender Querschnitte setzt sich das Gesamtdehnungsbild aus Kurz- und Langzeitdehnungen (Bild 1, Bild 5b) zusammen.



Nur der elastische Anteil der Kurzzeitverformung liefert die Betonspannungen in (1), wogegen für den Stahl selbstverständlich die Gesamtdehnung massgebend ist. Die Berechnung der elastischen Kurzzeitdehnungen durch Abziehen der plastischen Kurzzeitverformung und der Langzeitverformungen vom Geamtdehnungsbild wird im Abschnitt 5 dargestellt.

# 4. DIE ZEITLICHE KRUEMMUNGSAENDERUNG

Das hier vorausgesetzte lineare Kriechen ist meist gegeben, wenn die ständige Last höchstens den mit dem vorgesehenen Sicherheitsfaktor reduzierten Kurzzeitlasten entspricht. Zur Ermittlung der zeitabhängigen Querschnittskrümmung wird der zeitliche Verformungsablauf diskretisiert. Innerhalb eines sog. "plastischen Intervalles" wird die kriecherzeugende Spannung konstant gehalten. Durch kriechbedingte Spannungsumlagerungen im Querschnitt vom Beton auf den Stahl würden die Betonspannungen innerhalb eines Intervalles abnehmen. Bei Stahlbetonstützen nehmen jedoch die Verformungsmomente infolge Kriechen zu, wodurch gegenläufig Betonspannungen aufgebaut werden. Dadurch liefert die Annahme konstanter Spannungen innerhalb eines Intervalles bereits für eine geringe Anzahl von Kriechintervallen gute Ergebnisse.

Nach jedem plastischen Intervall können die äusseren Schnittlasten verändert werden (Theorie 2. Ordnung und/oder Relaxation). Danach werden gemäss Abschnitt 2 die Randdehnungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  berechnet, für die Gleichgewicht zwischen inneren und äusseren Schnittlasten besteht. Aus den so erhaltenen elastischen Dehnungen kann nach Abschnitt 5 die plastische Verformung am Ende des nächsten Kriechintervalles bestimmt werden. Man berechnet also alternierend aus elastischen Verformungen plastische und danach entsprechend Theorie 2. Ordnung neue elastische Dehnungen.

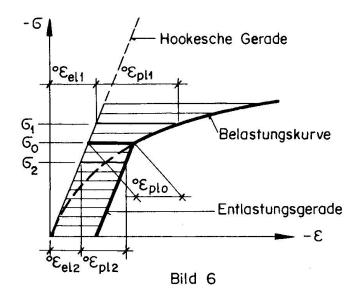
Die Langzeitverformungen werden im sog. "Kriechvektor" gespeichert. Befindet sich der Querschnitt im Zustand II,so erhält das "Kriechpolygon" (Bild 5b) nach jedem plastischen Intervall einen weiteren Knick. Dadurch ist auch der Verlauf der Kurzzeitdehnungen im Bereich der zeitabhängigen Nullinienverschiebung nicht linear.

# 5. DIE BESTIMMUNG DER BETONSPANNUNGEN

#### 5.1 Kurzzeitverformungen

Das Bild 6 stellt das  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm für eine mit  $\sigma_0$  vorbelastete Querschnittsfaser dar. Der schraffierte Bereich entspricht den plastischen Kurzzeitstauchungen. Eine Erhöhung der Spannung ( $\sigma_1$ ) bewirkt ein Anwachsen des plastischen Verformungsanteiles, wogegen dieser bei Abnahme der Spannung ( $\sigma_2$ ) unverändert bleibt. Es muss daher stets in jeder betrachteten Querschnittsfaser der aus allen Vorbelastungen resultierende maximale Wert  ${}^0\epsilon_{\text{plo}}$  bekannt sein. Er wird in der numerischen Berechnung auf den "plastischen Kurzzeitvektor" {EPO}\_m abgespeichert. Die plastische Kurzzeitverformung ist auch vom Belastungsalter (Festigkeitszunahme und "Versprödung") und der Belastungsgeschwindigkeit ("rasches Anfangskriechen") beeinflusst. Dieser Tatsache kann man durch zeitabhängiges Verändern des  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagrammes Rechnung tragen. Vereinfachend werden jedoch allgemein in den Normen mittlere  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramme für Kurzzeitbelastungen angegeben.

L, SPAROWITZ 41



# 5.2 Langzeitverformungen

Aus der Integralgleichung für stetige Belastungsänderungen [3]

$$\varepsilon_{\text{ges}}(t_k) = {}^{0}\varepsilon_{\text{el}}(t_1) \cdot [1 + \phi(t_k, t_1)] + \int_{t_i = t_2}^{t_i = t_k} \frac{\partial^{0}\varepsilon_{\text{el}}(t_i)}{\partial t_i} \cdot [1 + \phi(t_k, t_i)] \cdot dt_i + \varepsilon_s(t_k)$$

erhält man durch Auswertung für mehrere konstante Belastungsstufen den plastischen Anteil der Langzeitverformung

$$t_{\varepsilon_{pl}(t_k) = 0}^{t_i = t_{k-1}} \epsilon_{el}(t_1) \cdot \phi(t_k, t_1) + \sum_{i=t_2}^{t_2} \Delta^0 \epsilon_{el}(t_i) \cdot \phi(t_k, t_i) + \epsilon_s(t_k)$$
(1)

Setzt man in (1) für  $\Delta^0 \varepsilon_{el}(t_i) = {}^0 \varepsilon_{el}(t_i) - {}^0 \varepsilon_{el}(t_{i-1})$  so ergibt sich

$$t_{\varepsilon_{pl}(t_k)} = \sum_{t_i=t_1}^{t_i=t_{k-1}} \varepsilon_{\varepsilon_{l}(t_i)} \cdot [\phi(t_k, t_i) - \phi(t_k, t_{i+1})] + \varepsilon_{\varepsilon}(t_k)$$

$$(2)$$

In [3] wird die verzögert elastische Verformung in den Kriechzahlen  $\phi$  berücksichtigt. Erfasst man sie jedoch getrennt [2], so ändern sich die Kriechzahlen in (2).

$$t_{e_{e_{1}}(t_{k})=\sum_{t_{i}=t_{1}}^{t_{i}=t_{k}-1}} \epsilon_{e_{1}}(t_{i}) \cdot [0,4 \cdot \Phi(t_{i+1}-t_{i})] \cdot [1-\Phi(t_{k}-t_{i})]$$

$$(3)$$

Der jeweils erste Ausdruck in eckiger Klammer baut die verzögert elastische Verformung auf, der zweite bewirkt die elastische Rückverformung. Die Gleichungen (2) und (3) lassen sich zusammenfassen:

$$t_{\varepsilon(t_{k})} = t_{\varepsilon_{el}(t_{k})} + t_{\varepsilon_{pl}(t_{k})} = \sum_{t_{i}=t_{1}}^{t_{i}=t_{k-1}} \epsilon_{el}(t_{i}) \cdot \Delta \phi(t_{i}, t_{k}) + \epsilon_{s}(t_{k})$$
(4)

$$\Delta \phi(t_{i}, t_{k}) = [0, 4 \cdot \Phi(t_{i+1} - t_{i})] \cdot [1 - \Phi(t_{k} - t_{i})] + [\phi(t_{k}, t_{i}) - \phi(t_{k}, t_{i+1})]$$
 (5)

 $t_k$  durchläuft die Werte  $t_2$  bis  $t_{n+1},$   $t_i$  die Werte  $t_1$  bis  $t_n.$  Die in (4) erforderlichen elastischen Kurzzeitdehnungen werden, für die m-Querschnittsfasern (Bild 5a) angewendet, zur Matrix  $\left[\text{EEO}\right]_{m\times n}$  zusammengefasst, während die Vektoren  $\left\{\Delta\phi(t_k)\right\}_{k-1}$  für  $t_k$ = $t_2$  bis  $t_{n+1}$  eine rechte Dreiecksmatrix belegen. Der Vektor der Langzeitdehnungen zur Zeit  $t_k$  ergibt sich zu:

$$\{EL\}_{m} = [EEO]_{m \times (k-1)} \cdot \{\Delta \phi(t_k)\}_{k-1}$$

# 5.3 Die Betonspannung in einer Querschnittsfaser zur Zeit t<sub>k</sub>

Durch Abziehen der Langzeitdehnungen  $^{t}\epsilon$  von der Gesamtdehnung  $\epsilon_{ges}$  erhält man die Kurzzeitdehnung  $^{0}\epsilon$  (Bild 7). Das  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm für Kurzzeitbelastung stellt den nichtlinearen Zusammenhang

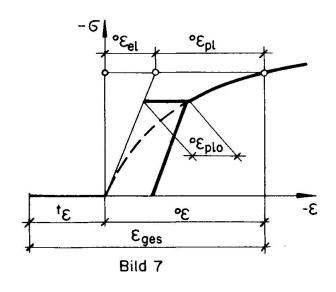
$$\sigma_{\rm C} = f({}^{0}\varepsilon) \qquad [z.B. \ \sigma_{\rm C} = \beta_{\rm C} \cdot \frac{{}^{0}\varepsilon}{\varepsilon_{\rm \beta}} \cdot (2 - \frac{{}^{0}\varepsilon}{\varepsilon_{\rm \beta}})]$$
 (6)

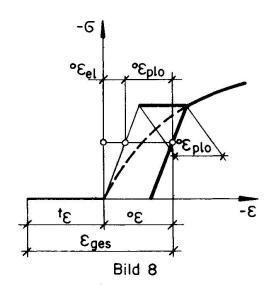
dar, woraus sich die plastische Kurzzeitverformung ⁰ε errechnen lässt

$${}^{0}\varepsilon_{p1} = {}^{0}\varepsilon - \sigma_{c}/E_{c}$$
 [z.B.  ${}^{0}\varepsilon_{p1} = \frac{1}{2} \frac{{}^{0}\varepsilon^{2}}{\varepsilon_{g}}$ ]

Durch Vergleich mit  ${}^{0}\epsilon_{\mathrm{plo}}$  erhält man folgende Fallunterscheidungen:

- a)  $|{}^0\epsilon_{pl}| > |{}^0\epsilon_{plo}|$ : Spannungszunahme (Bild 7). Wenn gemäss Abschnitt 2 Gleichgewicht gefunden ist, wird {EPO} korrigiert.
- b)  $|{}^{\circ}\epsilon_{pl}| < |{}^{\circ}\epsilon_{plo}|$  : Spannungsrelaxation (Bild 8). Die Betonspannung ist neu zu berechnen:  $\sigma_c = E_c({}^{\circ}\epsilon {}^{\circ}\epsilon_{plo})$





# 5.4 Vereinfachungen

Gelingt es, die Zeitintervalle  $(t_{i+1}-t_i)$  für i=1,2,...n so zu wählen, dass alle Elemente  $\Delta \phi(t_i,t_k)\neq 0$  gleich gross werden, so lässt sich die Gleichung (4) wie folgt schreiben:

$$t_{\varepsilon(t_k)} = \Delta \phi \cdot \sum_{\substack{t_i = t_k - 1 \\ t_i = t_1}}^{t_i = t_k - 1} \epsilon_{\varepsilon(t_i)} + \epsilon_{\varepsilon(t_k)}$$

In diesem Fall genügt zur Berechnung der Langzeitverformungen der Vektor {EL}\_m = {  $\Delta\phi \cdot \Sigma^0 \epsilon_{el} (t_i) \}_m$ . Die Matrizen [EEO]\_mxn und [ $\Delta\phi$ ]\_nxn können entfallen.

Wird der Beton näherungsweise als nichtlinear elastisches Material angesehen, so erhält man die Betonspannungen stets aus Gleichung (6). Alle weiteren Ueberlegungen im Abschnitt 5.3 und der plastische Kurzzeitvektor {EPO} werden dann unnötig.

#### Bezeichnungen

```
M_a
               äusseres (aktives) Moment
               inneres (reaktives) Moment
M_{\mathbf{r}}
               äussere (aktive) Normalkraft
N_a
               innere (reaktive) Normalkraft
               Krümmung
               Kurzzeitverformung des Betons
^{\mathsf{t}} \epsilon
               Langzeitverformung des Betons
°ε<sub>el</sub>(t<sub>i</sub>)
               elastische Kurzzeitdehnung zur Zeit \mathsf{t}_i
\epsilon_{pl}(t_i)
               plastische Kurzzeitdehnung zur Zeit ti
t_{\epsilon_{\text{el}}(t_i)}^{\epsilon_{\text{pl}}(t_i)}
               elastische Langzeitdehnung zur Zeit \mathsf{t}_{\mathtt{i}}
               plastische Langzeitdehnung zur Zeit ti
°εριο
               maximale Dehnung einer Faser aus allen Vorbelastungen
               wirksame Zeit
\phi(t_k,t_i)
               Kriechzahl für das Zeitintervall ti bis tk
\phi(t_k-t_i)
               Beiwert, der den zeitlichen Verlauf der verzögert
               elastischen Verformung berücksichtigt (o<Φ<1 ist nur
               von t<sub>k</sub>-t<sub>i</sub> abhängig)
\varepsilon_s(t_k)
               Schwinddehnung bis zur Zeit tk
               gesamte Dehnung am Druckrand
\epsilon_1
               gesamte Dehnung am Zugrand
\epsilon_2
               Dehnung der Druckbewehrung
εз
               Dehnung der Zugbewehrung
E4
               Dehnung der Stegbewehrung
               Vordehnung, falls es sich um Spannstahl handelt
\sigma_{\mathbf{c}}
               Betonspannung
               Betonspannung infolge der Vorbelastungen
\sigma_{o}
β<sub>C</sub>
               Prismenfestigkeit des Betons
               absolut kleinste Betondehnung bei β<sub>c</sub>
εβ
Ь
               Breite eines Rechteckquerschnittes
               Höhe eines Rechteckquerschnittes
\underline{M} = M_{\Gamma}/\beta_{c} \cdot b \cdot h^{2} bezogenes Biegemoment (Rechteckquerschnitt)
N=N_{\Gamma}/\beta_{C}^{\bullet}b \cdot h
               bezogene Normalkraft (Rechteckquerschnitt)
As
               Querschnittsfläche eines Bewehrungsstabes
m'
               Anzahl der betrachteten Querschnittsfasern
               Anzahl der "Kriechintervalle"
n
               Gesamtdehnung zur Zeit tk
€ges
```

# Literaturverzeichnis

- [1] Jänike, J.: Nichtlineare Berechnung von Stabwerken. Eine Algol-Studie, VEB Verlag für Bauwesen, 1968.
- [2] Rüsch, H., Jungwirth, D., Hilsdorf, H.:
  Kritische Sichtung der Verfahren zur Berücksichtigung der
  Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons auf das Verhalten der Tragwerke.
  Beton- und Stahlbetonbau 1973, Heft 3,4,6.
- [3] Trost, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton- und Spannbeton. Beton- und Stahlbetonbau 1967, Heft 10.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine numerisch iterative Methode zur wirklichkeitsnahen Bestimmung des zeitabhängigen Verformungsverhaltens von
Stahl- und Spannbetonquerschnitten dargestellt. Beliebige elastische und plastische zeitabhängige Betoneigenschaften, eine
vorgegebene Belastungsgeschichte und verschiedene Stahltypen
können berücksichtigt werden. Während des zeitabhängigen Verformungsvorganges kann der Querschnitt vom ungerissenen Zustand
in den gerissenen übergehen und umgekehrt.

#### SUMMARY

A numerical method by trial and error to compute the time dependent deformation behavior of reinforced- and prestressed concrete cross-sections is described. Arbitrary elastic and plastic time dependent concrete properties, a given loading history and different types of reinforcing steel can be considered. During the time dependent deformation process the cross-section can change from an uncracked state to a cracked one and conversely.

#### RESUME

On présente une méthode numérique itérative qui approche le comportement réel à la déformation en fonction du temps de sections en béton armé ou précontraint. On peut introduire dans le calcul toutes les caractéristiques élastiques et plastiques du béton en fonction du temps, l'"historique" de la charge, ainsi que différents types d'acier. Au cours du processus de déformation, la section peut passer de l'état non fissuré à l'état fissuré et vice-versa.